

На правах рукописи



Попова Елизавета Викторовна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ УЕДИНЕННЫХ
ВОЛН ДЕФОРМАЦИИ В ДВУХ СООСНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ
ОБОЛОЧКАХ, ИЗ МАТЕРИАЛА С ДРОБНОЙ ИЛИ ДРОБНОЙ
И КВАДРАТИЧНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ,
СОДЕРЖАЩИХ ВЯЗКУЮ ЖИДКОСТЬ

Специальность 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Саратов 2025

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.»

Научный руководитель: **Кондратов Дмитрий Вячеславович**
доктор физико-математических наук, доцент,
заведующий кафедрой «Информационная
безопасность автоматизированных систем» СГТУ
имени Гагарина Ю.А.

Официальные оппоненты: **Вельмисов Петр Александрович**,
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры «Высшая математика»
федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Ульяновский государственный технический
университет», г. Ульяновск

Кузнецова Екатерина Львовна, доктор физико-
математических наук, доцент, профессор кафедры
«Математика» федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Московский авиационный
институт (национальный исследовательский
университет)», г. Москва

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное
научное учреждение «Федеральный исследова-
тельский центр Институт прикладной физики
им. А.В. Гапонова-Грехова Российской академии
наук», г. Нижний Новгород

Защита состоится «12» ноября 2025 г. в 14.00 часов на заседании диссер-
тационного совета 24.2.391.03 при СГТУ имени Гагарина Ю.А. по адресу:
410054, г. Саратов, ул. Политехническая, 77, корп. 25, ауд. 815.

С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться в научно-
технической библиотеке ФГБОУ ВО «Саратовский государственный техни-
ческий университет имени Гагарина Ю.А.» и на официальном сайте универ-
ситета <https://www.sstu.ru>

Автореферат разослан «__» сентября 2025 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



М.В. Алонова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Неразрушающий контроль состояния упругих конструкций в виде стержней, балок, пластин и оболочек с применением волновых технологий все более широко используется в современной науке и технике. Например, для трубопроводов применяют неразрушающие методы диагностики на базе сопоставления регистрируемых скоростей волн деформации в их материале с предсказанными на основе математического моделирования. Имеется тенденция изготовления труб из современных материалов, обладающих, как показывают эксперименты, нелинейными диаграммами деформирования, которые могут быть аппроксимированы степенной функцией с дробным показателем или ее комбинацией с квадратичной функцией. Это обуславливает настоятельную потребность дальнейшего развития методов математического моделирования эволюции волн деформации в цилиндрических оболочках, заполненных жидкостью и выполненных из материалов с дробной и/или дробной и квадратичной физической нелинейностью.

Значительный вклад в развитие методов моделирования нелинейной волновой динамики упругих конструкций внесли Весницкий А.И., Потапов А.И., Ерофеев В.И., Индейцев Д.А., Абрамян А. К., Вакуленко С. А., Самсонов А.М., Порубов А.В., Ланда П.С., Кудряшов Н.А., Могилевич Л.И., Землянухин А.И., Бочкарев А.В., Коссович Л.Ю., Островский Л.А., Пелиновский Е.Н., Nayfeh A.H., Schamel H., Amabili M., Маневич Л.И., Андрианов И.В., Михлин Ю.В., Awrejcewicz J., Крысько В.А. и др.

Учет заполнения оболочки жидкостью ведет к необходимости моделирования гидроупругих процессов, которые, как правило, рассматриваются в линейной постановке. Исследования данных проблем проводили Вольмир А.С., Мнев Е.Н., Перцев А.К., Григолюк Э.И., Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т., Шклярчук Ф.Н., Матвеев В.П., Бочкарев А.С., Лекомцев С.В., Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Вельмисов П.А., Paidoussis M.P., Chan S.P., Misra A.K., Amabili M., McLean J.D., Dowell E.H. и др. Моделирование эволюции уединенных нелинейных волн в оболочках с жидкостью отражено в работах Коренькова А.Н., Могилевича Л.И., Блинкова Ю.А., Попова В.С., Кондратова Д.В. Однако в этих исследованиях не были рассмотрены случаи соосных оболочек из материалов, в которых связь напряжений и деформаций имеет дробную или комбинированную дробную и квадратичную нелинейность.

Отмеченное обуславливает актуальность и цель представленной диссертации.

Целью работы являются разработка и численное исследование математических моделей эволюции нелинейных волн продольной деформации в двух соосных цилиндрических оболочках, из материала с дробной или комбинированной дробной и квадратичной физической нелинейностью, содержащих вязкую жидкость между ними и во внутренней оболочке.

Следуя сформулированной цели, поставлены следующие задачи:

1. Вывод уравнений динамики оболочки, из несжимаемого материала с дробной или комбинированной дробной и квадратичной физической нелинейностью.
2. Постановка и решение задач гидроупругости двух соосных оболочек из материала с дробной или комбинированной дробной и квадратичной физической нелинейностью, для случаев наличия вязкой жидкости между ними, а также во

внутренней оболочке.

3. Разработка математических моделей эволюции нелинейных волн продольной деформации в двух соосных цилиндрических оболочках, выполненных из материала с дробной или комбинированной дробной и квадратичной физической нелинейностью, для случаев наличия вязкой жидкости между ними, а также во внутренней оболочке.

4. Генерация, с помощью техники построения базисов Гребнера, новых разностных схем для систем двух нелинейных эволюционных уравнений, обобщающих уравнение Шамеля или уравнение Кортевега – де Вриза – Шамеля (КдВШ) и переход к разностному аналогу данных систем, с последующей реализацией программного комплекса для вычислительных экспериментов по изучению особенностей эволюции волн деформации в двух соосных оболочках из материала с дробной или комбинированной дробной и квадратичной физической нелинейностью при наличии вязкой жидкости между ними, а также во внутренней оболочке.

Научная новизна работы:

1. Получены новые математические модели в виде уравнений динамики цилиндрической оболочки, *отличающиеся* от известных уравнений учетом *дробной физической нелинейности* или *комбинированной дробной и квадратичной физической нелинейности* ее материала (соответствует п.п. 1, 8 паспорта специальности 1.2.2).

2. Осуществлена разработка и анализ новых моделей гидроупругости двух соосных цилиндрических оболочек, содержащих жидкость между ними и во внутренней оболочке, *отличающихся* от известных задач учетом *дробной или комбинированной дробной и квадратичной физической нелинейностью* материала оболочек, *инерционных и диссипативных* свойств жидкости (соответствует п.п. 1, 8 паспорта специальности 1.2.2).

3. Предложен *единый подход* построения моделей волновой динамики в двух соосных оболочках с жидкостью в виде системы двух эволюционных уравнений, обобщающих уравнение Шамеля или КдВШ, для изучения продольных нелинейных волн деформации в исследуемых механических системах, *основанный на асимптотическом анализе* сформулированных задач гидроупругости соосных оболочек методом двухмасштабных разложений (соответствует п.п. 7, 8 паспорта специальности 1.2.2).

4. Получены, с помощью техники построения базисов Гребнера, *новые разностные схемы* для систем двух нелинейных эволюционных уравнений, обобщающих уравнение Шамеля или уравнение КдВШ, а также предложен подход для *линеаризации степенных сеточных функций с дробным показателем степени 3/2 и квадратичных сеточных функций*, используемых в данных схемах, для следующего временного слоя. Разработаны *комплексы программ* для численного решения указанных систем эволюционных уравнений и проведения *вычислительных экспериментов* по изучению эволюции нелинейных уединенных волн продольной деформации в двух соосных цилиндрических оболочках, выполненных из материала с дробной или комбинированной дробной и квадратичной физической нелинейностью, для случаев наличия вязкой жидкости между ними, а также во внутренней оболочке (соответствует п.п. 2, 3, 8 паспорта

специальности 1.2.2).

5. Вычислительные эксперименты на базе численного решения систем двух эволюционных уравнений, обобщающих уравнение Шамеля или уравнение КдВШ, позволили установить *возможность возникновения* в оболочках *сверхзвуковых солитонов* при отсутствии жидкости во внутренней оболочке *или солитонов с дозвуковой скоростью распространения* при совместном учете наличия вязкой жидкости между ними и во внутренней оболочке, а также сжимаемости их материала (соответствует п.п. 1,3,7,8 паспорта специальности 1.2.2).

Теоретическая значимость работы состоит в развитии методов математического моделирования нелинейной волновой динамики соосных цилиндрических оболочек с учетом гидроупругих эффектов, обусловленных взаимодействием тонкостенных конструкций, из материала с дробной или комбинированной дробной и квадратичной физической нелинейностью, с заполняющей их вязкой жидкостью, включая разработку новых разностных схем для численного решения систем нелинейных эволюционных уравнений и создание на их базе комплексов программ, реализующих вычислительные эксперименты по исследованию эволюции нелинейных уединенных волн деформации в рассматриваемых механических системах.

Практическая ценность и реализация результатов обусловлены возможностью их применения для математического моделирования нелинейной волновой динамики в трубопроводных системах, машинах, приборах и технологических аппаратах, содержащих соосные оболочки из физических нелинейных материалов, которые образуют кольцевые каналы, заполненные вязкой жидкостью. Работа выполнена в рамках проекта 01В.01.Н5 «Математическое моделирование распространения дисперсионных волн в цилиндрических оболочках с дробной физической нелинейностью, содержащих вязкую жидкость» 2022-2024 гг. по основному научному направлению СГТУ имени Гагарина Ю.А. – 01В «Фундаментальные и прикладные проблемы математического и натурного моделирования в естественных науках». Кроме того, результаты диссертации использованы при выполнении грантов РФФИ №18-01-00127-а, № 19-01-00014-а, РНФ №23-29-00140.

Разработанные математические модели, методика их численного исследования на базе полученных новых разностных схем и созданные программы (свидетельства о госрегистрации № 2024680108, № 2024680139) расчета эволюции нелинейных продольных волн деформации в соосных оболочках, содержащих жидкость, являются фундаментальным заделом дальнейшего развития волновых методов неразрушающей диагностики изделий современного машиностроения, в которых используются новые материалы с нелинейными законами связи деформаций и напряжений. Полученные результаты применимы в научном и учебных процессах вузов в рамках дисциплин по математическому моделированию, методам математической физики, вычислительным методам и программированию.

Положения и результаты, выносимые на защиту:

1. Математические модели гидроупругости двух соосных цилиндрических оболочек, выполненных из материала с дробной или комбинированной дробной и квадратичной физической нелинейностью, содержащих жидкость между ними и во внутренней оболочке.

2. Система двух эволюционных уравнений, обобщающих уравнение

Шамеля, или система двух эволюционных уравнений, обобщающих уравнение КдВШ, полученные в рамках единого подхода на базе асимптотического анализа сформулированных в работе моделей гидроупругости, определяют эволюцию продольных волн деформации в рассматриваемых соосных оболочках.

3. Новые разностные схемы, аналогичные схеме Кранка-Николсона для уравнения теплопроводности, полученные с помощью техники построения базисов Гребнера, а также предложенный подход линеаризации степенных сеточных функций с показателем $3/2$ и 2 для следующего временного слоя, обеспечивают корректный переход к разностному аналогу системы двух эволюционных уравнений, обобщающих уравнение Шамеля или системы двух эволюционных уравнений, обобщающих уравнение КдВШ.

4. Разработанный комплекс программ позволяет выполнять вычислительные эксперименты по эволюции уединенных волн деформации в соосных цилиндрических оболочках, выполненных из материала с дробной или комбинированной дробной и квадратичной нелинейностью, содержащих вязкую жидкость между ними, а также во внутренней оболочке, и может быть использован для прогнозирования особенностей волновых процессов в кольцевых каналах, образованных данными оболочками.

5. Анализ результатов вычислительных экспериментов показал: при отсутствии жидкости во внутренней оболочке в оболочках наблюдаются сверхзвуковые солитоны, а их эволюция сопровождается обменом энергией между оболочками через вязкую жидкость между ними, что проявляется в возбуждении уединенной волны в невозмущенной оболочке с последующей эволюцией волн в каждой из оболочек, амплитуда которых равна половине амплитуде исходной волны в возмущенной оболочке; при учете наличия вязкой жидкости во внутренней оболочке и сжимаемом материале оболочек наблюдаются солитоны с дозвуковой скоростью, которые разрушаются с течением времени; при несжимаемом материале оболочек и неучете инерции жидкости наличие последней во внутренней оболочке не влияет на волновой процесс.

Достоверность полученных результатов обеспечивается обоснованными физическими и математическими допущениями при постановке исследуемых задач, применением классических математических методов, теории оболочек, нелинейной теории упругости и механики жидкости, а также проведением асимптотического анализа сформулированных задач на базе методов возмущений; использованием алгебраических подходов на базе техник построения базисов Гребнера для генерации разностных схем. Полученные результаты в частных случаях коррелируют с известными по литературным источникам результатами других авторов, а также не противоречат имеющимся физическим представлениям и экспериментальным данным.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на: XXXIII, XXXVII Международных научных конференциях «Математические методы в технике и технологиях ММТТ-33, ММТТ-37,» (Казань, 2020, 2024 гг.); Международной научной конференции «Компьютерные науки и информационные технологии» (Саратов, 2018 г.), XXVI-XXIX Международных симпозиумах им. А.Г. Горшкова «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» (Москва, Вятчи, 2020-2023 гг.), XI-XIII Между-

народных научно-практических конференциях «Проблемы безопасности на транспорте» (Гомель, Республика Беларусь, 2021-2024 гг.); Международной научно-практической конференции «Инновационное развитие транспортного и строительного комплексов» (Гомель, Республика Беларусь, 2023 г.); X Международной конференции «Лазерные, плазменные исследования и технологии ЛаПлаз-2024» (Москва, 2024 г.), а также на семинарах кафедры «Информационная безопасность автоматизированных систем» СГТУ имени Гагарина Ю.А.

Личный вклад автора: анализ литературных источников; формулировка цели и задач исследования; вывод уравнений динамики рассматриваемых оболочек; постановка и решение задач гидроупругости двух указанных соосных оболочек, заполненных жидкостью; построение моделей нелинейной волновой динамики для данных оболочек и разностных схем для численного их представления совместно с подходом линеаризации степенных сеточных функций с показателем $3/2$ и 2 ; разработка комплекса программ моделирования волновых процессов в исследуемых оболочках; проведение вычислительных экспериментов, анализ и трактовка их результатов, а также подготовка публикаций, докладов и оформление РИД.

Публикации. Результаты диссертации отражены в 26 печатных работах, из них: 5 – в изданиях, включенных в Scopus, WoS и Белый список, 4 – в профильном научном журнале 1-й категории из списка ВАК Минобрнауки России, 2 свидетельства о государственной регистрации программ.

Структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы и приложений.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении проанализировано текущее состояние проблемы, сформулированы цель и задачи исследования, обоснованы его актуальность и научная новизна, приведены положения и результаты, выносимые на защиту, а также основные характеристики диссертационной работы. Представлен объект исследования – две соосные оболочки с вязкой жидкостью между ними при отсутствии или наличии жидкости во внутренней оболочке (см. рис. 1).

В первой главе разработана и исследована математическая модель эволюции волн продольной деформации в двух соосных цилиндрических оболочках с жидкостью между ними, выполненных из материала с дробной физической нелинейностью.

Введены основные допущения: изучаем осесимметричную задачу без отражения волн на торцах (оболочки бесконечно протяжены); материал оболочек сжимаем и закон его деформирования аппроксимирован жесткой нелинейностью в виде степенной функции с дробным показателем; оболочки типа Кирхгофа-Лява; жидкость ньютоновская несжимаемая; на

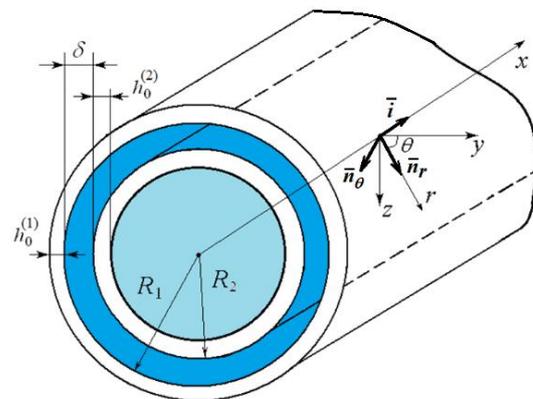


Рисунок 1. Соосные цилиндрические оболочки с жидкостью между ними и во внутренней оболочке

границах контакта оболочек с жидкостью выполняются условия прилипания, т.е. скорости жидкости и оболочек совпадают; толщины оболочек $h_0^{(i)}$ и зазор $\delta = R_1 - R_2$ между ними малы по сравнению с радиусами $R^{(i)}$ их срединных поверхностей (индексы: $(i) = (1)$ – внешняя оболочка, $(i) = (2)$ – внутренняя оболочка).

Связь напряжений σ_x, σ_θ с деформациями $\varepsilon_x, \varepsilon_\theta$ и интенсивностью деформаций ε_u в материале оболочек задаем как

$$\sigma_x^{(i)} = E(\mu_0 \varepsilon_\theta^{(i)} + \varepsilon_x^{(i)})[1 + (\varepsilon_u^{(i)})^{1/2} m/E]/(1 - \mu_0^2), \quad \sigma_\theta^{(i)} = E(\varepsilon_\theta^{(i)} + \mu_0 \varepsilon_x^{(i)})[1 + (\varepsilon_u^{(i)})^{1/2} m/E]/(1 - \mu_0^2), \quad (1)$$

$$\varepsilon_u^{(i)} = \frac{\sqrt{3}}{1 + \mu_0} (\mu_1 [(\varepsilon_\theta^{(i)})^2 + (\varepsilon_x^{(i)})^2] - \mu_2 \varepsilon_\theta^{(i)} \varepsilon_x^{(i)})^{1/2}, \quad \mu_1 = \frac{1}{3} \left[1 + \frac{\mu_0}{(1 - \mu_0)^2} \right], \quad \mu_2 = \frac{1}{3} \left[1 - \frac{2\mu_0}{(1 - \mu_0)^2} \right], \quad i = 1, 2.$$

Здесь E – модуль Юнга материала, μ_0 – коэффициент Пуассона, m – положительная константа материала, определяемая из опытов на растяжение-сжатие.

Аппроксимация (1) позволила вывести новые уравнения динамики оболочек аналогично¹. Эти уравнения использованы в постановке задачи гидроупругости. Для этого в их правых частях в качестве нагрузок учтены нормальные и касательные напряжения жидкости и уравнения оболочек дополнены уравнениями динамики жидкости (уравнения Навье-Стокса и неразрывности), а также краевыми условиями – условиями совпадения скоростей на границах контакта жидкости и оболочек. Проводя асимптотический анализ задачи методом двухмасштабных разложений, показано, что в линейном (первом) приближении продольные волны деформации в рассматриваемых оболочках могут представлять собой произвольную функцию, а их скорость звуковая. В следующем приближении получена система двух эволюционных уравнений для безразмерного продольного перемещения $u_{10}^{(i)}$ оболочек ($i = 1, 2$)

$$\frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{m}{E} \left(\frac{\sqrt{3}}{1 + \mu_0} \right)^{1/2} \frac{3}{4} \sqrt{1 - \mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2)^{1/4} \left| \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \right|^{1/2} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} + \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^4} = \quad (2)$$

$$= - \frac{1}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{l}{\varepsilon^{3/2} \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \left[q_x^{(i)} - \mu_0 \varepsilon^{1/4} \frac{\partial (-1)^{i-1} q_n}{\partial \xi} \right]_{R^{(i)}}, \quad \xi = x^* - \sqrt{1 - \mu_0^2} t^*, \quad \tau = \varepsilon^{1/2} t^*, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t.$$

Здесь ξ – бегущая координата, τ – медленное время, ε – малый параметр задачи, l – длина волны, ρ_0 – плотность материала оболочек, c_0 – скорость продольных волн в оболочке, x – размерная продольная координата, t – размерное время, $q_x^{(i)}$, $(-1)^{i-1} q_n$ – касательные и нормальные напряжения вязкой жидкости на i -й оболочке. Каждое из уравнений (2) – обобщение уравнения Шамеля.

Для определения $q_x^{(i)}$, q_n осуществлен переход к уравнениям тонкого слоя жидкости, но с удержанием локального члена инерции, которые решены методом итераций. На первой итерации исключался инерционный член и найдено решение для ползущего течения, а на второй итерации инерционный член определялся из решения на первой итерации. В результате система (2) приняла вид ($i = 1, 2$)

$$\varphi_r^{(i)} + 6 \left| \varphi^{(i)} \right|^{1/2} \varphi_\eta^{(i)} + \varphi_{\eta\eta\eta}^{(i)} + (-1)^i (\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)} - \sigma_1 (\varphi_\eta^{(2)} - \varphi_\eta^{(1)})) = 0, \quad \varphi^{(i)} = c_3^{-1} \partial u_{10}^{(i)} / \partial \xi, \quad \eta = c_1 \xi, \quad t = c_2 \tau, \quad (3)$$

где $\varphi^{(i)}$ – продольная деформация, нижние индексы обозначают частные производные, c_1, c_2, c_3, σ_1 определяются через параметры, входящие в коэффициенты

¹ Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. Москва: Наука, 1972.

системы (2), а также плотность и кинематическую вязкость жидкости. Коэффициент σ_1 оценивает инерцию жидкости (для ползущего течения $\sigma_1 = 0$).

Используя технику построения базисов Гребнера в системе компьютерной алгебры Maple аналогично², получена разностная схема для (3) ($i = 1, 2$)

$$\begin{aligned} & \frac{u^{(1)n+1}_j - u^{(1)n}_j}{\tau} + 4 \frac{(u^{(1)3/2n+1}_{j+1} - u^{(1)3/2n+1}_{j-1}) + (u^{(1)3/2n}_{j+1} - u^{(1)3/2n}_{j-1})}{4h} + \frac{(u^{(1)n+1}_{j+2} - 2u^{(1)n+1}_{j+1} + 2u^{(1)n+1}_{j-1} - u^{(1)n+1}_{j-2})}{4h^3} + \\ & + (u^{(i)n}_{j+2} - 2u^{(i)n}_{j+1} + 2u^{(i)n}_{j-1} - u^{(i)n}_{j-2}) / (4h^3) + (-1)^{i+1} (u^{(1)n+1}_j + u^{(1)n}_j - u^{(2)n+1}_j - u^{(2)n}_j) / 2 - \\ & - \sigma_1 (-1)^{i+1} \left(\frac{(u^{(1)n+1}_{j+1} - u^{(1)n+1}_{j-1}) + (u^{(1)n}_{j+1} - u^{(1)n}_{j-1})}{4h} - \frac{(u^{(2)n+1}_{j+1} - u^{(2)n+1}_{j-1}) + (u^{(2)n}_{j+1} - u^{(2)n}_{j-1})}{4h} \right) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $u^{(i)n}_j = \varphi^{(i)}(t_n, \eta_j)$ – дискретные сеточные функции, $t_{n+1} - t_n = \tau$, $\eta_{j+1} - \eta_j = h$.

Степенные сеточные функции с показателем $3/2$ для следующего временного слоя линеаризовались следующим образом:

$$\begin{aligned} v_{k+1}^{3/2} &= v_{k+1}^{3/2} - v_k^{3/2} + v_k^{3/2} = (v_{k+1}^{1/2} - v_k^{1/2})(v_{k+1} + v_{k+1}^{1/2}v_k^{1/2} + v_k) + v_k^{3/2} = \\ &= (v_{k+1}^{1/2} - v_k^{1/2})(v_{k+1}^{1/2} + v_k^{1/2}) \frac{(v_{k+1} + v_{k+1}^{1/2}v_k^{1/2} + v_k)}{v_{k+1}^{1/2} + v_k^{1/2}} + v_k^{3/2} \approx (v_{k+1} - v_k) \frac{3}{2} v_k^{1/2} + v_k^{3/2} = \frac{3}{2} v_k^{1/2} v_{k+1} - \frac{1}{2} v_k^{3/2}. \end{aligned} \quad (5)$$

За начальное условие при численных расчетах выбрано частное точное решение (3) в виде уединенной волны (при расчетах в начальный момент полагали $t = 0$)

$$\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} = 25k^4 \{1 + \text{ch}k[\eta - (4k^2)t]\}^{-2} / 4. \quad (6)$$

В этом решении k – волновое число, является произвольным.

Используя (4)-(6), создана программа моделирования эволюции уединенных волн. На рисунке 2 представлены расчеты эволюции волн (для $\sigma_1 = 0,2$) при первоначальном возбуждении: **а**) волны в одной оболочке (в (6) $k = 0,2$, а $\varphi^{(2)} = 0$); **б**) двух волн разной амплитуды и смещенных друг от друга по координате η , в каждой из оболочек (в (6) для $\varphi^{(1)}$: $k = 0,225$ и смещение по η на -50 единиц, для $\varphi^{(2)}$: $k = 0,2$).

Моделирование показало, что в случаях **а** и **б** наблюдается движение волн вправо, т.е. нелинейная добавка к линейной составляющей волнового процесса положительна, следовательно, скорость волн сверхзвуковая. В случае **а** с течением времени происходит зарождение уединенной волны в первоначально невозмущенной оболочке с последующей эволюцией волн в каждой из оболочек, амплитуда которых равна половине амплитуды исходной волны в возмущенной оболочке. Это указывает, что эволюция волн в рассматриваемых оболочках сопровождается обменом энергией между ними за счет наличия вязкой жидкости. Случай **б** показал, что уединенные волны взаимодействуют между собой как частицы, т.к. после взаимодействия они сохраняют свою форму и скорость, а дальнейшая эволюция происходит с постоянной скоростью и амплитудой для каждой из волн. Следовательно, вычислительные эксперименты показали, что в оболочках наблюдаются сверхзвуковые солитоны. Расчеты выявили отсутствие качественного влияния учета сжимаемости материала и инерции жидкости на эволюцию уединенных волн деформации в оболочках.

² Блинков Ю.А., Гердт В.П., Маринов К.Б. Дискретизация квазилинейных эволюционных уравнений методами компьютерной алгебры // Программирование. 2017. № 2. С. 28-34.

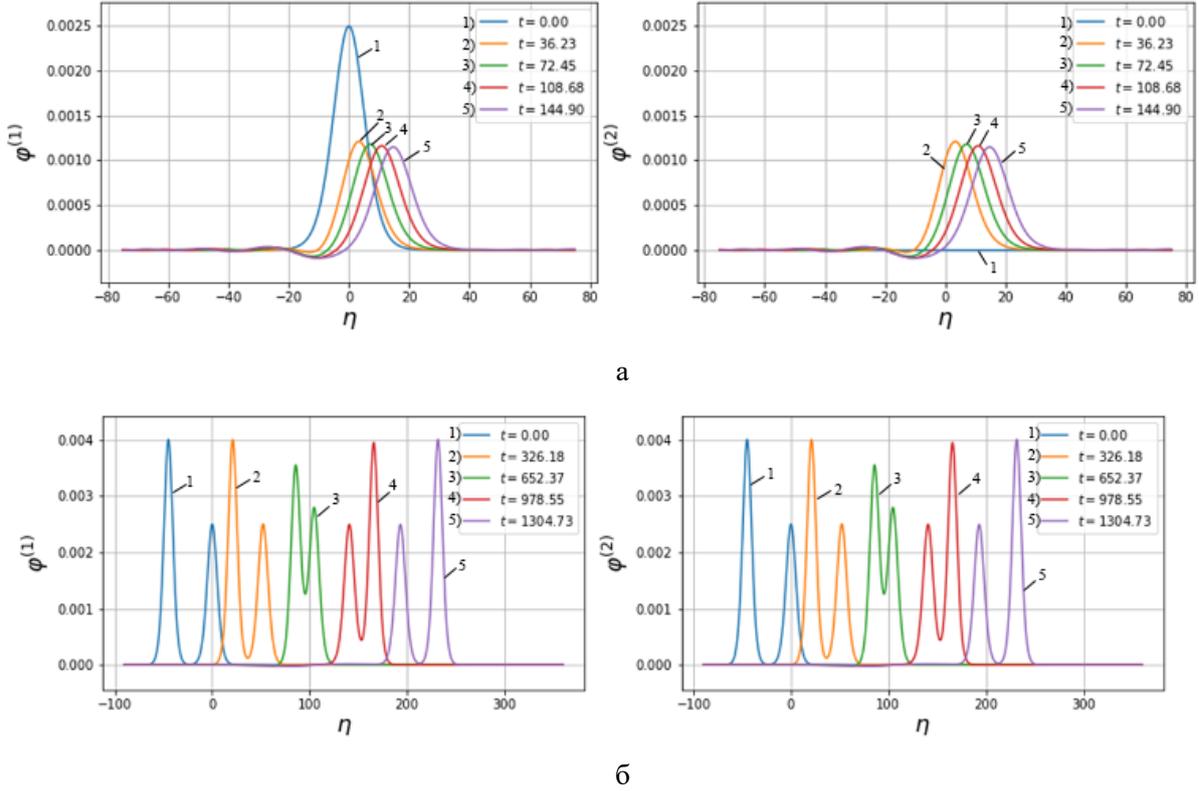


Рисунок 2. Численное моделирование эволюции волн в оболочках по (4)-(6)

Во второй главе разработана и исследована математическая модель эволюции волн продольной деформации в двух соосных цилиндрических оболочках, выполненных из материала с дробной физической нелинейностью в случае полного заполнения вязкой жидкостью внутренней оболочки и кольцевого зазора между ними. Постановка задачи гидроупругости оболочек базируется на основных положениях и допущениях первой главы и выведенных в ней уравнениях движения оболочек. Но дополнительно в правых частях уравнений внутренней оболочки учтены напряжения q_x^{cir} , q_n^{cir} вязкой жидкости, заполняющей ее, а также добавлены граничные условия прилипания жидкости к внутренней поверхности данной оболочки и условия для скоростей жидкости на оси симметрии.

Реализуя единый подход, основанный на асимптотическом анализе задачи гидроупругости аналогично первой главе, получена система двух эволюционных уравнений для безразмерного продольного перемещения оболочек ($i = 1, 2$)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{m}{E} \left(\frac{\sqrt{3}}{1 + \mu_0} \right)^{1/2} \frac{3}{4} \sqrt{1 - \mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2)^{1/4} \left| \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \right|^{1/2} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} + \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^4} = \\ & = - \frac{1}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{l}{\varepsilon^{3/2} \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \left[q_x^{(i)} + (i-1)q_x^{cir} - \mu_0 \varepsilon^{1/4} \frac{\partial((-1)^{i-1} q_x^{(i)} + (i-1)q_n^{cir})}{\partial \xi} \right]_{R^{(i)}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Подобно первой главе для определения $q_x^{(i)}$, q_n , q_x^{cir} , q_n^{cir} осуществлен переход к уравнениям тонких слоев жидкости кольцевого и кругового сечений с учетом инерции движения жидкости, которые решены методом итерации. В результате система (7) представлена в виде ($i = 1, 2$)

$$\varphi_r^{(i)} + 6 \left| \varphi_\eta^{(i)} \right|^{1/2} \varphi_\eta^{(i)} + \varphi_{\eta\eta\eta}^{(i)} + (-1)^i (\varphi_\eta^{(2)} - \varphi_\eta^{(1)} - \sigma_1 (\varphi_\eta^{(2)} - \varphi_\eta^{(1)})) + (i-1) (\sigma_2 \varphi_\eta^{(2)} - \sigma_3 \varphi_\eta^{(2)}) = 0. \quad (8)$$

В (7), (8) обозначения как в (2), (3), σ_2 , σ_3 определяются через параметры,

входящие в коэффициенты системы (7), а также плотность и кинематическую вязкость жидкостей, заполняющих кольцевой зазор и внутреннюю оболочку. Полагая $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, переходим к случаю главы 1, когда жидкостью заполнен только кольцевой зазор, т.е. к системе (3).

Коэффициент σ_1 оценивает инерцию жидкости между оболочками, а σ_3 – инерцию жидкости во внутренней оболочке (для ползущего течения $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$). Коэффициент σ_2 оценивает наличие вязкой жидкости во внутренней оболочке и сжимаемость материала, для несжимаемого материала ($\mu_0 = 1/2$) $\sigma_2 = 0$. Таким образом, при *ползущем движении жидкости*, т.е. исключении инерции жидкости ($\sigma_1 = \sigma_3 = 0$), и *несжимаемом материале оболочек* ($\mu_0 = 1/2$, т.е. при $\sigma_2 = 0$) системы (3) и (8) совпадают. Это говорит о том, что в указанном случае наличие вязкой жидкости во внутренней оболочке не влияет на эволюцию уединенных волн продольной деформации, следовательно, в оболочках будут иметь место выявленные в первой главе особенности волновых процессов, а именно *наблюдаются сверхзвуковые солитоны* (см. рисунок 2).

Указанное выше позволяет при реализации численного решения системы (8) выбирать в качестве начального условия (при $t = 0$) точное частное решение (6). Аналогично предыдущей главе на базе техники построения базисов Гребнера для представления (8) в дискретном виде получена следующая разностная схема ($i = 1, 2$):

$$\begin{aligned} & \frac{u^{(1)n+1}_j - u^{(1)n}_j}{\tau} + 4 \frac{(u^{(1)3/2n+1}_{j+1} - u^{(1)3/2n+1}_{j-1}) + (u^{(1)3/2n}_{j+1} - u^{(1)3/2n}_{j-1})}{4h} + \frac{(u^{(1)n+1}_{j+2} - 2u^{(1)n+1}_{j+1} + 2u^{(1)n+1}_{j-1} - u^{(1)n+1}_{j-2})}{4h^3} + \\ & + \frac{(u^{(i)n}_{j+2} - 2u^{(i)n}_{j+1} + 2u^{(i)n}_{j-1} - u^{(i)n}_{j-2})}{4h^3} + (-1)^{i+1} \left(\frac{u^{(1)n+1}_j + u^{(1)n}_j}{2} - \frac{u^{(2)n+1}_j + u^{(2)n}_j}{2} \right) - \\ & - \sigma_1 (-1)^{i+1} \left(\frac{(u^{(1)n+1}_{j+1} - u^{(1)n+1}_{j-1}) + (u^{(1)n}_{j+1} - u^{(1)n}_{j-1})}{4h} - \frac{(u^{(2)n+1}_{j+1} - u^{(2)n+1}_{j-1}) + (u^{(2)n}_{j+1} - u^{(2)n}_{j-1})}{4h} \right) + \\ & + (i-1)\sigma_2 \frac{u^{(2)n+1}_j + u^{(2)n}_j}{2} - (i-1)\sigma_3 \frac{(u^{(2)n+1}_{j+1} - u^{(2)n+1}_{j-1}) + (u^{(2)n}_{j+1} - u^{(2)n}_{j-1})}{4h} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь обозначения аналогичны (4), а для линеаризации степенных сеточных функций с показателем 3/2 на следующем временном слое применяем (5).

Используя (5), (6), (9), обобщена программа моделирования эволюции уединенных волн в оболочках. На рисунке 3 представлены расчеты эволюции уединенных волн (для $\sigma_1 = 0,2$; $\sigma_3 = 0,4$) при первоначальном возбуждении: **а**) одной волны одинаковой амплитуды в каждой из оболочек (материал оболочек несжимаем $\sigma_2 = 0$, в условиях (6) для $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$: $k = 0,2$); **б**) одной волны одинаковой амплитуды в каждой из оболочек (материал оболочек сжимаем $\sigma_2 = 0,2$, в условиях (6) для $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$: $k = 0,2$); **в**) волны только в одной оболочке (материал оболочек сжимаем $\sigma_2 = 0,2$, в (6) $k = 0,2$, а $\varphi^{(2)} = 0$). Вычислительные эксперименты показали, что при заполнении вязкой жидкостью внутренней оболочки и учете сжимаемости материала оболочек наблюдается движение волн влево, т.е. нелинейная добавка к линейной составляющей волнового процесса отрицательна, следовательно, *скорость волн дозвуковая*.

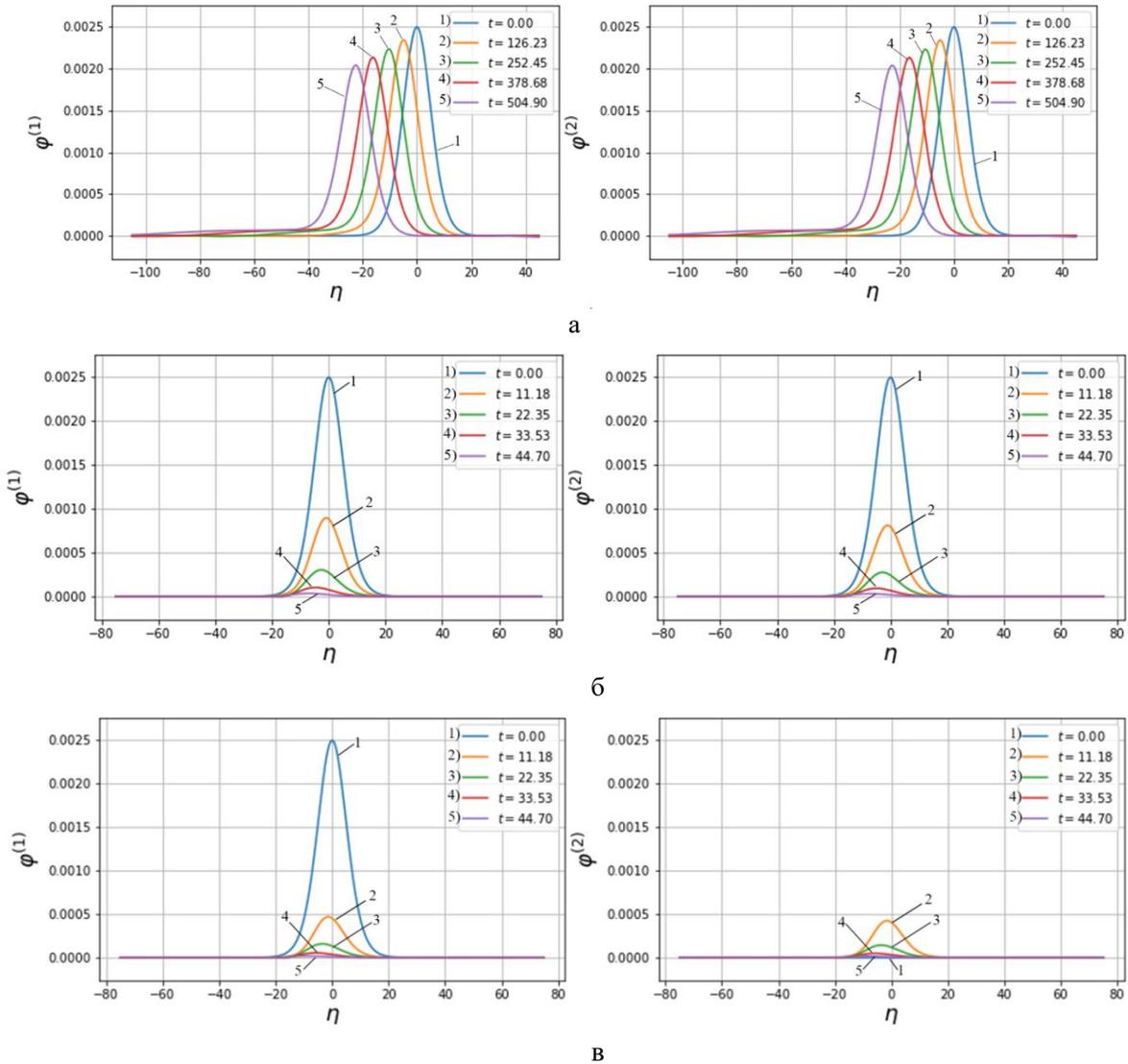


Рисунок 3. Численное моделирование эволюции волн в оболочках по (5), (6), (9)

Кроме того, во всех рассмотренных случаях при учете инерции жидкости наблюдается падение амплитуды и скорости уединенных волн деформации в оболочках. В случае, когда материал оболочек несжимаем, интенсивность затухания волнового процесса менее ярко выражена (рисунок 3а). Для случая начальных условий в виде уединенной волны деформации только во внешней оболочке с течением времени возбуждается волна во внутренней оболочке. Амплитуда первой волны падает, а второй вначале возрастает, а затем также снижается. Расчеты позволяют утверждать, что заполнение вязкой жидкостью внутренней оболочки ведет к *разрушению солитонов* продольной деформации, т.к. их амплитуда падает с течением времени. При несжимаемом материале оболочек ($\mu_0 = 1/2$, т.е. при $\sigma_2 = 0$) и исключении инерции жидкости ($\sigma_1 = \sigma_3 = 0$), т.е. ползущем ее движении, заполнение вязкой жидкостью внутренней оболочки не влияет на эволюцию уединенных волн продольной деформации, в этом случае наблюдаются *сверхзвуковые солитоны*.

В третьей главе разработана и исследована математическая модель эволюции волн продольной деформации в двух соосных цилиндрических оболочках, выполненных из материала с комбинированной дробной и квадратичной

жесткой физической нелинейностью в случае полного заполнения вязкой жидкостью внутренней оболочки и кольцевого зазора между ними.

Использованные ранее в первой и второй главах основные допущения дополнены положением, что физический закон с жесткой нелинейностью связи напряжений σ_x, σ_θ с деформациями $\varepsilon_x, \varepsilon_\theta$ и интенсивностью деформаций ε_u в материале оболочек аппроксимируется как комбинация квадратичной функции и степенной функции с дробным показателем:

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(i)} &= E(\mu_0 \varepsilon_\theta^{(i)} + \varepsilon_x^{(i)}) [1 + (\varepsilon_u^{(i)})^{1/2} m/E + \varepsilon_u^{(i)} m_2/E] / (1 - \mu_0^2), \\ \sigma_\theta^{(i)} &= E(\varepsilon_\theta^{(i)} + \mu_0 \varepsilon_x^{(i)}) [1 + (\varepsilon_u^{(i)})^{1/2} m/E + \varepsilon_u^{(i)} m_2/E] / (1 - \mu_0^2),\end{aligned}\quad (10)$$

$$\varepsilon_u^{(i)} = \frac{\sqrt{3}}{1 + \mu_0} (\mu_1 [(\varepsilon_\theta^{(i)})^2 + (\varepsilon_x^{(i)})^2] - \mu_2 \varepsilon_\theta^{(i)} \varepsilon_x^{(i)})^{1/2}, \quad \mu_1 = \frac{1}{3} \left[1 + \frac{\mu_0}{(1 - \mu_0)^2} \right], \quad \mu_2 = \frac{1}{3} \left[1 - \frac{2\mu_0}{(1 - \mu_0)^2} \right], \quad i = 1, 2.$$

Здесь m, m_2 – положительные константы, определяемые из опытов на растяжение-сжатие.

Используя (10), осуществлен вывод уравнений движения оболочек, которые необходимы для постановки задачи гидроупругости. Таким же образом, как во второй главе, сформулирована задача гидроупругости. Применяя предложенный в первой и второй главах подход, основанный на асимптотическом анализе сформулированной задачи гидроупругости, получена система двух эволюционных уравнений для безразмерного продольного перемещения оболочек, выполненных из материала с комбинированной дробной и квадратичной физической нелинейностью:

$$\begin{aligned}& \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{m}{E} \left(\frac{\sqrt{3}}{1 + \mu_0} \right)^{1/2} \frac{3}{4} \sqrt{1 - \mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2)^{1/4} \left| \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \right|^{1/2} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} + \\ & + \frac{m_2}{E} \varepsilon^{1/2} \frac{\sqrt{3}}{1 + \mu_0} \sqrt{1 - \mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2)^{1/2} \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} + \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^4} = \\ & = - \frac{1}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{l}{\varepsilon^{3/2} \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \left[q_x^{(i)} + (i-1) q_x^{cir} - \mu_0 \varepsilon^{1/4} \frac{\partial((-1)^{i-1} q_n + (i-1) q_n^{cir})}{\partial \xi} \right]_{R^{(i)}}, \quad (i = 1, 2).\end{aligned}\quad (11)$$

Каждое из уравнений в (11) – обобщение уравнения КдВШ. Заметим, что при исключении из данной системы q_x^{cir}, q_n^{cir} осуществляется переход к случаю двух соосных оболочек, содержащих жидкость только в кольцевом зазоре.

Используя найденное во второй главе решение уравнений динамики для тонких слоев жидкости кольцевого и кругового сечений с учетом инерции их движения, были определены $q_x^{(i)}, q_n, q_x^{cir}, q_n^{cir}$ и система (11) представлена в виде ($i = 1, 2$)

$$\varphi_t^{(i)} + 6\alpha_0 |\varphi^{(i)}|^{1/2} \varphi_\eta^{(i)} + 6\alpha_1 \varphi^{(i)} \varphi_\eta^{(i)} + \varphi_{\eta\eta\eta}^{(i)} + (-1)^i (\sigma_0 (\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}) - \sigma_1 (\varphi_\eta^{(2)} - \varphi_\eta^{(1)})) + (i-1) (\sigma_2 \varphi^{(2)} - \sigma_3 \varphi_\eta^{(2)}) = 0. \quad (12)$$

Здесь $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ определяются через параметры, входящие в коэффициенты системы (11), а также плотность и кинематическую вязкость жидкостей, заполняющих кольцевой зазор и внутреннюю оболочку. Полагая $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, переходим к случаю заполнения жидкостью только кольцевого зазора. Если материал оболочек несжимаем ($\mu_0 = 1/2$), то коэффициент $\sigma_2 = 0$. Параметры α_0, α_1 введены для перехода к частным случаям. Если положить $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1$, осуществляется переход к системе уравнений, обобщающих уравнение КдВ, при $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0$ получается система уравнений (7), обобщающих уравнение Шамеля, а при $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ – система

обобщенных уравнений КдВШ. Остальные обозначения, принятые в (12), аналогичны ранее указанным.

В подходе, подобном использованному в главах 1, 2 и основанному на технике базисов построения Гребнера, при помощи системы компьютерной алгебры Maple получена следующая разностная схема для (12) (при $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $i = 1, 2$):

$$\begin{aligned} & \frac{u^{(i)n+1}_j - u^{(i)n}_j}{\tau} + 4 \frac{(u^{(i)3/2n+1}_{j+1} - u^{(i)3/2n+1}_{j-1}) + (u^{(i)3/2n}_{j+1} - u^{(i)3/2n}_{j-1})}{4h} + 3 \frac{(u^{(i)2n+1}_{j+1} - u^{(i)2n+1}_{j-1}) + (u^{(i)2n}_{j+1} - u^{(i)2n}_{j-1})}{4h} + \\ & + \frac{(u^{(i)n+1}_{j+2} - 2u^{(i)n+1}_{j+1} + 2u^{(i)n+1}_{j-1} - u^{(i)n+1}_{j-2})}{4h^3} + \frac{(u^{(i)n}_{j+2} - 2u^{(i)n}_{j+1} + 2u^{(i)n}_{j-1} - u^{(i)n}_{j-2})}{4h^3} + (-1)^i \sigma \left(\frac{u^{(2)n+1}_j + u^{(2)n}_j}{2} - \right. \\ & \left. - \frac{u^{(1)n+1}_j + u^{(1)n}_j}{2} \right) - (-1)^i \sigma_1 \left(\frac{(u^{(2)n+1}_{j+1} - u^{(2)n+1}_{j-1}) + (u^{(2)n}_{j+1} - u^{(2)n}_{j-1})}{4h} - \frac{(u^{(1)n+1}_{j+1} - u^{(1)n+1}_{j-1}) + (u^{(1)n}_{j+1} - u^{(1)n}_{j-1})}{4h} \right) + \\ & + (i-1)\sigma_2 \frac{u^{(2)n+1}_j + u^{(2)n}_j}{2} - (i-1)\sigma_3 \frac{(u^{(2)n+1}_{j+1} - u^{(2)n+1}_{j-1}) + (u^{(2)n}_{j+1} - u^{(2)n}_{j-1})}{4h} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь обозначения аналогичны (4), линейаризации степенных сеточные функции с показателем $3/2$ на следующем временном слое по (5), а квадратичные функции на следующем временном слое линейаризуются следующим образом:

$$v_{k+1}^2 = v_{k+1}^2 - v_k^2 + v_k^2 = (v_{k+1} - v_k)(v_{k+1} + v_k) + v_k^2 \approx (v_{k+1} - v_k)2v_k + v_k^2 = 2v_k v_{k+1} - v_k^2. \quad (14)$$

За начальное условие при численных расчетах выбрано частное точное решение (12) в виде уединенной волны (при расчетах в начальный момент полагаем $t = 0$):

$$\varphi^{(1)}(t, \eta) = \varphi^{(2)}(t, \eta) = \frac{25}{4} k^4 \left(\alpha_0 + \sqrt{\alpha_0^2 + \frac{25}{8} k^2 \alpha_1 \operatorname{ch}(k(\eta - 4k^2 t))} \right)^{-2}, \quad (15)$$

где k – волновое число, которое является произвольным.

Используя (13)-(15), создана программа моделирования эволюции уединенных волн, с помощью которой проведена серия экспериментов, подобных указанным ранее. На рисунке 4 представлены расчеты эволюции уединенных волн (для $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\sigma_0 = 1$) при первоначальном возбуждении: **а)** волны в одной оболочке (в условиях (15) $k = 0,2$, а $\varphi^{(2)} = 0$ и нет жидкости во внутренней оболочке, т.е. $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, $\sigma_1 = 0,2$); **б)** двух волн разной амплитуды и смещенных друг от друга по координате η , в каждой из оболочек (в условиях (15) для $\varphi^{(1)}$: $k = 0,225$, смещение по η на -50 единиц, а для $\varphi^{(2)}$: $k = 0,2$; жидкости во внутренней оболочке нет, т.е. $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, $\sigma_1 = 0,2$); **в)** одной волны одинаковой амплитуды в каждой из оболочек ($\sigma_1 = 0,2$; $\sigma_3 = 0,4$, материал оболочек несжимаем $\sigma_2 = 0$, в условиях (15) для $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$: $k = 0,2$); **г)** одной волны одинаковой амплитуды в каждой из оболочек ($\sigma_1 = 0,2$; $\sigma_3 = 0,4$, материал оболочек сжимаем $\sigma_2 = 0,2$, в условиях (15) для $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$: $k = 0,2$); **д)** волны только в одной оболочке ($\sigma_1 = 0,2$; $\sigma_3 = 0,4$, материал оболочек сжимаем $\sigma_2 = 0,2$, в условиях (15) $k = 0,2$, а $\varphi^{(2)} = 0$).

Моделирование показало, что при совместном учете в физическом законе (10) дробной и квадратичной нелинейности влияние последней проявляется в виде меньшей амплитуды солитона деформации, что непосредственно следует из (15), если полагается одно и то же волновое число k . Результаты проведенных расчетов

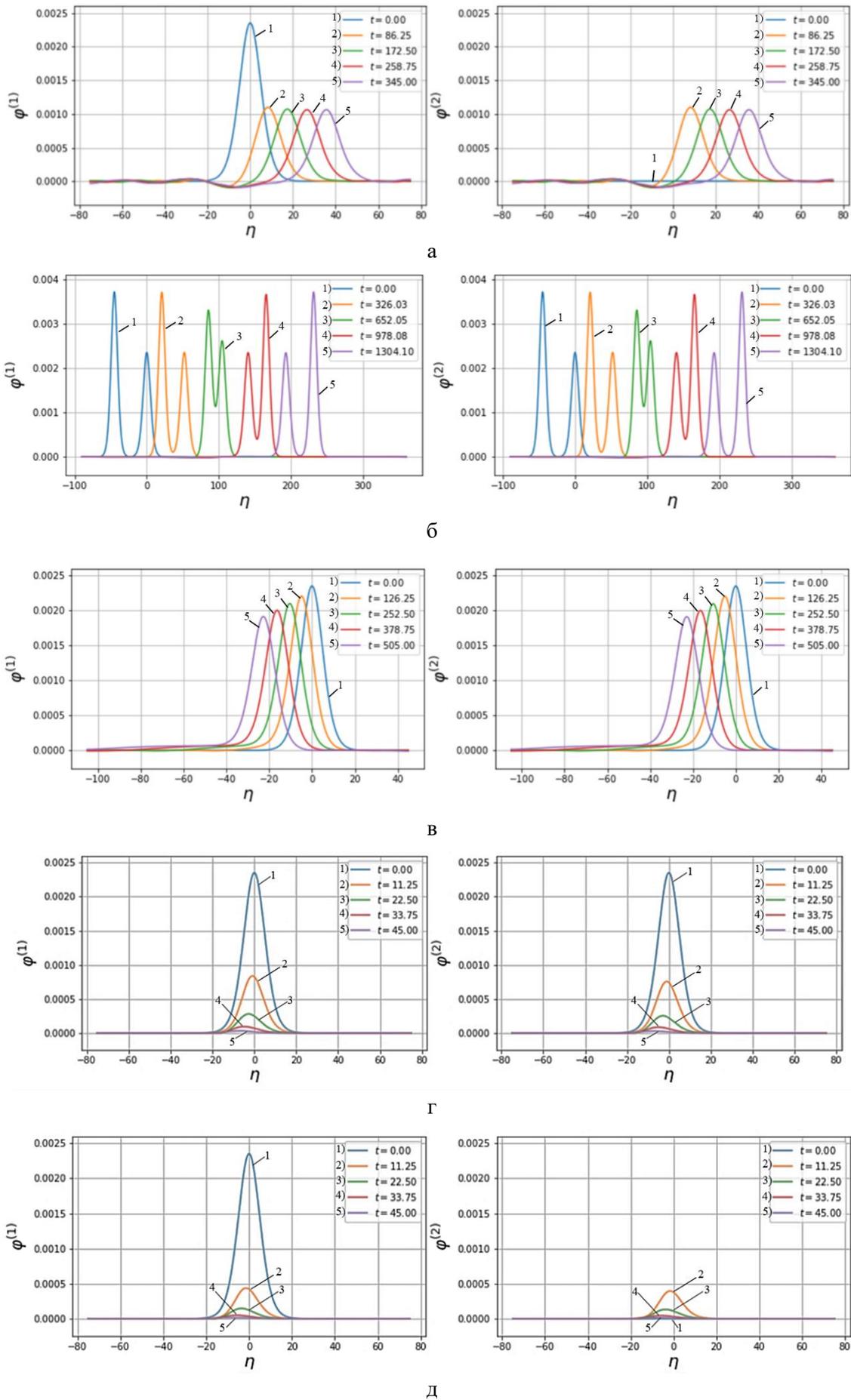


Рисунок 4. Численное моделирование эволюции волн в оболочках по (13)-(15)

качественно аналогичны результатам, представленным на рисунках 2 и 3. Поэтому особенности волнового процесса такие же, как отмеченные в обзоре глав 1 и 2.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ И КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Осуществлен вывод новых уравнений движения для цилиндрических оболочек типа Кирхгофа-Лява, выполненных их материала, имеющего физический закон с жесткой нелинейностью связи напряжений и деформаций в виде степенной функции с дробным показателем или комбинации квадратичной функции и степенной функции с дробным показателем. Данные уравнения использованы для формулировки новых математических моделей гидроупругости двух соосных оболочек, с указанным видом физической нелинейности, образующих стенки каналов кольцевого и кругового сечений, полностью заполненных вязкой жидкостью.

Предложен единый подход для построения новых математических моделей для исследования волновой динамики в рассматриваемых соосных цилиндрических оболочках в виде системы двух эволюционных уравнений, обобщающих уравнения Шамеля или КдВШ. Данный подход основан на асимптотическом анализе сформулированных в работе задач гидроупругости методом двухмасштабных разложений с последующим решением линеаризованных уравнений динамики тонких слоев жидкости кольцевого и кругового сечений с учетом инерции движения жидкости, методом итераций. В рамках новых моделей возможно изучение эволюции нелинейных продольных волн деформаций в стенках каналов кольцевого или кругового сечений, материал которых несжимаем или сжимаем, при ползущем течении вязкой жидкости, а также при учете инерционных свойств жидкости. Полученные новые системы эволюционных уравнений при отсутствии жидкости в оболочках распадаются на два независимых эволюционных уравнения Шамеля или КдВШ, которые в случае мягкой нелинейности совпадают с уравнениями, полученными в работах других авторов. Показано, что в частных случаях системы эволюционных уравнений имеют точные солитонные решения.

Представлены новые разностные схемы для перехода к дискретным аналогам системы двух нелинейных эволюционных уравнений, обобщающих уравнения Шамеля или КдВШ. Они получены с использованием системы компьютерной алгебры и на основе техники построения базисов Гребнера совместно с предложенным подходом линеаризации степенных сеточных функций с показателем $3/2$ и 2 для следующего временного слоя. Для проведения численного решения систем двух обобщенных уравнений Шамеля или КдВШ предложены начальные условия на основе точных частых решений данных систем. Указанное позволило разработать и верифицировать комплексы программ с последующей их госрегистрацией (свидетельства № 2024680108 и № 2024680139 от 26.08.2024) для проведения вычислительных экспериментов по изучению особенностей эволюции нелинейных уединенных волн продольной деформации в рассматриваемых оболочках.

Анализ результатов вычислительных экспериментов позволил прийти к следующим выводам об особенностях волновых процессов в оболочках:

– в соосных оболочках, содержащих вязкую жидкость в кольцевом зазоре между ними и выполненных из материала с дробной или комбинированной дроб-

ной и квадратичной физической нелинейностью, возможно наблюдение сверхзвуковых солитонов; для данного случая эволюция волн деформации в оболочках сопровождается обменом энергией между ними через вязкую жидкость, заполняющую кольцевой зазор, при этом установлено отсутствие влияния учета сжимаемости/несжимаемости материала и инерции жидкости на эволюционный процесс;

– в соосных оболочках, выполненных из материала с дробной или комбинированной дробной и квадратичной физической нелинейностью, в случае заполнения вязкой жидкостью внутренней оболочки и кольцевого зазора между ними при учете инерции движения жидкости возможно наблюдение солитонов с дозвуковой скоростью распространения; в данной механической системе наблюдается падение амплитуды и скорости уединенных волн деформации в оболочках, т.е. солитоны деформации разрушаются; при рассмотрении оболочек из несжимаемого материала выявлено менее интенсивное падение амплитуд солитонов по сравнению со случаем сжимаемого материала; в указанных случаях эволюция волн деформации также сопровождается процессом обмена энергией между внешней и внутренней оболочками;

– с другой стороны, при рассмотрении несжимаемого материала оболочек, учете наличия жидкости в кольцевом зазоре и ползущем движении жидкости во внутренней оболочке, т.е. исключении инерции движения жидкости, в оболочках наблюдаются сверхзвуковые солитоны, разрушения которых не происходит, т.е. наличие вязкой жидкости во внутренней оболочке в указанном случае не влияет на волновой процесс.

Результаты диссертации могут использоваться для изучения нелинейных волновых эффектов в трубопроводах кольцевого и кругового сечений, выполненных из новых композиционных материалов, имеющих дробную или комбинированную дробную и квадратичную физические нелинейности; служить теоретической основой для дальнейшего совершенствования неразрушающих волновых технологий диагностирования состояния трубопроводных систем, машин, приборов и технологического оборудования, содержащих соосные оболочки из физически нелинейных материалов, которые образуют коаксиальные каналы, заполненные вязкой жидкостью. Кроме того, они могут быть использованы в учебном процессе вузов в рамках дисциплин по математическому моделированию, методам математической физики, вычислительным методам и программированию.

Основные публикации по теме диссертации

Статьи в периодических изданиях SCOPUS, Web of Science и Белого списка

1. Попова Е.В. Уединённые волны деформации в коаксиальных оболочках с дробной и квадратичной физической нелинейностью, содержащих жидкость в кольцевом зазоре между ними / Л. И. Могилевич, Е. В. Попова // Известия вузов. Радиофизика. – 2023. – Т. 66, № 10. – С. 835-847. DOI 10.52452/00213462_2023_66_10_835. (Переводная версия: Popova E.V. Solitary Strain Waves in Coaxial Shells with Fractional and Quadratic Physical Nonlinearity and with a Fluid Contained in the Annular Intershell Gap / L. I. Mogilevich, E. V. Popova // Radiophysics and Quantum Electronics. – 2023. – Vol. 66, No. 10. – P. 756-767. – DOI 10.1007/s11141-024-10333-8.)

2. Popova E.V. Longitudinal waves in the walls of an annular channel filled with liquid and made of a material with fractional nonlinearity / L. I. Mogilevich, E. V. Popova // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. – 2023. – Vol. 31, No. 3. – P. 365-376. – DOI 10.18500/0869-6632-003040.

3. Попова Е.В. Эволюция уединенных гидроупругих волн деформации в двух коаксиальных цилиндрических оболочках с физической нелинейностью Шамеля / Ю. А. Блинков, Л. И. Могилевич, В. С. Попов, Е. В. Попова // Вычислительная механика сплошных сред. – 2023. – Т. 16, № 4. – С. 430-444. – DOI 10.7242/1999-6691/2023.16.4.36

4. Попова Е.В. Математическое моделирование эволюции продольных волн деформации в кольцевом канале с вязкой жидкостью, стенки которого имеют дробную физическую нелинейность / Л. И. Могилевич, Е. В. Попова, М. В. Попова // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия Естественные науки. – 2024. – № 1(112). – С. 4-27. – DOI 10.18698/1812-3368-2024-1-4-27.

5. Popova E.V. Solitary deformation waves in two coaxial shells made of material with combined nonlinearity and forming the walls of annular and circular cross-section channels filled with viscous fluid / L. I. Mogilevich, Yu. A. Blinkov, E. V. Popova, V. S. Popov // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. – 2024. – Vol. 32, No. 4. – P. 521-540. – DOI 10.18500/0869-6632-003115.

Перечень работ в журналах (категория K1) из перечня ВАК Минобрнауки России

6. Попова Е.В. Продольные волны в соосных упругих оболочках с учетом конструкционного демпфирования и с жидкостью внутри / Ю. А. Блинков, С. В. Иванов, Л. И. Могилевич, В.С. Попов, Е.В. Попова // Труды МАИ. – 2021. – № 117. – DOI 10.34759/trd-2021-117-04.

7. Попова Е.В. Моделирование волн деформации в стенках соосных кольцевого и кругового каналов с вязкой жидкостью, материал которых несжимаем и имеет дробную физическую нелинейность / Е.В. Попова, Т. В. Быкова, Л. И. Могилевич, Е. В. Евдокимова // Труды МАИ. – 2023. – № 129. – DOI 10.34759/trd-2023-129-05.

8. Попова Е.В. Моделирование эволюции уединенных волн деформации в двух соосных оболочках из несжимаемого материала с комбинированной нелинейностью, содержащих вязкую жидкость между ними и во внутренней оболочке / Е. В. Попова // Труды МАИ. – 2024. – № 135.

9. Попова Е.В. Нелинейные гидроупругие волны деформации в стенках кольцевого канала из материала с дробной и квадратичной физической нелинейностью, окруженного упругой средой Винклера / Е. В. Попова, Л. И. Могилевич, Е. В. Евдокимова, М. В. Попова // Труды МАИ. – 2024. – № 139.

Публикации в других научных изданиях

10. Попова Е.В. Проблема гидроупругости трех соосных оболочек, жестко заземленных на концах, взаимодействующих с вязкими жидкостями в условиях вибрации / Д. В. Кондратов, Ю. Н. Кондратова, Е. В. Попова // Компьютерные науки и информационные технологии : материалы Международной научной конференции, Саратов, 02–03 июля 2018 года. – Саратов: ИЦ «Наука», 2018. – С. 194-197.

11. Попова Е.В. Гидроупругость трех соосных оболочек, свободно опертых по концам, с двумя вязкими несжимаемыми жидкостями при вибрации / О. В. Елистратова, Д. В. Кондратов, Е. В. Попова, А. Ю. Ребрина // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXV Международного симпозиума имени А.Г. Горшкова, Вятчи, 18–22 марта 2019 года. – Вятчи: ООО «ТРП», 2019. – Т. 1. –С. 95-96.

12. Попова Е.В. Волны в соосных квадратично нелинейных оболочках, окруженных упругой средой, содержащих жидкость / Ю. А. Блинков, Е. В. Евдокимова, Л. И. Могилевич, Е. В. Попова // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ. – 2020. – Т. 5. – С. 41-44.

13. Попова Е.В. Моделирование нелинейных волн деформации в стенках кольцевого канала, заполненного вязкой жидкостью и окруженного упругой средой / Е. В. Евдокимова, Л. И. Могилевич, В. С. Попов, Е. В. Попова // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXVI Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова, Вятчи, 16–20 марта 2020 года. – Вятчи: ООО «ТРП», 2020. – Т. 2. – С. 52-53.

14. Попова Е.В. Численное исследование АЧХ прогибов трех соосных оболочек, взаимодействующих с двумя вязкими несжимаемыми жидкостями между ними / О. В. Елистратова, Д. В. Кондратов, Е. В. Попова, А. Ю. Ребрина // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXVI Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова, Вятчи, 16–20 марта 2020 года. – Вятчи: ООО «ТРП», 2020. – Т. 2. – С. 54-55.

15. Попова Е.В. Волны деформации в оболочке с дробной физической нелинейностью, заполненной жидкостью / Л. И. Могилевич, Е. В. Попова // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXVII Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова, Вятчи, 17–21 мая 2021 года. – Москва: ООО «ТРП», 2021. – Т. 2. – С. 65-66.

16. Попова Е.В. Исследование волновых явлений в цилиндрической оболочке с физической нелинейностью, заполненной вязкой жидкостью и окруженной упругой средой / Л. И. Могилевич, Е. В. Евдокимова, Е. В. Попова // Проблемы безопасности на транспорте : материалы XI Международной научно-практической конференции, Гомель, 25–26 ноября 2021 года / под общей редакцией Ю.И. Кулаженко. – Гомель: Учреждение образования «Белорусский государственный университет транспорта», 2021. – Т. 2. – С. 165-167.

17. Попова Е.В. Волны в упругой оболочке с дробной физической нелинейностью, окруженной упругой средой и содержащей вязкую несжимаемую жидкость / Л. И. Могилевич, Е. В. Попова // Проблемы безопасности на транспорте : материалы XII Международной научно-практической конференции, посвященной 160-летию Белорусской железной дороги: в 2 ч. – Гомель, 24–25 ноября 2022 года. – Гомель: Белорусский государственный университет транспорта, 2022. – С. 223-225.

18. Попова Е.В. Волны деформации в оболочке с нелинейностью Шамеля, заполненной жидкостью и окруженной упругой средой / Е. В. Попова // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: материалы XXVIII Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова, Кремёнки, 16–20 мая 2022 года. – Москва: ООО «ТРП», 2022. – Т. 2. – С. 109-110.

19. Попова Е.В. Уединенные волны деформации в стенках кольцевого канала с вязкой жидкостью, выполненного из несжимаемого материала с дробной и квадратичной физической нелинейностью / Л. И. Могилевич, Е. В. Попова, М. В. Попова // Инновационное развитие транспортного и строительного комплексов : материалы Международной научно-практической конференции, посвященной 70-летию БелИИЖТа – БелГУТа, Гомель, 16–17 ноября 2023 года. – Гомель: Учреждение образования «Белорусский государственный университет транспорта», 2023. – С. 118-120.

20. Попова Е.В. Нелинейные волны деформации в соосных цилиндрических оболочках с нелинейностью Шамеля, заполненных вязкой жидкостью / Л. И. Могилевич, Е. В. Попова // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXIX Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова, Кремёнки, 15–19 мая 2023 года. – Москва: ООО «ТРП», 2023. – С. 149-150.

21. Попова Е.В. Моделирование эволюции продольных волн деформации в стенках кольцевого канала с вязкой жидкостью, выполненного из несжимаемого материала с дробной физической нелинейностью / Е. В. Попова // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXIX Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова, Кремёнки, 15–19 мая 2023 года. – Москва: ООО «ТРИ», 2023. – С. 177-178.

22. Попова Е.В. Нелинейные волны деформации в стенках кольцевого канала из материала с комбинированной нелинейностью и заполненного вязкой несжимаемой жидкостью / Л. И. Могилевич, Е. В. Попова, М. В. Попова // Лазерные, плазменные исследования и технологии ЛаПлаз-2024 : сборник научных трудов X Международной конференции, Москва, 26–29 марта 2024 года. – Москва: Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», 2024. – С. 127.

23. Попова Е.В. Нелинейные волны в упругой оболочке с вязким газом внутри / Л. И. Могилевич, Е. В. Попова, А. И. Землянухин, В. С. Попов // Проблемы безопасности на транспорте : материалы XIII Международной научно-практической конференции, посвященной Году качества: в 2 ч. Гомель, 21–22 ноября 2024 года. – Гомель: Белорусский государственный университет транспорта, 2024. – С. 179-181.

24. Попова Е.В. Эволюция волн деформации в стенках кольцевого канала из материала с комбинированной нелинейностью / Л. И. Могилевич, Е. В. Евдокимова, Е. В. Попова, М. В. Попова // Математические методы в технологиях и технике. – 2024. – № 5. – С. 59-62.

Свидетельства о государственной регистрации программ

25. Попова Е.В., Могилевич Л.И. Расчет нелинейных уединенных волн в двух соосных цилиндрических оболочках, выполненных из материала с дробной и квадратичной физической нелинейностью, содержащих вязкую жидкость между ними и во внутренней оболочке: Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2024680139. Федеральная служба по интеллект. собственности 26.08.2024.

26. Попова Е.В., Могилевич Л.И. Расчет нелинейных уединенных волн в двух соосных цилиндрических оболочках, выполненных из материала с дробной физической нелинейностью, содержащих вязкую жидкость между ними и во внутренней оболочке: Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2024680108. Федеральная служба по интеллект. собственности 26.08.2024.

Подписано в печать 01.09.2025

Формат 60×84 1/16

Бум. офсет.

Усл.-печ. л. 1,0

Уч.-изд. л. 1,0

Тираж 100 экз.

Заказ 27

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.

410054, Саратов, Политехническая ул., 77

Отпечатано в Издательстве СГТУ имени Гагарина Ю.А.

410054, Саратов, Политехническая ул., 77

Тел.: 8 (8452) 99-87-39, e-mail: izdat@sstu.ru