

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования «Саратовский государственный  
технический университет имени Гагарина Ю.А.»

**Техническая информация по проекту**  
**07В.01 «Математические модели, численные методы и компьютерный анализ»**  
**за 2023 год**

Руководитель ОНН 07В,  
руководитель проекта 07В.01,  
заведующий кафедрой МиМ,

д.т.н., профессор



Крысько В.А.

(подпись)

Саратов – 2023

1. 07В.01.Н1 (г/б) 02 Построить и исследовать математические модели пористых нано балок с учетом температурного поля.

Исполнители Перегудов А.Б., Жигалов М.В.

В процессе выполнения запланированных в отчетном году работ получены следующие научные результаты:

1. Построена математическая модель на основе кинематических гипотез Бернулли-Эйлера. Нано эффекты моделируются с помощью модифицированной моментной теории. Градиентные свойства материала и пористость моделируются на основе правила смеси. Геометрическая нелинейность вводится в форме Т. фон Кармана.

Проведено исследование собственных нелинейных частот для трех типов пористости, двух значений параметра пористости и двух значений нано параметра.

Проведено исследование перехода от гармонических колебаний к хаотическим с помощью спектра Фурье, вейвлет спектра, фазового портрета и отображения Пуанкаре.

Проанализированы 12 зависимостей прогиб-собственная частота, при учете различных типов пористости, значений коэффициента пористости, значений нано параметра. Проведено исследование сценариев перехода в хаос для 12 вариантов задач. Выявлены особенности и общности хаотической динамики для различных типов пор, при разных значениях нано параметра.

2. Построена математическая модель на основе кинематических гипотез Тимошенко. Нано эффекты моделируются с помощью модифицированной моментной теории. Градиентные свойства материала и пористость моделируются на основе правила смеси. Геометрическая нелинейность вводится в форме Т. фон Кармана.

Проведено исследование собственных нелинейных частот для трех типов пористости, двух значений параметра пористости и двух значений нано параметра.

Проведено исследование перехода от гармонических колебаний к хаотическим с помощью спектра Фурье, вейвлет спектра, фазового портрета и отображения Пуанкаре.

Проанализированы 12 зависимостей прогиб-собственная частота, при учете различных типов пористости, значений коэффициента пористости, значений нано параметра. Проведено исследование сценариев перехода в хаос

для 12 вариантов задач. Выявлены особенности и общности хаотической динамики для различных типов пор, при разных значениях нано параметра.

2. 07В.01.НЗ (г/б) 02 Исследование развития государства, системы управления и основных государственных структур Древней Греции.

Исполнитель Ярошенко Т.Ю.

Методы нелинейной динамики позволяют проанализировать процессы, происходящие на протяжении всей истории существования этого государства, которое непосредственно ассоциируется с историей Древнего Мира. Для анализа временных рядов изменения территории, численности населения и численности армии используется несколько видов вейвлетов – Хаара, Мексиканская шляпа, Мейера в 2D и 3D интерпретации, показатели Ляпунова методами Вольфа и Сано – Савада, Фурье – анализ. Вейвлет – анализ позволяет подробно изучить динамику событий и выделить наиболее значимые периоды стабильности и кризисных состояний. Об интенсивности происходящих процессов можно сделать вывод по увеличению количества частот в соответствующий интервал времени - многочастотные пики. С помощью вейвлет – анализа определены энергетические составляющие наиболее значимых периодов развития Древней Греции. Значения спектра первых четырех показателей вычисленные по методу Сано и Савада незначительно колеблются в окрестности нуля. Тем не менее наличие двух положительных значений означает состояние хаос – гиперхаос. Положительное значение первого показателя Ляпунова для всего временного ряда изменения территории Древней Греции означает в целом хаотическое состояние системы. Это согласуется с графиком изменения во времени значений по Вольфу, где на всем протяжении временного ряда они положительны, но близки к нулю.

3. 07В.01.Н5 (г/б) 02 Статика и динамика гибких пористых нано пластин с неоднородными вдоль контура краевыми условиями.

Исполнитель Молоденкова Т.В.

В соавторстве с А.В. Молоденковым (ИПТМУ РАН, г. Саратов) проводились исследования, связанные с задачами оптимальной переориентации твердого тела (космического аппарата (КА)). Исследовалась классическая задача оптимального управления угловым движением КА как

твердого тела с одной осью симметрии при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА без ограничения на управление. В качестве критерия оптимальности использовался квадратичный функционал энергии затраченной на маневр космического аппарата с фиксированным временем переходного процесса. С помощью взаимно-однозначных замен переменных исходная задача упрощалась (в отношении динамических уравнений Эйлера) до задачи оптимального разворота твердого тела со сферическим распределением масс, содержащей одно дополнительное скалярное дифференциальное уравнение. При этом правый конец переходного процесса представляет собой многообразие в восьмимерном фазовом пространстве.

С использованием кватернионов и принципа максимума Понтрягина получены формулы краевой задачи оптимизации. Кратко описано численное решение этой краевой задачи на основе алгоритма Левенберга-Марквардта, представляющего собой комбинацию модифицированного метода Ньютона и метода градиентного спуска. Основываясь на проведенных численных экспериментах для различных параметров задачи, сделан вывод о близости решений упрощенной классической задачи и ниже описываемой модифицированной задачи оптимального управления угловым движением КА.

Получено явное решение модифицированной задачи оптимального по энергии управления угловым движением КА с произвольными краевыми условиями по угловой скорости и ориентации КА, доведенное до алгоритма. В рамках классической концепции Пуансо, интерпретирующей произвольное угловое движение твердого тела в терминах конусов прецессии, или иначе обобщенного конического движения, проведена модификация задачи оптимального управления угловым движением КА, а его траектория задана явными выражениями в этом классе движений, содержащими произвольные постоянные и две произвольные скалярные функции (параметры обобщенного конического движения). Относительно этих функций и их производных формулировалась и решалась оптимизационная задача, в которой в качестве управлений выступали вторые производные от этих двух функций. При этом общность исходной задачи практически не нарушается: известные точные решения классической задачи оптимального углового движения динамически-симметричного КА в случаях плоского поворота или регулярной прецессии и аналогичные решения модифицированной задачи полностью совпадают; в других случаях в числовых расчетах классической и модифицированной задач относительная погрешность между значениями функционала оптимизации

составляет не более нескольких процентов, включая угловые маневры КА на большие углы. Поэтому предлагаемое решение модифицированной задачи может трактоваться как квазиоптимальное по отношению к классической задаче оптимального углового движения КА. Приведены явные выражения для кватерниона ориентации и вектора угловой скорости КА исходной классической постановки, на основе решения обратной задачи динамики твердого тела получена формула вектора управляющего момента КА. Полученные результаты на основе решения обратной задачи динамики могут быть обобщены на случаи управления КА при наличии в постановке задачи различных возмущений.

В приведенных численных примерах при решении традиционной и модифицированной задачи расхождение между величинами функционала качества, который является определяющей характеристикой задачи, составляет от долей процента до нескольких процентов, включая развороты КА на  $180^\circ$ . Примеры показывают, что предложенное аналитическое решение задачи справедливо для КА по своей динамической конфигурации близких к осевой симметрии.

По результатам исследований за 2023 г. имеется 2 публикации, одна из которых включена в БД Scopus.

4. 07B.01.H6 (г/б) 02 Построение математической модели двух коаксиальных цилиндров с учетом пористости материала и наноразмерности.

Исполнитель Яковлева Т.В.

В работе построена математическая модель цилиндрической нано/микро/макромасштабной панели с учетом функционально-градиентного пористого материала. В основу математической модели положены кинематические гипотезы Кирхгофа — Лява. Нелинейные зависимости между деформациями и перемещениями учтены в форме Т. фон Кармана. Наномасштабные эффекты учтены по модифицированной моментной теории упругости. Материал цилиндрической панели является неоднородным, при этом изучены три типа пористости: равномерная (U-PFGM), уменьшенная пористость от верхней и нижней поверхностей к центру (X-PFGM) и повышенная пористость от верхней и нижней поверхностей к центру (O-PFGM). Уравнения движения, граничные и начальные условия получены из вариационного принципа Гамильтона — Остроградского. К цилиндрической панели приложена внешняя поперечная нагрузка произвольного типа

(знакопеременная или статическая). Цилиндрическая панель рассматривается как система с «почти» бесконечным числом степеней свободы. Важным является вопрос о достоверности получаемых результатов и об исключении накопления численной погрешности. Полученные нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных методом Бубнова — Галеркина в высших приближениях сводятся к задаче Коши, которая решается методами типа Рунге — Кутты и Ньюмарка. Исследована сходимость решения вышеуказанных алгоритмов, которая достигается при совпадении не только основных функций, но и их производных до второго порядка включительно по пространственным координатам на всём рассматриваемом временном интервале. Это позволяет говорить о достоверности получаемых решений. В работе проведен анализ пространственно-временного хаоса цилиндрической нано/микро/макромасштабной панели в зависимости от типа пористости и от величины наномасштабного параметра. Для этого применяются методы нелинейной динамики, анализируются 2D и 3D вейвлет-спектры на базе различных материнских вейвлетов, фазовые портреты, спектры мощности Фурье, вычисляются значения спектра показателей Ляпунова согласно определению хаоса, предложенному Гуликом. Старший показатель Ляпунова вычислен методами Канца, Вольфа, Розенштейна, Сано — Савады. Сравнение результатов, получаемых различными методами на каждом этапе моделирования, позволяет сделать вывод об истинности получаемых хаотических решений. Тип пористости существенно влияет на характер изгибания цилиндрической панели. Функционально-градиентная теория позволяет серьезно повысить несущую способность панели. Результаты исследования показали, что цилиндрическая панель из X-PFGM материала обладает наилучшей несущей способностью по сравнению с остальными типами пористого материала.

5. 07B.01.N7 (г/б) 02 Проверка статистических гипотез.

Исполнитель Кириченко А.В.

Поскольку статистика как метод исследования имеет дело с данными, в которых интересующие исследователя закономерности искажены различными случайными факторами, большинство статистических вычислений сопровождается проверкой некоторых предположений или гипотез об источнике этих данных. Статистическая гипотеза — это предположение о

свойствах случайных величин или событий, которое мы хотим проверить по имеющимся данным.

Нулевая гипотеза – это основное проверяемое предположение, которое обычно формулируется как отсутствие различий, отсутствие влияния фактора, отсутствие эффекта, равенство нулю значений выборочных характеристик и т. п. Примером нулевой гипотезы в педагогике является утверждение о том, что различие в результатах выполнения двумя группами учащихся одной и той же контрольной работы вызвано лишь случайными причинами. Другое проверяемое предположение (не всегда строго противоположное или обратное первому) называется конкурирующей или альтернативной гипотезой. Для упомянутого выше примера гипотезы  $H_0$  в педагогике одна из возможных альтернатив  $H_1$  будет определена так: уровни выполнения работы в двух группах учащихся различны, и это различие определяется влиянием неслучайных факторов, например тех или других методов обучения. Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость проверить её, так как проверку производят статистическими методами, то данная проверка называется статистической. При проверке статистических гипотез возможны ошибки (ошибочные суждения) двух видов: – можно отвергнуть нулевую гипотезу, когда она на самом деле верна (так называемая ошибка первого рода); – можно принять нулевую гипотезу, когда она на самом деле не верна (так называемая ошибка второго рода). Величина  $\phi$ , называемая мощностью критерия, представляет собой вероятность отклонения неверной нулевой гипотезы, то есть вероятность правильного решения. Мощность критерия – вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что справедлива альтернативная гипотеза. Чем больше  $\phi$ , тем вероятность ошибки второго рода меньше. Ошибка, состоящая в принятии нулевой гипотезы, когда она ложна, качественно отличается от ошибки, состоящей в отвержении гипотезы, когда она истинна. Эта разница очень существенна вследствие того, что различна значимость этих ошибок.

6. 07В.01.Н9 (г/б) 02 Параллельные моды в импульсном режиме двойного резонанса на вырожденных квантовых переходах.

Исполнитель Паршков О.М.

Приведены результаты аналитического исследования процесса формирования нормальных мод пробного излучения при электромагнитно

индуцированной прозрачности в LL-схеме квантовых переходов между уровнями при эллиптической поляризации управляющего поля и наличии неоднородного уширения. Нормальные моды представляют собой эллиптически поляризованные волны с одинаковыми эксцентриситетами эллипсов поляризации, но с разными направлениями вращения векторов напряжённости электрического поля. Величины эксцентриситетов мод определяется только значением эксцентриситета эллипса поляризации управляющего поля. Главная ось эллипса поляризации одной из нормальных мод параллельна главной оси эллипса поляризации управляющего излучения, тогда как главная ось эллипса поляризации другой нормальной моды перпендикулярна последней. Групповая скорость моды первого типа превышает групповую скорость моды второго типа, причём обе скорости зависят от эксцентриситета эллипса поляризации управляющего излучения и его интенсивности. Пробное излучение с произвольной эллиптической поляризацией является суммой нормальных мод, распространяющихся независимо друг от друга. Ввиду различия групповых скоростей этих мод входящий в среду импульс пробного излучения распадается внутри среды на два отдельных импульса, каждый из которых представляет собой одну из нормальных мод. Доля энергии, приходящаяся на каждую нормальную моду, зависит только от поляризационных характеристик взаимодействующих полей и не зависит от их интенсивностей.

7. 07B.01.N10 (г/б) 02 Разработка алгоритма исследования балок Тимошенко в температурном поле, создание программ.

Исполнитель Бабенкова Т.В.

Настоящее исследование посвящено представлению модифицированной термоупругой модели, которая демонстрирует размерно-зависимую вибрацию микробалок Тимошенко с учетом эффектов вращения и изменения температуры. Модель была получена путем включения нелокальные масштабные эффекты и основанные на нелокальной теории упругости и модифицированной модели парных напряжений, а также на обобщенных теориях термоупругости с фазовым запаздыванием. Насколько известно автору, это первая в своем роде модель, предложенная в этой области. При этом новизна предлагаемой работы и ее вклада в данную работу заключается в том, что в ней учитывается, что тепловые свойства материала переменны и зависят от изменения температуры.

В качестве приложения к представленной модели исследуются тепловые колебания в свободно опертых вращающихся нанобалках с переменными свойствами. Аналитические решения для изучаемых переменных поля были получены с использованием метода преобразования Лапласа и метода пространства состояний. Исследовано влияние переменных ключевых факторов, включая масштаб длины материала, скорость вращения, изменение теплопроводности и импульсный нагрев, на реакцию нанопучка. Результаты могут быть использованы в исследованиях и разработке наномашин следующего поколения, таких как подшипники из наночастиц, нанотурбины, нанокамни и т. д.

8. 07В.01.Н11(г/б) 02 Разработка алгоритма исследования моделей МЭМС/НЭМС, создание программ.

Исполнители Крысько А.В., Мицкевич С.А.

На данном этапе рассматривались следующие вопросы:

1. Создание нового алгоритмического и программного обеспечения, реализующего новое математическое обеспечение, для моделирования нелинейной динамики наноконструкций и исследования перехода колебаний из гармонических в хаотические (выявление новых сценариев и модификаций перехода) и связанных с ними эффектов в поведении наноразмерных структур.
2. Проведение исследования достоверности получаемых результатов математического моделирования. Для этого численную реализацию необходимо проводить принципиально различными новыми численными методами, исследовать их сходимость.
3. Проведение вычислительных экспериментов для всего многообразия управляющих параметров, выявление неблагоприятных условий эксплуатации компонентов НЭМС.

### Список поданных заявок

1. РФ 24-11-00069 Математическое моделирование, оптимизация микроструктуры, компьютерные, аналитические и экспериментальные методы исследования прочностных свойств пористых функционально-градиентных структурных элементов механических и биомеханических систем в статике и гипер-хаотической динамике.

### Список Публикаций:

1. Молоденков А.В., Сапунков Я.Г., Молоденкова Т.В. Аналитический квазиоптимальный алгоритм программного управления угловым движением осесимметричного космического аппарата // В сборнике: XXX Юбилейная Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. сборник материалов конференции. Санкт-Петербург, 2023. С. 403-406. (РИНЦ) eLIBRARY ID: 54258334. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=54258334>

2. Molodenkov A.V., Sapunkov Ya.G., Molodenkova T.V. Analytical Quasi-Optimal Algorithm for Program Control of an Attitude of an Axisymmetric Spacecraft // 30th Saint Petersburg Intern. Conf. on Integrated Navigation Systems, ICINS 2023. Proceedings. St. Petersburg: SRC RF CSRI "Elektropribor", 2023. (Scopus) DOI: 10.23919/ICINS51816.2023.10168467

3. Паршков О.М., Плеханова И.А. Совместное распространение коротких лазерных импульсов в -схеме вырожденных квантовых переходов. Оптика и спектроскопия. 2023. Т. 131. № 12. С. 1679-1687.

4. Dunchenkin P.V., Cherekaeva V.A., Yakovleva T.V., Krysko A.V. Topological optimization of interconnection of multilayer composite structures. Computation. 2023. Т. 11. № 5. С. 87.

5. Tebyakin A., Kalutsky L., Yakovleva T., Krysko A. Application of variational iterations method for studying physically and geometrically nonlinear kirchhoff nanoplates: a mathematical justification Axioms. 2023. Т. 12. № 4. С. 355.

6. Krysko A.V., Makseev A.E., Smirnov A., Zhigalov M.V., Krysko V.A. A new approach to identifying an arbitrary number of inclusions, their geometry and location in the structure using topological optimization. Applied Sciences (Switzerland). 2023. Т. 13. № 1. С. 49.

7. Krysko-jr. V.A., Tebyakin A.D., Zhigalov M.V., Krysko V.A., Awrejcewicz J. Mathematical model of physically non-linear kirchhoff plates: investigation and analysis of effective computational iterative methods International Journal of Non-Linear Mechanics. 2023. Т. 150. С. 104346.

8. Krysko V.A., Awrejcewicz J., Kalutsky L.A., Krysko V.A. Quantification of various reduced order modelling computational methods to study deflection of size-dependent plates. *Computers & Mathematics with Applications*. 2023. T. 133. С. 61-84.

9. Krysko- jr V.A., Awrejcewicz J., Zhigalov M.V., Tebyakin A.D., Krysko V.A. Physical nonlinearity in porous functionally graded kirchhoff nano-plates: modeling and numerical experiment. *Applied Mathematical Modelling*. 2023. T. 123. С. 39-74.

10. Яковлева Т.В., Крысько В.А. Гипер-хаотические колебания пористых нано/микро/макромасштабных коаксиальных цилиндрических оболочек с учетом контактного взаимодействия. В книге: XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. сборник тезисов докладов : в 4 т. Министерство науки и высшего образования РФ; Российская академия наук; Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого. Санкт-Петербург, 2023. С. 810-812.

11. Папкина И.В., Яковлева Т.В., Крысько А.В., Крысько В.А. Новая сдвиговая математическая модель колебаний пластинчатых пористых функционально градиентных акселерометров с присоединенной массой в температурном поле. В сборнике: XXX Юбилейная Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. сборник материалов конференции. Санкт-Петербург, 2023. С. 419-422.

12. Калущий Л.А., Яковлева Т.В., Крысько В.А. Методы анализа гибких пористых функционально- градиентных нано цилиндрических панелей. В сборнике: XXXV Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС - 2023). Сборник трудов конференции. Москва, 2023. С. 108-115

13. Krysko, A.V., Kalutsky, L.A., Zakharova, A.A., Krysko, V.A. Mathematical modeling of porous geometrically nonlinear metal nano-plates taking into account moisture | математическое моделирование пористых геометрически нелинейных металлических нанопластин с учетом влажности. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University, Geo Assets Engineering*, 2023, 334(9), страницы 36–48

14. Papkova, I.V., Yakovleva, T.V. Nonlinear Eigen frequencies of a functionally graded porous nano-beam with respect to the coulomb and Casimir forces/ *E3S Web of Conferences*, 2023, 389, 01029

15. Papkova, I.V., Krysko, A.V., Yakovleva, T.V., Krysko, V.A. A New Shear Mathematical Model of the Vibration of Porous Functionally Graded Lamellar Accelerometers with Attached Mass in a Temperature Field. 30th Anniversary Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, ICINS 2023, 2023

#### Свидетельства о гос. регистрации программ для ЭВМ

1. Программный комплекс моделирования нелинейной статики и динамики функционально-градиентной пористой по толщине балки бернулли-эйлера на основе модифицированной моментной теории/Крысько В.А., Жигалов М.В., Мицкевич С.А.//Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2023612118, 30.01.2023. Заявка № 2023610365 от 10.01.2023

2. Программа для исследования нелинейной динамики пористой функционально-градиентной наномасштабной цилиндрической оболочки/Яковлева Т.В.//Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2023617928, 17.04.2023. Заявка № 2023616792 от 07.04.2023.

3. Программа для исследования нелинейной статики и динамики пористой функционально-градиентной гибкой наномасштабной балки с учетом силы Казимира/Яковлева Т.В., Папкова И.В., Черкаева В.А.//Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2023617930, 17.04.2023. Заявка № 2023616818 от 07.04.2023

4. Программа для исследования нелинейных колебаний нано/микро/макромасштабных коаксиальных цилиндров/Яковлева Т.В.//Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2023618037, 18.04.2023. Заявка № 2023616790 от 07.04.2023.

#### Список студентов, работающих над проектом:

1. Павлова Александра Сергеевна
2. Теряев Андрей Григорьевич
3. Жидиков Артем Александрович
4. Сащенко Максим Алексеевич
5. Павлов Дмитрий Андреевич

#### Список молодых ученых выполняющие работы

1. Яковлева Т.В., к.ф.-м.н., доцент каф МиМ.
2. Бодягина К.С. – к.ф.-м.н., лаборант.

Список курсов по тематике проекта:

1. Б.1.1.23 Математическое моделирование на языке C#
2. Б.1.1.25 Основы кибернетики и дискретного моделирования
3. Б.1.2.6 Основы программирования в среде Mathcad
4. Б.1.2.11 Издательская система LaTeX
5. Б.1.3.6.1 Применение аналитических функций в математическом моделировании