

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Саратовский государственный технический университет имени
Гагарина Ю.А.»

Филиал федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
«Саратовский государственный технический университет имени
Гагарина Ю.А.» в г. Петровске



УТВЕРЖДАЮ

Директор филиала СГТУ
имени Гагарина Ю.А. в г.Петровске
Е.А.Бесшапошникова

«30» июня 2021 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по дисциплине
ОУД.09 Математика

специальности
15.02.15 «Технология металлообрабатывающего производства»

Методические указания рассмотрены
на заседании предметной (цикловой) комиссии
общеобразовательных, ОГСЭ и ЕН дисциплин,
профессиональных модулей специальностей
социально-экономического профиля
«14» июня 2021 года, протокол №13

Председатель ПЦК Мед /О.В.Медведева/

Петровск 2021

Пояснительная записка

Методические указания по выполнению практических работ подготовлены на основе рабочей программы учебной дисциплины «Математика», разработанной на основе ФГОС СПО по специальности 15.02.15 «Технология металлообрабатывающего производства» и соответствующих общих (ОК) компетенций:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие.

ОК 04. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами.

ОК 09. Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности.

Целью освоения учебной дисциплины «Математика» является:

- обеспечение сформированности представлений о социальных, культурных и исторических факторах становления математики;
- обеспечение сформированности логического, алгоритмического и математического мышления;
- обеспечение сформированности умений применять полученные знания при решении различных задач;
- обеспечение сформированности представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления.

При выполнении практических работ студент должен **уметь**:

Алгебра:

- выполнять арифметические действия над числами, сочетая устные и письменные приемы; находить приближенные значения величин и погрешности вычислений (абсолютная и относительная); сравнивать числовые выражения;
- находить значения корня, степени, логарифма, тригонометрических выражений на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства; пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах;
- выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами степеней, логарифмов, тригонометрических функций.

Функции и графики:

- вычислять значение функции по заданному значению аргумента при различных способах задания функции;

- определять основные свойства числовых функций, иллюстрировать их на графиках;
- строить графики изученных функций, иллюстрировать по графику свойства элементарных функций;
- использовать понятие функции для описания и анализа зависимостей величин.

Начала математического анализа:

- находить производные элементарных функций;
- использовать производную для изучения свойств функций и построения графиков;
- применять производную для проведения приближенных вычислений, решать задачи прикладного характера на нахождение наибольшего и наименьшего значения;
- вычислять в простейших случаях площади и объемы с использованием определенного интеграла.

Уравнения и неравенства:

- решать рациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения, сводящиеся к линейным и квадратным, а также аналогичные неравенства и системы;
- использовать графический метод решения уравнений и неравенств;
- изображать на координатной плоскости решения уравнений, неравенств и систем с двумя неизвестными;
- составлять и решать уравнения и неравенства, связывающие неизвестные величины в текстовых (в том числе прикладных) задачах.

Комбинаторика, статистика и теория вероятностей:

- решать простейшие комбинаторные задачи методом перебора, а также с использованием известных формул;
- вычислять в простейших случаях вероятности событий на основе подсчета числа исходов.

Геометрия:

- распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;
- описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, аргументировать свои суждения об этом расположении;
- анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве;
- изображать основные многогранники и круглые тела; выполнять чертежи по условиям задач;
- строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды;
- решать планиметрические и простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов);
- использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;

- проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач.

При выполнении практических и лабораторных работ студент должен **знать:**

- значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике; широту и в то же время ограниченность применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;
- значение практики и вопросов, возникающих в самой математике для формирования и развития математической науки; историю развития понятия числа, создания математического анализа, возникновения и развития геометрии;
- универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость во всех областях человеческой деятельности;
- вероятностный характер различных процессов окружающего мира.

Содержание практических занятий определено рабочей программой и тематическим планированием, соответствует теоретическому материалу изучаемых разделов учебной дисциплины.

Объём практических занятий по дисциплине определяется учебным планом по данной специальности.

Продолжительность практического занятия - 2 академических часа. Перед проведением практического занятия преподавателем организуется инструктаж, а по ее окончании – обсуждение итогов.

Комплект методических указаний по выполнению практических работ дисциплины «Математика» содержит 48 практических занятий.

Перечень практических работ по дисциплине «Математика»

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1.

Тема: Корни, степени и логарифмы.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2.

Тема: Корни, степени и логарифмы.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3.

Тема: Корни, степени и логарифмы.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4.

Тема: Основные понятия.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5.

Тема: Основные тригонометрические тождества.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6.

Тема: Основные тригонометрические тождества.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 7.

Тема: Преобразование простейших тригонометрических выражений.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8.

Тема: Преобразование простейших тригонометрических выражений.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 9.

Тема: Тригонометрические уравнения и неравенства.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 10.

Тема: Тригонометрические уравнения и неравенства.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 11.

Тема: Тригонометрические уравнения и неравенства.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 12.

Тема: Свойства функции.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 13.

Тема: Обратные функции.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 14.

Тема: Степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции. Обратные тригонометрические функции.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 15.

Тема: Степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции. Обратные тригонометрические функции.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 16.

Тема: Последовательности.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 17.

Тема: Последовательности.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 18.

Тема: Производная.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 19.

Тема: Производная.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 20.

Тема: Производная.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 21.

Тема: Производная.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 22.

Тема: Первообразная и интеграл.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 23.

Тема: Первообразная и интеграл.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 24.

Тема: Первообразная и интеграл.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 25.

Тема: Первообразная и интеграл.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 26.

Тема: Уравнения и системы уравнений.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 27.

Тема: Уравнения и системы уравнений.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 28.

Тема: Использование свойств и графиков функций при решении уравнений и неравенств.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 29.

Тема: Использование свойств и графиков функций при решении уравнений и неравенств.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 30.

Тема: Использование свойств и графиков функций при решении уравнений и неравенств.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 31.

Тема: Элементы комбинаторики.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 32.

Тема: Элементы комбинаторики.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 33.

Тема: Элементы комбинаторики.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 34.

Тема: Элементы теории вероятностей.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 35.

Тема: Элементы математической статистики.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 36.

Тема: Прямые и плоскости в пространстве.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 37.

Тема: Прямые и плоскости в пространстве.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 38.

Тема: Прямые и плоскости в пространстве.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 39.

Тема: Прямые и плоскости в пространстве.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 40.

Тема: Многогранники.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 41.

Тема: Многогранники.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 42.

Тема: Многогранники.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 43.

Тема: Измерения в геометрии.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 44.

Тема: Измерения в геометрии.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 45.

Тема: Координаты и векторы.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 46.

Тема: Координаты и векторы.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 47.

Тема: Координаты и векторы.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 48.

Тема: Координаты и векторы.

ИНСТРУКЦИИ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

Прежде чем приступить к выполнению заданий, внимательно прочитайте данные рекомендации. Практические работы включают в себя задания следующих видов:

Решение математических задач.

Одних вопросов и советов преподавателя студенту недостаточно для обучения решению задач. Нельзя забывать, что "умение решать задачи есть искусство, приобретаемое практикой".

Вопросы и советы студенту условно можно подразделить на четыре группы. Нужно помнить что вопросы, рекомендуемые для первого этапа, окажут помощь и на втором этапе, а рекомендуемые для второго этапа - на третьем и т. п. Дело в том, что этапы решения задачи не могут быть строго изолированы один от другого, между ними существует определенная связь, в их единстве заключается процесс решения задачи.

1. Вопросы и советы для усвоения содержания задачи (1-й этап).

Нельзя приступать к решению задачи, не уяснив четко, в чем заключается задание, т. е. не установив, каковы данные и искомые или посылки и заключения. **Первый совет:** не спешить начинать решать задачу. Этот совет не означает, что задачу надо решать как можно медленней. Он означает, что решению задачи должна предшествовать подготовка, заключающаяся в следующем:

- а) сначала следует ознакомиться с задачей, внимательно прочитав ее содержание. При этом схватывается общая ситуация, описанная в задаче;
- б) ознакомившись с задачей, необходимо вникнуть в ее содержание. При этом нужно следовать такому совету: выделить в задаче данные и искомые, а в задаче на доказательство - посылки и заключения.
- в) Если задача геометрическая или связана с геометрическими фигурами, полезно сделать чертеж к задаче и обозначить на чертеже данные и искомые г)
- В том случае, когда данные (или искомые) в задаче не обозначены, надо ввести подходящие обозначения. При решении текстовых задач алгебры и начал анализа вводят обозначения искомых или других переменных, принятых за искомые.
- д) Уже на первой стадии решения задачи, стадии понимания задания, полезно попытаться ответить на вопрос: "Возможно ли удовлетворить условию?" Не всегда сразу удастся ответить на этот вопрос, но иногда это можно сделать. Отвечая на вопрос: "Возможно ли удовлетворить условию?", полезно выяснить, однозначно ли сформулирована задача, не содержит ли она избыточных или противоречивых данных. Одновременно выясняется, достаточно ли данных для решения задачи.

2. Составление плана решения задачи (2-й этап). Составление плана решения задачи является главным шагом на пути ее решения. Правильно составленный план решения задачи почти гарантирует правильное ее решение.

Но составление плана может оказаться сложным и длительным процессом. Поэтому попробуйте ответить на вопросы которые помогут вам лучше и быстрее составить план решения задачи, "открыть" идею ее решения:

а) Известна ли вам какая-либо родственная задача? Аналогичная задача? Если такая или родственная задача известна, то составление плана решения задачи не будет затруднительным. Но далеко не всегда известна задача, родственная решаемой. В этом случае может помочь в составлении плана решения совет.

б) Подумайте, известна ли вам задача, к которой можно свести решаемую. Если такая задача известна вам, то путь составления плана решения данной задачи очевиден: свести решаемую задачу к решенной ранее. Может оказаться, что родственная задача неизвестна вам и вы не можете свести данную задачу к какой-либо известной. План же сразу составить не удастся.

Стоит воспользоваться советом: "Попробуйте сформулировать задачу иначе". Иными словами, попробуйте перефразировать задачу, не меняя ее математического содержания.

При переформулировании задачи пользуйтесь либо определениями данных в ней математических понятий (заменяют термины их определениями), либо их признаками (точнее сказать, достаточными условиями). Надо отметить, что способность учащегося переформулировать текст задачи является показателем понимания математического содержания задачи.

Переформулировка задачи это перевод ее на язык математики, т. е. язык алгебры, геометрии или анализа. Это, скорее, формализация задачи, "математизация" ее. К такому приему и приходится часто прибегать при решении многих текстовых задач.

г) Составляя план решения задачи, всегда следует задавать себе вопрос: "Все ли данные задачи использованы?" Выявление неучтенных данных задачи облегчает составление плана ее решения.

д) При составлении плана задачи иногда бывает полезно следовать совету: "Попробуйте преобразовать искомые или данные". Часто преобразование искомого или данных способствует более быстрому составлению плана решения. При этом искомые преобразуют так, чтобы они приблизились к данным, а данные - так, чтобы они приблизились к искомым. Так, при каждом случае тождественных преобразований данные преобразуются, постепенно приближаясь к результату (искомому). Аналогично уравнение, систему уравнений, неравенство или систему неравенств преобразуют в равносильные, чтобы найти их корни или множество решений.

е) Нередко случается так, что, вы все же не можете составить план ее решения. Тогда может помочь еще один совет: "Попробуйте решить лишь часть задачи", т. е. попробуйте сначала удовлетворить лишь части условий, с тем чтобы далее искать способ удовлетворить оставшимся условиям задачи.

ж) Нередко в составлении плана решения задачи помогает ответ на вопрос: "Для какого частного случая возможно достаточно быстро решить эту задачу?" Обнаружив такой частный случай, вы ставите перед собой новую цель - воспользоваться решением задачи в найденном частном случае для более общего (но, может быть, не самого общего) случая. Так можно поступить,

постепенно обобщая задачу до исходной, решаемой задачи. Предполагаемый вариант рассуждений - явное применение полной индукции. Итак, совет: "Рассмотрите частные случаи задачной ситуации, решите задачу для какого-нибудь частного случая, примените индуктивные рассуждения".

3. Реализация плана решения задачи (3-й этап). План указывает лишь общий контур решения задачи. При реализации плана решающий задачи рассматриваются все детали, которые вписываются в этот контур. Эти детали надо рассматривать тщательно и терпеливо. Но при этом (решающему задачу) полезно следовать некоторым советам:

а) Проверяйте каждый свой шаг, убеждайтесь, что он совершен правильно. Иными словами, нужно доказывать правильность каждого шага ссылками на соответствующие, известные ранее математические факты, предложения.

б) При реализации плана поможет и совет: "Замените термины и символы их определениями". Так, термин "параллелограмм" заменяется его определением: "Четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны", термин "предел числовой последовательности" для доказательства, например, того предложения, что предел суммы двух последовательностей, имеющих пределы, равен сумме пределов этих последовательностей, можно заменить, и вполне успешно, его определением.

в) При решении некоторых задач помогает совет: "Воспользуйтесь свойствами данных в условии объектов".

4. Анализ и проверка правильности решения задачи (4-й этап). Даже очень хорошие студенты, получив ответ и тщательно изложив ход решения, считают задачу решенной. А ведь получение результата не означает еще, что задача решена правильно. Тем более не означает, что для решения выбран лучший, наиболее удачный, изящный, если можно так выразиться, вариант. По В. М. Брадису, задачу можно считать решенной, если найденное решение:

- безошибочно,
- обоснованно,
- имеет исчерпывающий характер.

Поэтому анализ решения задачи, проверка решения и достоверности результата должны быть этапом решения задачи. Итак, два совета: "Проверьте результат", "Проверьте ход решения". Проверка результата может производиться различными способами. Проверая правильность хода решения, мы тем самым убеждаемся и в правильности результата. Значит, надо выполнить совет: "Проверьте все узловые пункты решения", еще раз убедитесь в истинности проведенных рассуждений.

Второй способ проверки результата заключается в получении того же результата применением другого метода решения задачи, поэтому полезно всегда задавать решающему вопрос: "Нельзя ли тот же результат получить иначе?" Иными словами, стоит последовать совету: "Решите задачу другим способом". Если при решении задачи другим способом получен тот же результат, что и в первом случае, задачу можно считать решенной правильно. К тому же получение различных вариантов решения одной и той же задачи имеет важное обучающее значение.

Выполнение контрольных работ.

1. При подготовке к любой контрольной работе рекомендуется сначала внимательно разобраться с теоретическим материалом по учебнику, затем закрепить свои знания, решая задачи.
2. Подготовиться к работе означает: вы внимательно просматриваете тексты задач и прикидываете, какие из предложенных задач вам по силам и выполняете их в первую очередь.
3. Если вы переоценили свои силы — взяли трудную задачу — и не решили, то не отчаивайтесь. Дома в спокойной обстановке разберитесь, в чем причина вашей неудачи, и решите эту же задачу.
4. Если у вас пока нет большой любви к определенной дисциплине, и вас нервируют трудные задачи, то не расстраивайтесь: для начала выберите задачи начального уровня. Решая самые простые задачи, вы постепенно приобретаете уверенность в своих силах.
5. Если вы успешно решили легкую задачу на уроке, то попросите у преподавателя более трудную задачу. Если на уроке не успели, то обратитесь к преподавателю с просьбой дать вам возможность решить более трудную задачу во внеурочное время.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1

Тема: «Корни, степени и логарифмы»

Цель: закрепить умение построения графика показательной функции, научиться решать показательные уравнения и неравенства.

Оборудование: справочные пособия.

Справочный материал

Решение показательных уравнений часто сводится к решению уравнения $a^x = a^b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, x — неизвестное. Это уравнение решается с помощью свойства степени: степени с одинаковым основанием $a > 0$, $a \neq 1$ равны тогда и только тогда, когда равны их показатели.

Пример 1: Решить уравнение $4 \cdot 2^x = 1$.

Решение: Запишем уравнение в виде $2^{x+2} = 2^0$, откуда $x + 2 = 0$, $x = -2$.

Ответ: $x = -2$.

Пример 2: Решить уравнение $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 25$.

Решение: Вынося в левой части за скобки общий множитель 3^{x-2} , получаем $3^{x-2}(3^3 - 2) = 25$, $3^{x-2} \cdot 25 = 25$, откуда $3^{x-2} = 1$, $x - 2 = 0$, $x = 2$.

Ответ: $x = 2$.

Пример 3: Решить уравнение $3^x = 7^x$.

Решение: Так как $7^x \neq 0$, то уравнение можно записать в виде $\frac{3^x}{7^x} = 1$, откуда

$$\left(\frac{3}{7}\right)^x = 1, x = 0.$$

Ответ: $x = 0$.

Пример 4: Решить уравнение $9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$.

Решение: Заменой $3^x = t$ данное уравнение сводится к квадратному уравнению $t^2 - 4t - 45 = 0$. Решая это уравнение, находим его корни: $t_1 = 9, t_2 = -5$, откуда $3^x = 9, 3^x = -5$. Уравнение $3^x = 9$ имеет корень $x = 2$, а уравнение $3^x = -5$ не имеет корней, так как показательная функция не может принимать отрицательные значения.

Ответ: $x = 2$.

Решение показательных неравенств часто сводится к решению неравенств $a^x > a^b$ или $a^x < a^b$.

Эти неравенства решаются с помощью свойства возрастания или убывания показательной функции: для возрастающей функции большему значению функции соответствует большее значение аргумента, а для убывающей функции большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента.

Пример 1: Решить неравенство $3^x < 81$.

Решение: Запишем неравенство в виде $3^x < 3^4$. Так как $3 > 1$, то функция $y = 3^x$ является возрастающей. Поэтому решениями неравенства $3^x < 81$ являются числа $x < 4$.

Ответ: $x < 4$.

Пример 2: Решить неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \sqrt{8}$.

Решение: Запишем неравенство в виде

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2^{\frac{3}{2}}, \text{ или } \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Так как $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ - убывающая функция, то $x < -\frac{3}{2}$.

Ответ: $x < -\frac{3}{2}$.

Пример 3: Решить неравенство $16^x + 4^x - 2 > 0$.

Решение: Обозначим $4^x = t$, тогда получим квадратное неравенство $t^2 + t - 2 > 0$. Это неравенство выполняется при $t < -2$ и при $t > 1$. Так как $t = 4^x$, то получим два неравенства $4^x < -2, 4^x > 1$. Первое неравенство не имеет решений, так как

$4^x > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Второе неравенство можно записать в виде $4^x > 4^0$, откуда $x > 0$.

Ответ: $x > 0$.

Содержание работы

Вариант 1

1. Постройте график функций и перечислите их свойства:

а) $y = 0,4^x + 1$;

б) $y = 2^{x-3}$;

в) $y = 7^{x-1} - 3$.

2. Решите уравнения:

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4x}$;

б) $4^{x+3} + 4^x = 260$;

в) $5^{x+2} - 5^x = 120$;

г) $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$;

д) $36^x + 3 \cdot 6^x - 4 = 0$.

Вариант 2

1. Постройте график функций и перечислите их свойства.

а) $y = 0.5^x - 1$;

б) $y = 3^{x-4}$;

в) $y = 5^{x+2} - 1$.

2. Решите уравнения:

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2-12} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10x}$;

б) $3^{x+3} + 3^x = 84$;

в) $2^{x+5} - 2^x = 60$;

г) $144^x - 10 \cdot 12^x + 21 = 0$;

д) $4^x + 4 \cdot 2^x - 5 = 0$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2

Тема: «Корни, степени и логарифмы»

Цель: научиться решать логарифмические уравнения и неравенства.

Оборудование: справочные пособия.

Справочный материал

Логарифмом числа b по основанию a , где $a > 0$, $a \neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести число a , чтобы получить b , т.е.

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b.$$

Например, $\log_2 8 = 3$, так как $2^3 = 8$; $\log_3 \frac{1}{9} = -2$, так как $3^{-2} = \frac{1}{9}$.

При выполнении преобразований выражений, содержащих логарифмы, при вычислениях и при решении уравнений часто используются различные свойства логарифмов. Рассмотрим основные из них.

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, r – любое действительное число. Тогда справедливы формулы:

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c,$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c,$$

$$\log_a b^r = r \log_a b,$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \text{ (формула перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию).}$$

В математике и ее приложениях часто встречается логарифмическая функция $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$. Область определения данной функции – множество всех положительных чисел, т.е. $x > 0$.

Пример 1: Решить уравнение

$$\log_2 (x + 1) + \log_2 (x + 3) = 3. \quad (1)$$

Решение: По свойству логарифма верно равенство

$$\log_2 ((x + 1)(x + 3)) = 3. \quad (2)$$

Из этого равенства по определению логарифма получаем

$$((x + 1)(x + 3)) = 8. \quad (3)$$

$$x^2 + 4x + 3 = 8, \text{ т.е. } x^2 + 4x - 5 = 0, \text{ откуда } x_1 = 1, x_2 = -5.$$

Так как уравнение (3) является следствием исходного уравнения, то необходима проверка. Проверим, являются ли числа 1 и -5 корнями уравнения (1). Подставляя в левую часть исходного уравнения $x = 1$, получаем $\log_2 (1 + 1) + \log_2 (1 + 3) = \log_2 2 + \log_2 4 = 1 + 2 = 3$, т.е. $x = 1$ – корень уравнения (1).

При $x = -5$ числа $x + 1$ и $x + 3$ отрицательны, и поэтому левая часть уравнения (1) не имеет смысла, т.е. $x = -5$ не является корнем этого уравнения.

Ответ: $x = 1$.

Пример 2: Решить уравнение

$$\log_4 (2x - 1) \cdot \log_4 x = 2 \log_4 (2x - 1).$$

Решение: Преобразуем данное уравнение:

$$\log_4 (2x - 1) \cdot \log_4 x - 2 \log_4 (2x - 1) = 0,$$

$$\log_4 (2x - 1) \cdot (\log_4 x - 2) = 0.$$

Приравнивая каждый из множителей левой части уравнения к нулю, получаем:

$$1) \log_4 (2x - 1) = 0, \text{ откуда } 2x - 1 = 1, x_1 = 1;$$

$$2) \log_4 x - 2 = 0, \text{ откуда } \log_4 x = 2, x_2 = 16.$$

Проверка показывает, что оба значения x являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = 16$.

Пример 3: Решить уравнение $\log_3 x + \log_x 3 = \frac{5}{2}$.

Решение: Уравнение имеет смысл, если $x > 0$, $x \neq 1$.

Пусть $t = \log_3 x$, тогда $\log_x 3 = \frac{1}{t}$ и уравнение примет вид $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$, или $2t^2 - 5t + 2 = 0$, откуда $t_1 = 2$, $t_2 = \frac{1}{2}$. Если $t = 2$, то $\log_3 x = 2$, $x = 9$. Если $t = \frac{1}{2}$, то $\log_3 x = \frac{1}{2}$, $x = \sqrt{3}$.

Найденные значения x удовлетворяют условиям $x > 0$ и $x \neq 1$ и являются корнями данного уравнения.

Ответ: $x_1 = 9$, $x_2 = \sqrt{3}$.

Приведем примеры решения логарифмических неравенств. Обычный способ таких неравенств заключается в переходе от них к более простому неравенству или системе неравенств, имеющей то же самое множество решений, т.е. к равносильному неравенству или к равносильной системе неравенств.

Пример: Решить неравенство $\lg(x + 1) \leq 2$.

Решение: Правая часть данного неравенства имеет смысл при всех значениях x , а левая часть – при $x + 1 > 0$, откуда $x > -1$, т.е. $x > -1$ – область определения исходного неравенства.

Запишем исходное неравенство в виде:

$$\lg(x + 1) \leq \lg 100.$$

Так как $10 > 1$, то $x + 1 \leq 100$, откуда $x \leq 99$. Учитывая область определения исходного неравенства, получаем $-1 < x \leq 99$.

Содержание работы

1. Решить уравнения:

- 1) $\log_2(x - 5) + \log_2(x + 2) = 3$;
- 2) $\lg(x - 1) + \lg(x + 1) = 0$;
- 3) $\lg(3x - 1) - \lg(x + 5) = \lg 5$;
- 4) $\log_3(5x + 3) = \log_3(7x + 5)$.

2. Решить уравнения:

- 1) $\log_5 x^2 = 0$;
- 2) $\log_4 x^2 = 3$;
- 3) $\lg x^4 + \lg(4x) = 2 + \lg x^3$;
- 4) $\log_3 x^2 - \log_3 \frac{x}{x+6} = 3$;
- 5) $\log_2 x - 2\log_x 2 = -1$;
- 6) $\log_3 x + 2\log_x 3 = 3$.

3. Найти область определения функции:

- 1) $y = \lg(3x - 2)$;
- 2) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2)$;
- 3) $y = \log_2(7 - 5x)$;

- 4) $y = \log_7 (4 - x^2)$;
 5) $y = \log_5 (x^2 - 4x + 3)$;
 6) $y = \sqrt{\lg x + \lg (x + 2)}$;
 7) $y = \frac{3x+2}{1-x}$.

4. Решить неравенство:

- 1) $\log_3 (x + 2) < 3$;
 2) $\log_8 (4 - 2x) \geq 2$;
 3) $\log_3 (x + 1) < -2$;
 4) $\log_{\frac{1}{3}} (x - 1) \geq -2$;
 5) $\lg x > \lg 8 + 1$;
 6) $\lg x > 2 - \lg 4$;
 7) $\log_{\frac{1}{5}} (3x - 5) > \log_{\frac{1}{5}} (x + 1)$;
 8) $\log_{15} (x - 3) + \log_{15} (x - 5) < 1$;
 9) $\log_6 (x^2 - 3x + 2) \geq 1$;
 10) $\log_3 (x^2 + 2x) > 1$;
 11) $\lg (x^2 - 8x + 13) > 0$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3

Тема: «Корни, степени и логарифмы»

Цель: Проверить и оценить знания учащихся по изученному материалу.

Оборудование: справочные пособия.

Содержание работы

Вариант 1

1. Решите уравнение: $\sqrt{x+3} = \sqrt{5-x}$;
 2. Решите уравнение: $2^{-x} = 128$;
 3. Решите уравнение: $2 \cdot 3^{x+3} + 7 \cdot 3^{x-2} = 493$;
 4. Решите неравенство: $4^{2x-9} < 4^{9x-5}$;
 5. Вычислите: $\log_2 16 + \log_2 2$;
 6. Вычислите: $\log_3 \log_2 8 - 8^{\log_8 2}$;
 7. Определите x , если $\log_2 (x-1) = 3$;
 8. Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{2}} (1 - 0,5x) \leq -1$;
 9. Решите уравнение: $4^x - 5 \cdot 2^x - 24 = 0$.

Вариант 2

1. Решите уравнение: $\sqrt{2x+3} = \sqrt{12-x}$;

2. Решите уравнение: $3^x = \frac{1}{81}$;
3. Решите уравнение: $3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x = 39$;
4. Решите неравенство: $2^{3x-4} > 0,5^{4-2x}$;
5. Вычислите: $\log_{12} 36 + \log_{12} 4$;
6. Вычислите: $\log_2 \log_3 9 - 8^{\log_8 2}$;
7. Определите x , если $\log_8 (5x-1) = 2$.
8. Решите неравенство: $\log_{0,25} (2 - 0,5x) > -1$;
9. Решите уравнение: $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4

Тема: «Основные понятия»

Цель: научиться вычислять значения тригонометрических углов; изучить основные понятия и формулы тригонометрии.

Оборудование: справочные пособия.

Справочный материал

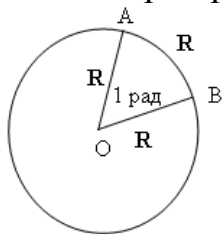
Расширение понятия угла

В тригонометрии мы рассматриваем угол как фигуру, полученную поворотом луча вокруг его начальной точки. Луч может вращаться против часовой стрелки – тогда получаем положительные углы. Если луч вращается по часовой стрелке, то угол считается отрицательным. Таким образом мы можем получить углы любой величины. При этом разные по величине углы могут иметь одинаковые начальные и конечные стороны.

Радианная и градусная мера угла

Углы измеряются в градусах и радианах. Один градус (обозначение 1°) – это поворот луча на $1/360$ часть одного полного оборота. Таким образом, полный оборот луча равен 360° . Один градус состоит из 60 минут (их обозначение $1'$); одна минута – соответственно из 60 секунд (обозначаются $1''$).

Угол в 1 радиан, это центральный угол, который опирается на дугу окружности, длина которой равна длине радиуса.



Чтобы найти радианную меру угла надо найти отношение длины дуги, проведенной произвольным радиусом и заключённой между сторонами этого угла, к радиусу дуги.

Справедливы формулы зависимости между радианной и градусной мерой.

$$1 \text{ рад} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57^\circ, 2958 \approx 57^\circ 17' 45''.$$

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360^\circ} \approx 0.017453 \text{ рад}.$$

Таблица значений наиболее часто встречающихся углов в градусах и радианах:

Углы в градусах	$\frac{\pi}{\text{градус}}$
30°	$\frac{\pi}{6}$
45°	$\frac{\pi}{4}$
60°	$\frac{\pi}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$
180°	π
270°	$\frac{3\pi}{2}$
360°	2π

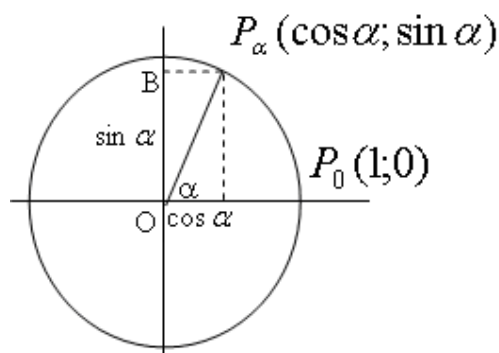
Синус, косинус, тангенс и котангенс

Рассмотрим на координатной плоскости окружность единичного радиуса с центром O в начале координат. Повернем точку $P_0(1;0)$ на угол α .

Получим точку P_α .

Косинусом угла α называется абсцисса x точки P_α . Синусом угла α называется ордината y точки P_α . При этом тангенсом угла α называется отношение синуса этого угла к косинусу, а котангенсом угла α называется отношение косинуса этого угла к его синусу.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$



Вычисление значений тригонометрических функций.

Используя определения тригонометрических функций можно найти значения тригонометрических функций часто используемых в тригонометрии углов.

Содержание работы

1. Вычислите:

а) $\sqrt{3}\sin 60^0 + \cos 60^0 \sin 30^0 - \operatorname{tg} 45^0 \operatorname{ctg} 135^0 + \operatorname{ctg} 90^0$;

б) $\cos \frac{\pi}{6} - \sqrt{2}\sin \frac{\pi}{4} + \sqrt{3}\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$.

в) $\sqrt{2}\sin 45^0 - \cos 30^0 \sin 60^0 + \operatorname{ctg} 45^0 \operatorname{tg} 135^0 - \operatorname{tg} 0^0$;

г) $\sin \frac{\pi}{3} - \sqrt{2}\cos \frac{\pi}{4} - \sqrt{3}\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}$.

2. Упростите выражение:

а) $\frac{(1-\cos \alpha)(1+\cos \alpha)}{\sin \alpha}$;

б) $\frac{(1-\sin \alpha)(1+\sin \alpha)}{\cos \alpha}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5

Тема: «Основные тригонометрические тождества»

Цель: научиться вычислять основные тригонометрические тождества.

Оборудование: справочные пособия.

Справочный материал

Тригонометрические тождества — математические выражения для тригонометрических функций, которые выполняются при всех значениях аргумента (из общей области определения).

Тригонометрические формулы

Основные тригонометрические тождества

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$
- $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha \div \cos \alpha$
- $\operatorname{ctg} \alpha = \cos \alpha \div \sin \alpha$
- $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 \div \cos^2 \alpha$
- $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1 \div \sin^2 \alpha$

Формулы сложения

- $\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$
- $\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha$
- $\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$
- $\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$
- $\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \div (1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta)$
- $\operatorname{tg} (\alpha - \beta) = (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) \div (1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta)$
- $\operatorname{ctg} (\alpha + \beta) = (\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1) \div (\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha)$
- $\operatorname{ctg} (\alpha - \beta) = (\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1) \div (\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha)$

Формулы двойного угла

- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
- $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$

- $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$
- $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$
- $\operatorname{tg} 2\alpha = (2\operatorname{tg} \alpha) \div (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)$
- $\operatorname{ctg} 2\alpha = (\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1) \div (2\operatorname{ctg} \alpha)$

Формулы тройного угла

- $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$
- $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$
- $\operatorname{tg} 3\alpha = (3\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha) \div (1 - 3\operatorname{tg}^2 \alpha)$
- $\operatorname{ctg} 3\alpha = (3\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg}^3 \alpha) \div (1 - 3\operatorname{ctg}^2 \alpha)$

Формулы понижения степени

- $\sin^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha) \div 2$
- $\sin^3 \alpha = (3\sin \alpha - \sin 3\alpha) \div 4$
- $\cos^2 \alpha = (1 + \cos 2\alpha) \div 2$
- $\cos^3 \alpha = (3\cos \alpha + \cos 3\alpha) \div 4$
- $\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = (1 - \cos 4\alpha) \div 8$
- $\sin^3 \alpha \cdot \cos^3 \alpha = (3\sin 2\alpha - \sin 6\alpha) \div 32$

Переход от произведения к сумме

- $\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta))$
- $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta))$
- $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta))$

Переход от суммы к произведению

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

Содержание работы

1. Вычислите:

- $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 2\sin \alpha \cos \alpha$;
- $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$, если $\sin \alpha \cos \alpha = 0,4$;
- $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 3$.
- $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + 2\sin \alpha \cos \alpha$;
- $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$, если $\sin \alpha \cos \alpha = 0,2$;
- $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = -3$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6

Тема: «Основные тригонометрические тождества»

Цель: научиться вычислять основные тригонометрические тождества.

Оборудование: справочные пособия.

Содержание работы

1. Вычислите: $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} - \arccos 0 - \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{3}}{\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}}$.

2. Вычислите: $\arcsin 0 - \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}}{\operatorname{arctg} \sqrt{3}}$.

3. Докажите тождество: $\frac{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{\sin 4\alpha + 2\sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$.

4. Докажите тождество: $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)(1 - \cos 4\alpha) = 4\sin 2\alpha$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 7

Тема: «Преобразование простейших тригонометрических выражений»

Цель: научиться преобразовывать тригонометрические выражения, используя тригонометрические формулы.

Оборудование: справочные пособия.

Справочный материал

Основные тригонометрические формулы:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ – основное тригонометрическое тождество;

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}; \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1;$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}; \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x};$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Содержание работы

1. Доказать тождество:

1) $(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha) = \sin 2\alpha$;

2) $(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha) = \cos^2 \alpha$;

3) $\frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$; 4) $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha$;

5) $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \sin^2 \alpha = 1$; 6) $\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} + \cos^2 \alpha = 1$.

2. Упростить выражение:

$$1) \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha - 2 \sin \alpha; \quad 2) \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$3) \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha}; \quad 4) \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin \alpha}.$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8

Тема: «Преобразование простейших тригонометрических выражений»

Цель: научиться преобразовывать тригонометрические выражения, используя тригонометрические формулы.

Оборудование: справочные пособия.

Содержание работы

1. Упростить выражение и найти его значение:

- 1) $(\sin^2 \alpha - 1)/(1 - \cos^2 \alpha)$ при $\alpha = \pi/4$;
- 2) $\cos^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \sin^2 \alpha$ при $\alpha = \pi/6$;
- 3) $\cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \alpha + \sin^2 \alpha$ при $\alpha = \pi/3$.

2. Доказать тождество:

- 1) $(1 - \sin^2 \alpha)(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = 1$;
- 2) $\sin^2 \alpha(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 9

Тема: «Тригонометрические уравнения и неравенства»

Цель: научиться решать тригонометрические уравнения.

Оборудование: справочные пособия.

Справочный материал

Для решения любого тригонометрического уравнения его необходимо свести к одному из четырех простейших.

1) уравнение $\cos t = a$;

решение: $t = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Частные случаи:

$\cos t = 1 \Rightarrow t = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

$\cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;

$\cos t = -1 \Rightarrow t = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

При $|a| > 1$ уравнение $\cos t = a$ не имеет решений.

2) уравнение $\sin t = a$;

решение: $t = (-1)^n \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Частные случаи:

$$\sin t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin t = 0 \Rightarrow t = \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin t = -1 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

При $|a| > 1$ уравнение $\sin t = a$ не имеет решений.

3) уравнение $\operatorname{tg} t = a$;

$$\text{решение: } t = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

4) уравнение $\operatorname{ctg} t = a$;

$$\text{решение: } t = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Содержание работы

Решить уравнения:

$$a) \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$б) \cos x = -1;$$

$$в) 2\cos x + \sqrt{2} = 0;$$

$$г) 2\cos x - 1 = 0;$$

$$д) 2\sin x + \sqrt{3} = 0;$$

$$ж) \operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$з) \operatorname{tg} x = 0;$$

$$и) \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$к) \sin x = -0,6;$$

$$л) \cos x = -\frac{1}{2};$$

$$м) \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$н) 2\cos x + \sqrt{3} = 0;$$

$$о) \sqrt{2}\cos x - 1 = 0;$$

$$п) \sin\left(-\frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$р) \operatorname{tg}(-4x) = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$с) 2\cos x \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}.$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 10

Тема: «Тригонометрические уравнения и неравенства»

Цель: научиться решать тригонометрические неравенства.

Оборудование: справочные пособия.

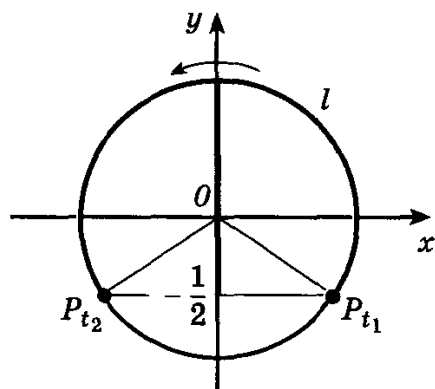
Справочный материал

Решение неравенств, содержащих тригонометрические функции, сводится, как правило, к решению простейших неравенств вида $\sin t \leq a$, $\cos t > a$, $\operatorname{tg} t \geq a$ и т.д.

Рассмотрим на примере способы их решения.

Пример. Решим неравенство $\sin t \geq \frac{1}{2}$.

Все точки P_t единичной окружности при значениях t , удовлетворяющих данному неравенству, имеют ординату, большую или равную $-\frac{1}{2}$.



Множество всех таких точек – дуга l , выделенная на рисунке. Найдем условие принадлежности точки P_t этой дуге:

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq t \leq \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Содержание работы

Решить неравенство:

1) $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

4) $\cos x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

5) $\cos x \geq 1$;

6) $\sin x \geq 1$;

7) $\sin x > \frac{1}{2}$;

8) $\sin x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 11

Тема: «Тригонометрические уравнения и неравенства»

Цель: проверить и оценить знания учащихся по изученному материалу.

Оборудование: справочные пособия.

Содержание работы

Вариант 1

1. Решите уравнение:

а) $2\sin x + \sqrt{2} = 0$;

б) $\sin^2 x + 2\cos x + 2 = 0$;

в) $\sin 2x + 4\sin^2 x = 2\cos^2 x$.

2. Решите неравенство: $\cos x \leq \frac{1}{2}$.

3. Решите уравнение $\sin 4x - \sin 2x = 0$.

Вариант 2

1. Решите уравнение:

а) $2\cos x - 1 = 0$;

б) $\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0$;

в) $2\sin^2 x - \sin 2x = \cos 2x$.

2. Решите неравенство: $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Решите уравнение $\cos 3x + \cos x = 0$.

Вариант 3

1. Решите уравнение:

а) $2\cos x + 1 = 0$;

б) $2\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$;

в) $3\cos^2 x - 5\sin^2 x = \sin 2x$.

2. Решите неравенство: $\sin x \leq \frac{1}{2}$.

3. Решите уравнение $\cos 2x = \cos 4x$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 12

Тема: «Свойства функций»

Цель: изучить основных свойств функций, научиться решать задачи на применение свойств функций.

Оборудование: справочные пособия.

Справочный материал

Функция – это одно из важнейших математических понятий. Функция – зависимость переменной y от переменной x , если каждому значению x соответствует единственное значение y . Переменную x называют независимой переменной или аргументом. Переменную y называют зависимой переменной. Все значения независимой переменной (переменной x) образуют область определения функции. Все значения, которые принимает зависимая переменная (переменная y), образуют область значений функции.

Основные свойства функций

1) Область определения функции и область значений функции.

Область определения функции - это множество всех допустимых действительных значений аргумента x (переменной x), при которых функция $y = f(x)$ определена. Область значений функции - это множество всех действительных значений y , которые принимает функция.

В элементарной математике изучаются функции только на множестве действительных чисел.

2) Нули функции.

Нуль функции – такое значение аргумента, при котором значение функции равно нулю.

3) Промежутки знакопостоянства функции.

Промежутки знакопостоянства функции – такие множества значений аргумента, на которых значения функции только положительны или только отрицательны.

4) Монотонность функции.

Возрастающая функция (в некотором промежутке) - функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции.

Убывающая функция (в некотором промежутке) - функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.

5) Четность (нечетность) функции.

Четная функция - функция, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для любого x из области определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Нечетная функция - функция, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для любого x из области определения справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

6) Ограниченная и неограниченная функции.

Функция называется ограниченной, если существует такое положительное число M , что $|f(x)| \leq M$ для всех значений x . Если такого числа не существует, то функция - неограниченная.

7) Периодичность функции.

Функция $f(x)$ - периодическая, если существует такое отличное от нуля число T , что для любого x из области определения функции имеет место: $f(x+T) = f(x)$. Такое наименьшее число называется периодом функции. Все тригонометрические функции являются периодическими. (Тригонометрические формулы).

Содержание работы

1. Найдите значения функции:
 - а) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ в точках $-1, 1/2, 10$;
 - б) $f(x) = \sqrt{5x - x^2}$ в точках $0, 1, 2$;
 - в) $f(x) = x^2 + 2x$ в точках $x_0, t + 1$.
2. Найдите область определения каждой из функций:
 - а) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4x+3}$;
 - б) $f(x) = \frac{5-x^2}{x^2+2x-8}$;
 - в) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$;
 - г) $f(x) = \sqrt{36 - x^2}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №13

Тема: «Обратные функции»

Цель: изучить правила нахождения обратной функции, основные свойства обратных функций.

Оборудование: справочные пособия.

Справочный материал

Определение 1. Если функция $y = f(x)$ принимает каждое свое значение y только при одном значении x , то эту функцию называют **обратимой**.

Например, линейная функция является обратимой, а квадратичная функция обратимой не является.

Определение 2. Пусть $y = f(x)$ – обратимая функция. Тогда для каждого x из области определения функции выполняется равенство $f(x) = y$. Это соответствие определяет функцию x от y , которую обозначим $x = g(y)$. В этой записи, в соответствии с принятыми обозначениями, поменяем местами x и y . Получим $y = g(x)$. Функцию $y = g(x)$ называют **обратной** к функции $y = f(x)$.

Правило нахождения обратной функции

Для нахождения функции обратной данной необходимо:

1. Убедиться, что заданная функция имеет обратную, то есть является обратимой.
2. Из уравнения заданной функции выразить переменную x .
3. В полученном уравнении поменять местами переменные x и y .

Например. Найти функцию обратную к функции $y = 3x + 5$

Решение.

1. Это линейная функция, она обратима, то есть имеет обратную.

2. Выражаем x : $x = \frac{y-5}{3}$

или $x = \frac{y}{3} - \frac{5}{3}$

3. Меняем местами x и y , получим $y = \frac{x}{3} - \frac{5}{3}$ - искомая функция.

Определение 3. Две функции называют **взаимно обратными**, если они обратны друг другу.

Свойства обратных функций

1. Область определения обратной функции является множеством значения исходной.

2. Множество значений обратной функции является областью определения исходной.

3. График обратной функции симметричен относительно прямой $y = x$. (Прямая $y = x$, называется биссектрисой первого и третьего координатных углов).

Пример. Найти область определения и множество значений для функции обратной к функции $y = \log_2 x$.

Решение. Область определения заданной функции *интервал* $(0; +\infty)$, значит, по свойству 2 она будет совпадать с множеством значения обратной функции, то есть $y > 0$.

Множество значения исходной функции *интервал* $(-\infty; +\infty)$, значит по свойству 1 этот промежуток будет являться областью определения обратной функции.

Таким образом, для функции обратной данной $x \in (-\infty; +\infty)$, а множество значений $y \in (0; +\infty)$.

Пример. На одной координатной плоскости построить график функции $y = \log_2 x$ и функции, обратной данной.

Решение.

1. Строим на координатной плоскости по точкам график заданной функции $y = \log_2 x$, используя таблицу значений x и y

x	1	2	4	$1/2$
y	0	1	2	-1

2. Проводим прямую $y = x$

3. Рисуем график обратной функции симметрично построенному графику функции

$y = \log_2 x$, относительно проведенной прямой $y = x$. Для этого достаточно поменять местами в найденных значениях таблицы переменные x и y . То есть график обратной функции будет проходить через точки

x	0	1	2	-1
y	1	2	4	$1/2$

Содержание работы

Задание 1. Найти функцию обратную данной:

1. $y = 2x - 1$

2. $y = -5x + 4$

3. $y = x^3 + 1$

4. $y = x^3 - 3$

Задание 2. Найти область определения и множество значений для функции обратной к заданной:

1. $y = -2x + 1$

2. $y = (x - 1)^3$

3. $y = x^3 - 1$

Задание 3. На одной координатной плоскости построить график заданной функции и функции, обратной данной:

1. $y = x^2 - 1$, при $x \geq 0$

2. $y = x^3$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 14

Тема: «Степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции. Обратные тригонометрические функции»

Цель: изучить основные свойства некоторых функций, научиться решать задачи на применение свойств этих функций.

Оборудование: справочные пособия.

Справочный материал

Степенная функция

Степенной функцией с действительным показателем называется функция вида $y = x^b$, где b -действительное число, $x > 0$.

Коэффициент b определяет положение графика на координатной плоскости.

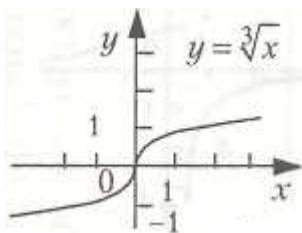
Свойства функции.

1. Функция определена для $x > 0$.

2. $E(y) = [0; +\infty)$.

3. Функция возрастающая, если $b > 0$ и убывающая, если $b < 0$.

4. Функция непрерывна на всей области определения.



Показательная функция

Функция вида $y=a^x$, где $a>0$, $x \in \mathbb{R}$ называется **показательной** функцией.

Коэффициент a - положительное число, указывает на возрастание или убывание функции.

Свойства функции:

1. $D(y)=\mathbb{R}$.
2. $E(y) = (0;+\infty)$.
3. Функция возрастает ($a>1$), убывает ($a<1$) на всей области определения.
4. График функции пересекает ось ординат в точке $(0;1)$.
5. Функция непрерывна на всей области определения.

Логарифмическая функция

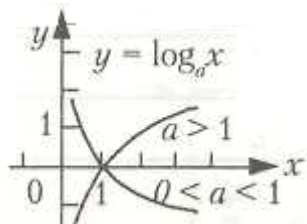
Логарифмической функцией называется функция вида $y=\log_a x$, где $a \neq 1$, $a>0$, $x>0$.

Число a определяет расположение графика.

Вместо логарифмической функции с произвольным основанием удобно рассматривать функцию вида $y=\ln x$, где $a=e$.

Свойства функции $y=\ln x$.

1. $D(y)= (0;+\infty)$.
2. $E(y)=\mathbb{R}$.
3. Функция принимает нулевое значение при $x=1$.
4. Функция возрастает на всей области определения.
5. Функция является непрерывной на всей области определения, дифференцируема и $y_0(x)=1/x$.



Экспоненциальная функция

Функция, обратная функции $y=\ln x$,

называется **экспоненциальной** и записывается уравнением $y=e^x$.

График функции симметричен графику функции $y=\ln x$ относительно прямой $y=x$.

Содержание работы

1. Найди область определения функции:

- а) $y = \log_{0,7} \frac{x^2-4}{x+10}$;
 б) $y = \log_8(x^2+4x-5)$;
 в) $y = 5^{1-x}$;
 г) $y = \log_5(5^{t-4}-25)$.

2. Указать, какие из данных функций являются убывающими:

- а) $y = 6^x$
 б) $y = \left(\frac{2}{6}\right)^x$
 в) $y = -8^x$
 г) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
 д) $y = -\left(\frac{1}{4}\right)^x$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 15

Тема: «Степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции. Обратные тригонометрические функции»

Цель: изучить основные свойства некоторых функций, научиться решать задачи на применение свойств этих функций.

Оборудование: справочные пособия.

Справочный материал

Все тригонометрические функции (синус, косинус, тангенс и котангенс) относятся к основным элементарным функциям. Рассмотрим их графики и перечислим свойства.

Тригонометрическим функциям присуще понятие *периодичности* (повторяемости значений функции при различных значениях аргумента, отличных друг от друга на величину

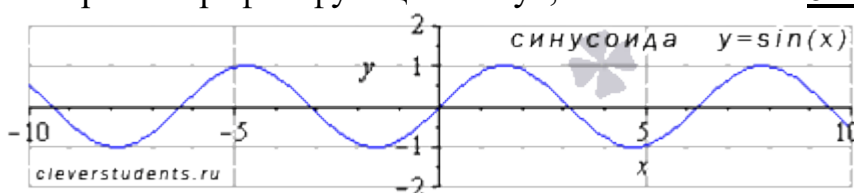
периода $f(x+T) = f(x)$, где T - период), поэтому, в список свойств

тригонометрических функций добавлен пункт «*наименьший положительный период*». Также для каждой тригонометрической функции мы укажем значения аргумента, при которых соответствующая функция обращается в ноль.

Теперь разберемся со всеми тригонометрическими функциями по-порядку.

Функция синус $y = \sin(x)$.

Изобразим график функции синус, его называют "синусоида".

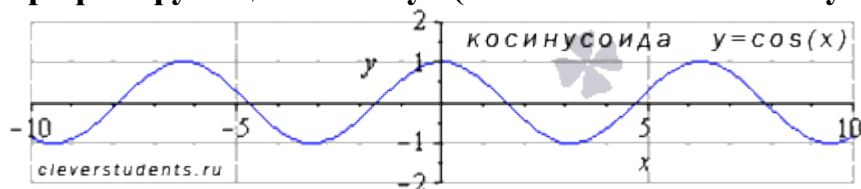


Свойства функции синус $y = \sin x$.

- Областью определения функции синус является все множество действительных чисел, то есть, функция $y = \sin x$ определена при $x \in (-\infty; +\infty)$
- Наименьший положительный период функции синуса равен двум пи: $T = 2\pi$.
- Функция синус принимает значения из интервала от минус единицы до единицы включительно, то есть, ее область значений есть $y \in [-1; 1]$.
- Функция синус - нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.
- Функция убывает при $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi \cdot k\right], k \in \mathbb{Z}$,
возрастает при $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k\right], k \in \mathbb{Z}$.
- Функция синус имеет локальные максимумы в точках $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; 1\right), k \in \mathbb{Z}$,
локальные минимумы в точках $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; -1\right), k \in \mathbb{Z}$.
- Функция $y = \sin x$ вогнутая при $x \in [-\pi + 2\pi \cdot k; 2\pi \cdot k], k \in \mathbb{Z}$,
выпуклая при $x \in [2\pi \cdot k; \pi + 2\pi \cdot k], k \in \mathbb{Z}$.
- Координаты точек перегиба $(\pi \cdot k; 0), k \in \mathbb{Z}$.
- Асимптот нет.

Функция косинус $y = \cos(x)$.

График функции косинус (его называют "косинусоида") имеет вид:



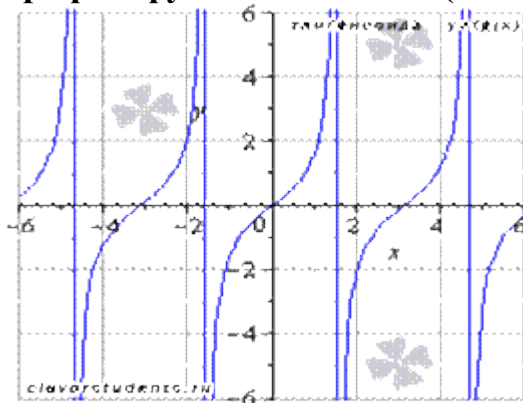
Свойства функции косинус $y = \cos x$.

- Область определения функции косинус: $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Наименьший положительный период функции $y = \cos x$ равен двум пи: $T = 2\pi$.
- Область значений функции косинус представляет интервал от минус единицы до единицы включительно: $y \in [-1; 1]$.
- Функция косинус - четная, так как $y(-x) = y(x)$.
- Функция убывает при $x \in [2\pi \cdot k; \pi + 2\pi \cdot k], k \in \mathbb{Z}$,
возрастает при $x \in [-\pi + 2\pi \cdot k; 2\pi \cdot k], k \in \mathbb{Z}$.
- Функция $y = \cos x$ имеет локальные максимумы в точках $(2\pi \cdot k; 1), k \in \mathbb{Z}$,
локальные минимумы в точках $(\pi + 2\pi \cdot k; -1), k \in \mathbb{Z}$.

- Функция вогнутая при $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi \cdot k \right], \quad k \in \mathbb{Z}$,
- выпуклая при $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k \right], \quad k \in \mathbb{Z}$.
- Координаты точек перегиба $\left(\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; 0 \right), \quad k \in \mathbb{Z}$.
- Асимптот нет.

Функция тангенс $y = \operatorname{tg}(x)$.

График функции тангенс (его называют "тангенсоида") имеет вид:



Свойства функции тангенс $y = \operatorname{tg}x$.

- Область определения функции тангенс:

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k \right), \text{ где } k \in \mathbb{Z}, \mathbb{Z} - \text{множество целых чисел.}$$

Поведение функции $y = \operatorname{tg}x$ на границе области

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k - 0} \operatorname{tg}(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k + 0} \operatorname{tg}(x) = +\infty$$

определения

Следовательно, прямые $x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$, где $k \in \mathbb{Z}$, являются вертикальными асимптотами.

- Наименьший положительный период функции тангенс $T = \pi$.

- Область значений функции $y = \operatorname{tg}x$: $y \in (-\infty; +\infty)$.

- Функция тангенс - нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.

- Функция возрастает при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k \right), \quad k \in \mathbb{Z}$.

- Функция вогнутая при $x \in \left[\pi \cdot k; \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k \right), \quad k \in \mathbb{Z}$,

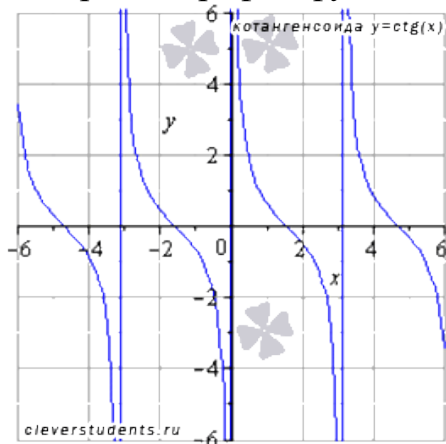
- выпуклая при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; \pi \cdot k \right], \quad k \in \mathbb{Z}$.

- Координаты точек перегиба $(\pi \cdot k; 0), \quad k \in \mathbb{Z}$.

- Наклонных и горизонтальных асимптот нет.

Функция котангенс $y = \operatorname{ctg}(x)$.

Изобразим график функции котангенс (его называют "котангенсоида"):



Свойства функции котангенс $y = \operatorname{ctg}x$.

- Область определения функции котангенс: $x \in (\pi \cdot k; \pi + \pi \cdot k)$, где $k \in \mathbb{Z}$, \mathbb{Z} – множество целых чисел.

- Наименьший положительный период функции $y = \operatorname{ctg}x$ равен π : $T = \pi$.

- Функция обращается в ноль при $x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$, где $k \in \mathbb{Z}$, \mathbb{Z} – множество целых чисел.

- Область значений функции котангенс: $y \in (-\infty; +\infty)$.

- Функция нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.

- Функция $y = \operatorname{ctg}x$ убывает при $x \in (\pi \cdot k; \pi + \pi \cdot k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

- Функция котангенс вогнутая при $x \in \left(\pi \cdot k; \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k \right]$, $k \in \mathbb{Z}$,

выпуклая при $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; \pi \cdot k \right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

- Координаты точек перегиба $\left(\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; 0 \right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

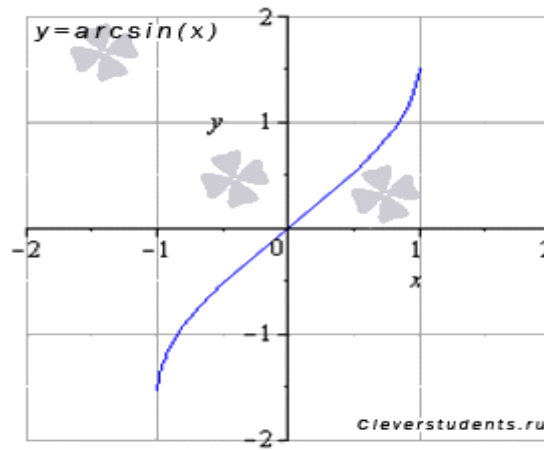
- Наклонных и горизонтальных асимптот нет.

Обратные тригонометрические функции, их свойства и графики

Обратные тригонометрические функции (арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс) являются основным элементарным функциями. Часто из-за приставки "арк" обратные тригонометрические функции называют аркфункциями. Сейчас мы рассмотрим их графики и перечислим свойства.

Функция арксинус $y = \arcsin(x)$.

Изобразим график функции арксинус:

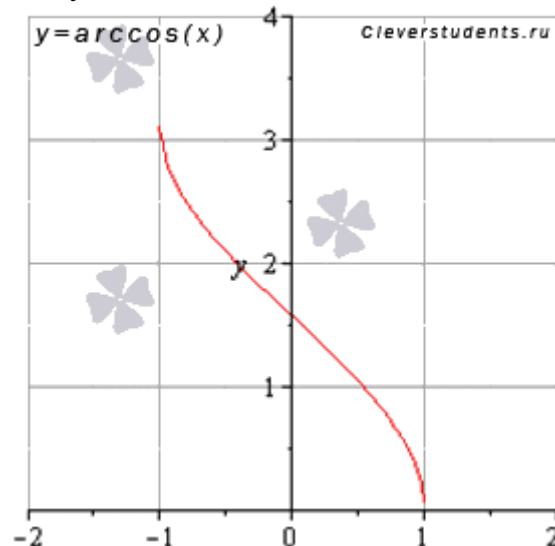


Свойства функции арксинус $y = \arcsin(x)$.

- Областью определения функции арксинус является интервал от минус единицы до единицы включительно: $x \in [-1; 1]$.
- Область значений функции $y = \arcsin(x)$: $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
- Функция арксинус - нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.
- Функция $y = \arcsin(x)$ возрастает на всей области определения, то есть, при $x \in [-1; 1]$.
- Функция вогнутая при $x \in [0; 1]$, выпуклая при $x \in [-1; 0]$.
- Точка перегиба $(0; 0)$, она же ноль функции.
- Асимптот нет.

Функция арккосинус $y = \arccos(x)$.

График функции арккосинус имеет вид:



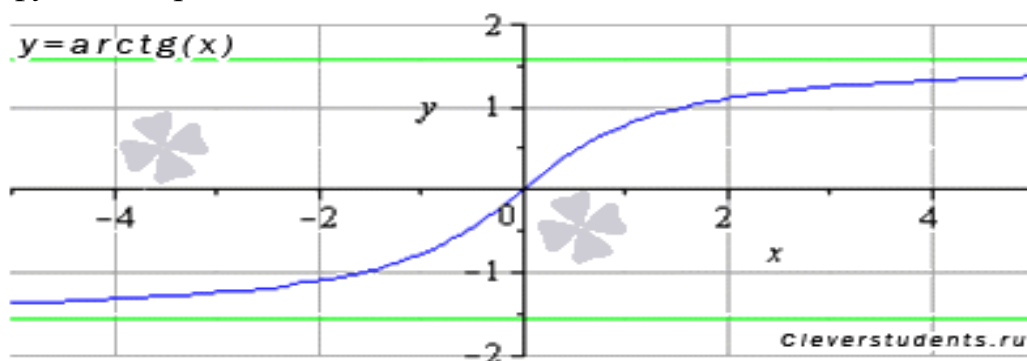
Свойства функции арккосинус $y = \arccos(x)$.

- Область определения функции арккосинус: $x \in [-1; 1]$.
- Область значений функции $y = \arccos(x)$: $y \in [0; \pi]$.
- Функция не является ни четной ни нечетной, то есть, она общего вида.

- Функция арккосинус убывает на всей области определения, то есть, при $x \in [-1; 1]$.
- Функция вогнутая при $x \in [-1; 0]$, выпуклая при $x \in [0; 1]$.
- Точка перегиба $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
- Асимптот нет.

Функция арктангенс $y = \arctg(x)$.

График функции арктангенс имеет вид:

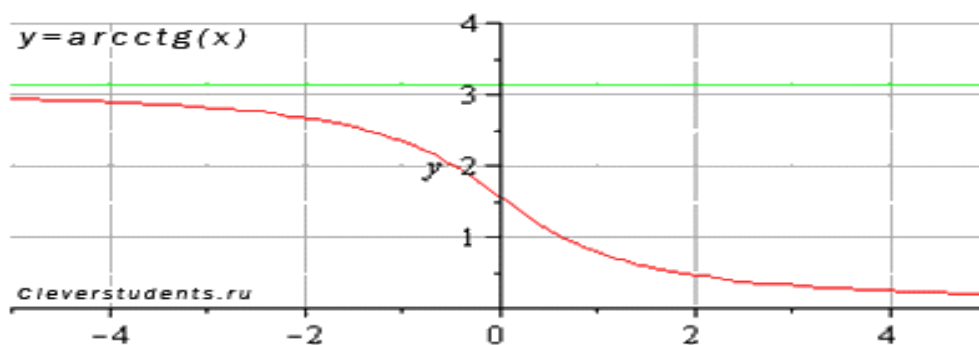


Свойства функции арктангенс $y = \arctg(x)$.

- Область определения функции $y = \arctg(x)$: $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Область значений функции арктангенс: $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- Функция арктангенс - нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.
- Функция возрастает на всей области определения, то есть, при $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Функция арктангенс вогнутая при $x \in (-\infty; 0]$, выпуклая при $x \in [0; +\infty)$.
- Точка перегиба $(0; 0)$, она же ноль функции.
- Горизонтальными асимптотами являются прямые $y = -\frac{\pi}{2}$ при $x \rightarrow -\infty$ и $y = \frac{\pi}{2}$ при $x \rightarrow +\infty$. На чертеже они показаны зеленым цветом.

Функция арккотангенс $y = \text{arcctg}(x)$.

Изобразим график функции арккотангенс:



Свойства функции арккотангенс $y = \text{arcctg}(x)$.

- Областью определения функции арккотангенс является все множество действительных чисел: $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Область значений функции $y = \text{arcctg}(x)$: $y \in (0; \pi)$.
- Функция арккотангенс не является ни четной ни нечетной, то есть, она общего вида.
- Функция убывает на всей области определения, то есть, при $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Функция вогнутая при $x \in [0; +\infty)$, выпуклая при $x \in (-\infty; 0]$.
- Точка перегиба $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
- Горизонтальными асимптотами являются прямые $y = \pi$ при $x \rightarrow -\infty$ (на чертеже показана зеленым цветом) и $y = 0$ при $x \rightarrow +\infty$.

Содержание работы

1. Найдите область определения и область значений данной функции. Постройте ее график:
 - а) $y = 2 + \sin x$
 - б) $y = \cos x - 1$
 - в) $y = 0,5 \text{tg } x$
2. Найдите координаты точек пересечения с осями координат графика функции:
 - а) $y = \sin x$
 - б) $y = \cos x$
 - в) $y = 1 + \text{tg } x$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 16

Тема: «Последовательности»

Цель: изучить основные свойства и способы задания числовых последовательностей, применить полученные знания при решении задач.

Оборудование: справочные пособия.

Справочный материал

Функция $a_n=f(n)$ натурального аргумента n ($n=1; 2; 3; 4; \dots$) называется числовой последовательностью.

Числа $a_1; a_2; a_3; a_4; \dots$, образующие последовательность, называются членами числовой последовательности. Так $a_1=f(1); a_2=f(2); a_3=f(3); a_4=f(4); \dots$

Итак, члены последовательности обозначаются буквами с указанием индексов — порядковых номеров их членов: $a_1; a_2; a_3; a_4; \dots$, следовательно, a_1 — первый член последовательности; a_2 - второй член последовательности; a_3 - третий член последовательности; a_4 - четвертый член последовательности и т.д.

Кратко числовую последовательность записывают так: $a_n=f(n)$ или $\{a_n\}$.

Существуют следующие способы задания числовой последовательности:

1) *Словесный способ*. Представляет собой закономерность или правило расположения членов последовательности, описанный словами.

Пример 1. Написать последовательность всех неотрицательных чисел, кратных числу 5.

Решение. Так как на 5 делятся все числа, оканчивающиеся на 0 или на 5, то последовательность запишется так:

0; 5; 10; 15; 20; 25; ...

Пример 2. Дана последовательность: 1; 4; 9; 16; 25; 36; Задайте ее словесным способом.

Решение. Замечаем, что $1=1^2; 4=2^2; 9=3^2; 16=4^2; 25=5^2; 36=6^2; \dots$ Делаем вывод: дана последовательность, состоящая из квадратов чисел натурального ряда.

2) *Аналитический способ*. Последовательность задается формулой n -го члена: $a_n=f(n)$. По этой формуле можно найти любой член последовательности.

Пример 3. Известно выражение k -го члена числовой последовательности: $a_k = 3+2 \cdot (k+1)$. Вычислите первые четыре члена этой последовательности.

Решение.

$$a_1=3+2 \cdot (1+1)=3+4=7;$$

$$a_2=3+2 \cdot (2+1)=3+6=9;$$

$$a_3=3+2 \cdot (3+1)=3+8=11;$$

$$a_4=3+2 \cdot (4+1)=3+10=13.$$

Пример 4. Определите правило составления числовой последовательности по нескольким ее первым членам и выразите более простой формулой общий член последовательности: 1; 3; 5; 7; 9;

Решение. Замечаем, что дана последовательность нечетных чисел. Любое нечетное число можно записать в виде: $2k-1$, где k — натуральное число, т.е. $k=1; 2; 3; 4; \dots$. Ответ: $a_k=2k-1$.

3) *Рекуррентный способ*. Последовательность также задается формулой, но не формулой общего члена, зависящей только от номера члена. Задается формула, по которой каждый следующий член находят через предыдущие члены. В случае рекуррентного способа задания функции всегда дополнительно задается один или несколько первых членов последовательности.

Пример 5. Выписать первые четыре члена последовательности $\{a_n\}$, если $a_1=7$; $a_{n+1} = 5+a_n$.

Решение.

$$a_2 = 5 + a_1 = 5 + 7 = 12;$$

$$a_3 = 5 + a_2 = 5 + 12 = 17;$$

$$a_4 = 5 + a_3 = 5 + 17 = 22. \text{ Ответ: } 7; 12; 17; 22; \dots$$

Пример 6. Выписать первые пять членов последовательности $\{b_n\}$, если $b_1 = -2$, $b_2 = 3$; $b_{n+2} = 2b_n + b_{n+1}$.

Решение.

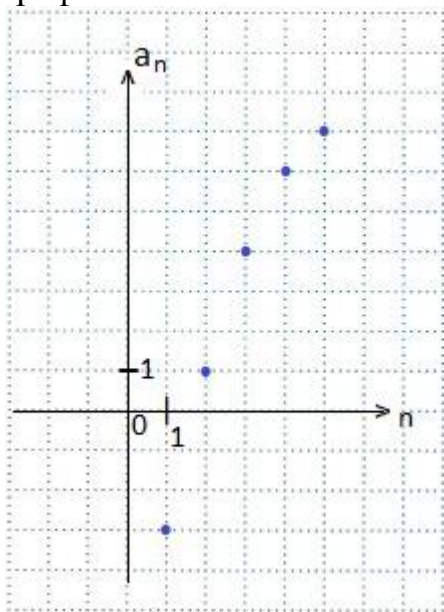
$$b_3 = 2 \cdot b_1 + b_2 = 2 \cdot (-2) + 3 = -4 + 3 = -1;$$

$$b_4 = 2 \cdot b_2 + b_3 = 2 \cdot 3 + (-1) = 6 - 1 = 5;$$

$$b_5 = 2 \cdot b_3 + b_4 = 2 \cdot (-1) + 5 = -2 + 5 = 3. \text{ Ответ: } -2; 3; -1; 5; 3; \dots$$

4) *Графический способ.* Числовая последовательность задается графиком, который представляет собой изолированные точки. Абсциссы этих точек — натуральные числа: $n=1; 2; 3; 4; \dots$. Ординаты — значения членов последовательности: $a_1; a_2; a_3; a_4; \dots$.

Пример 7. Запишите все пять членов числовой последовательности, заданной графическим способом.



Решение.

Каждая точка в этой координатной плоскости имеет координаты $(n; a_n)$.

Выпишем координаты отмеченных точек по возрастанию абсциссы n .

Получаем: $(1; -3), (2; 1), (3; 4), (4; 6), (5; 7)$.

Следовательно, $a_1 = -3$; $a_2 = 1$; $a_3 = 4$; $a_4 = 6$; $a_5 = 7$.

Ответ: $-3; 1; 4; 6; 7$.

Рассмотренная числовая последовательность в качестве функции (в примере 7) задана на множестве первых пяти натуральных чисел ($n=1; 2; 3; 4; 5$), поэтому, является *конечной числовой последовательностью* (состоит из пяти членов).

Если числовая последовательность в качестве функции будет задана на всем множестве натуральных чисел, то такая последовательность будет *бесконечной числовой последовательностью*.

Числовую последовательность называют *возрастающей*, если ее члены возрастают ($a_{n+1} > a_n$) и убывающей, если ее члены *убывают* ($a_{n+1} < a_n$). Возрастающая или убывающая числовые последовательности называются *монотонными*.

Содержание работы

1. Продолжи последовательности чисел:

16, 15, 18, ... (17, 20, 19)

1, 2, 2, 4, 8, ... (32, 256, 8192)

33, 31, 32, ... (30, 31, 29)

2. На складе имеется 500 т угля, каждый день подвозят по 30 т. Сколько угля будет на складе в 1 день? 2 день? 3 день? 4 день? 5 день?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 17

Тема: «Последовательности»

Цель: изучить основные свойства и способы задания числовых последовательностей, применить полученные знания при решении задач.

Оборудование: справочные пособия.

Содержание работы

1. Автомобиль, двигаясь со скоростью 1 м/с за каждую последующую секунду изменял свою скорость на 0,6 м/с. Какую скорость он будет иметь спустя 10 секунд?

2. Ежедневно каждый болеющий гриппом человек может заразить 4 окружающих. Через сколько дней заболеют все ученики нашей школы (300 человек)? (Через 4 дня).

3. Сколько появится бактерий куриной холеры за 10 часов, если одна бактерия делится пополам каждый час?

4. Курс воздушных ванн начинают с 15 минут в первый день и увеличивают время этой процедуры в каждый следующий день на 10 мин. Сколько дней следует принимать воздушные ванны в указанном режиме, чтобы достичь их максимальной продолжительности 1 ч 45 мин? (10)

5. При свободном падении тело проходит в первую секунду 4,8 м, а в каждую следующую на 9,8 м больше. Найдите глубину шахты, если свободно падающее тело достигло ее дна через 5 с после начала падения.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №18

Тема: «Производная»

Цель: научиться вычислять производные основных функций.

Оборудование: справочные пособия.

Справочный материал

Производная функции это отношение приращения функции к приращению аргумента при бесконечно малом приращении аргумента.

Приращением в математике называют изменение. То, насколько изменился аргумент (x) при продвижении вдоль оси Ox , называется **приращением аргумента** и обозначается Δx . То, насколько изменилась функция (высота) при продвижении вперед вдоль оси Ox на расстояние Δx , называется **приращением функции** и обозначается Δf .

Итак, производная функции $f(x)$ — это отношение Δf к Δx при $\Delta x \rightarrow 0$. Обозначаем производную той же буквой, что и функцию, только со штрихом сверху справа: $f'(x)$ или просто f' .

Таблица производных основных элементарных функций

$$(c)' = 0 \quad (c — \text{const}); \quad (x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \quad (\alpha — \text{const});$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$$

$$(\sin x)' = \cos x; \quad (\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(a^x)' = a^x \ln a; \quad (e^x)' = e^x;$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}; \quad (\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$*(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad *(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$*(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}; \quad *(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Основные правила дифференцирования

$$(c \cdot u)' = c \cdot u', \quad c — \text{const}; \quad (u \pm v)' = u' \pm v';$$

$$(uv)' = u'v + uv'; \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$

$$y = f(g(x)), \quad y' = f'_u(u) \cdot g'_x(x), \quad \text{где } u = g(x).$$

Содержание работы

Найти производную функции:

- 1) $y = 2x^5 + 2x^3 - 3x$
- 2) $y = -5x^4 + 5x^3 + 4x^2$
- 3) $y = -x^5 - x^4 + 7x$
- 4) $y = -5x^6 - 8x^4 + 9x^2$
- 5) $y = -6x^5 + 5x^4 + 6x^3$
- 6) $y = -5x^6 - 8x^3 + 7x$
- 7) $y = 6x^3 - 9x^2 + 7x$
- 8) $y = 2x^6 + 7x^5 - 7x^3$
- 9) $y = -3x^5 + 9x^4 - 3x^3$
- 10) $y = 4x^6 + 4x^3 + 7x^2$
- 11) $y = 4x^5 + 6x^3 - 3x^2$
- 12) $y = 4 \operatorname{ctg} x + 3 \operatorname{tg} x - 4$
- 13) $y = 4 \sin x + 2 \operatorname{ctg} x + 5$
- 14) $y = 4 \operatorname{tg} x - 5 \sin x + 4$
- 15) $y = 2 \operatorname{ctg} x - 2 \cos x + 4$
- 16) $y = 4 \sin x - 5 \operatorname{ctg} x - 1$
- 17) $y = 3 \cos x - 2 \operatorname{tg} x - 2$
- 18) $y = 4 \cos x + 2 \operatorname{ctg} x - 5$
- 19) $y = 4 \operatorname{tg} x + 5 \cos x + 2$
- 20) $y = 5 \cos x - 2 \sin x - 5$
- 21) $y = 2 \operatorname{ctg} x - 3 \cos x + 2$
- 22) $y = 3 \cos x + 3 \sin x - 5$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 19

Тема: «Производная»

Цель: проверить и оценить знания учащихся по теме: «Производная».

Оборудование: справочные пособия.

Содержание работы

1. Найдите производную функции:

а) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + 5;$

б) $f(x) = 4x - \frac{1}{x^3}.$

в) $f(x) = 4 - x^4 - \frac{1}{3}x^6;$

г) $f(x) = \frac{2}{x^2} + x.$

2. Найдите:

- а) $f'(\frac{\pi}{2})$, если $f(x) = x \cos x$;
б) $f'(-1)$, если $f(x) = (3x + 4)^5$.
в) $f'(-2)$, если $f(x) = (5 + 2x)^4$;
г) $f'(\pi)$, если $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 20

Тема: «Производная»

Цель: проверить и оценить знания учащихся по теме: «Производная».

Оборудование: справочные пособия.

Содержание работы

1. Найдите все значения x , при которых $f'(x) = 0$, если $f(x) = \cos 2x + \sqrt{3}x$.
2. Найдите все значения x , при которых $f'(x) = 0$, если $f(x) = 2\sqrt{2}x - \sin 4x$.
3. Найдите все значения x , при которых $f'(x) \leq 0$, если $f(x) = 6x - x^3$.
4. Найдите все значения x , при которых $f'(x) \geq 0$, если $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 0,5x^2$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 21

Тема: «Производная»

Цель: научиться исследовать графики функций, используя производную.

Оборудование: справочные пособия.

Справочный материал

Алгоритм исследования функции:

- 1) найти область определения функции;
- 2) выяснить, является ли функция четной или нечетной, периодической;
- 3) найти точки пересечения графика с осями координат;
- 4) найти промежутки знакопостоянства;
- 5) найти промежутки возрастания и убывания;
- 6) найти точки экстремума и значения функции в этих точках;
- 7) исследовать поведение функции в окрестности «особых» точек.

На основании такого исследования строится график функции.

Пример. Исследовать функцию $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2$ и построить ее график.
Проведем исследование по указанной схеме:

- 1) $D(f) = R$, так как f – многочлен.
- 2) Функция f не является ни четной, ни нечетной.

3), 4) График f пересекается с осью ординат в точке $(0; f(0))$; чтобы найти точки пересечения с осью абсцисс, надо решить уравнение $3x^5 - 5x^3 + 2 = 0$, один из корней которого ($x = 1$) легко находится. Другие корни (если они есть) могут быть найдены только приближенно. Поэтому для данной функции остальные точки пересечения графика с осью абсцисс и промежутки знакопостоянства находить не будем (так как приведенная схема исследования имеет примерный характер).

5), 6) Найдем производную функции f :

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1).$$

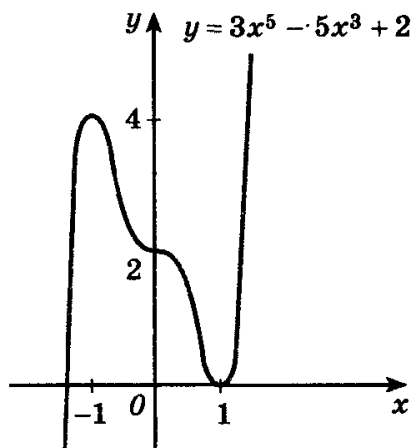
$D(f') = R$, поэтому критических точек, для которых $f'(x)$ не существует, нет.

Заметим, что $f'(x) = 0$, если $x^2(x^2 - 1) = 0$, т.е. при значениях аргумента, равных 0 , -1 и 1 . Рассматриваемая функция имеет три критические точки.

Составим таблицу:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; \infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	4	\searrow	2	\searrow	0	\nearrow
		max				min	

Строим график функции:



Содержание работы

Задание. Исследуйте функцию и постройте ее график:

- 1) $f(x) = x^2 - 2x + 8$;
- 2) $f(x) = -x^2 + 5x + 4$;
- 3) $f(x) = x^3 + 3x + 2$;
- 4) $f(x) = 1 + 1,5x - 3x^2 - 2,5x^3$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 22

Тема: «Первообразная и интеграл»

Цель: научиться вычислять неопределенный интеграл.

Оборудование: справочные пособия.

Справочный материал

Неопределенный интеграл для функции $f(x)$ – это совокупность всех первообразных данной функции.

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке (a, b) и $F(x)$ – ее первообразная, то есть $F'(x) = f(x)$ при $a < x < b$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C, a < x < b, \text{ где } C - \text{произвольная постоянная.}$$

Содержание работы

Задание. Вычислите неопределенный интеграл:

- 1) $\int x^4 dx$;
- 2) $\int x^3 dx$;
- 3) $\int \cos x dx$;
- 4) $\int \sin x dx$;
- 5) $\int 3\cos \frac{x}{2} dx$;
- 6) $\int \frac{1}{\cos^2} dx$;
- 7) $\int (2x + 1) dx$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 23

Тема: «Первообразная и интеграл»

Цель: закрепить знания учащихся при решении задач.

Оборудование: справочные пособия.

Содержание работы

Задание. Вычислите неопределенный интеграл:

- 1) $\int \sin \frac{x}{3} dx$;
- 2) $\int (\sin \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{4}) dx$;
- 3) $\int \frac{1}{\sqrt{x+3}} dx$;
- 4) $\int \frac{1}{\sqrt{2x+5}} dx$;
- 5) $\int (1 + 2x)^3 dx$;

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 24

Тема: «Первообразная и интеграл»

Цель: проверить и оценить знания учащихся по изученному материалу.

Оборудование: справочные пособия.

Содержание работы

1. Найдите общий вид первообразных для функции

а) $f(x) = (3x - 2)^3 - 2\cos(5x - \frac{\pi}{3})$;

б) $f(x) = (5x + 3)^2 + 3\sin(2x - \frac{\pi}{6})$.

2. Вычислите интеграл

а) $\int_1^2 \frac{x^3 + 3x^2}{x+3} dx$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\cos\frac{x}{3}) dx$

в) $\int_3^4 \frac{x^3 - 2x^2}{x-2} dx$ г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}) dx$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 25

Тема: «Первообразная и интеграл»

Цель: проверить и оценить знания учащихся по изученному материалу.

Оборудование: справочные пособия.

Содержание работы

1. Для функции $f(x) = \sqrt{7x - 3}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $A(1;2)$.
2. Для функции $f(x) = \sqrt{5x + 6}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $A(2;1)$.
3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3 + 1$, $y=0$, $x=1$, $x=2$.
4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 3$, $y=0$, $x=1$, $x=3$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 26

Тема: «Уравнения и системы уравнений»

Цель: научиться решать иррациональные, показательные и логарифмические уравнения.

Оборудование: справочные пособия.

Справочный материал

Уравнения, в которых под знаком корня содержится переменная, называют иррациональными.

Пример. Решить уравнение $\sqrt{x^2 - 5} = 2$.

Возведем обе части уравнения в квадрат и получим $x^2 - 5 = 4$, откуда следует, что $x^2 = 9$, т.е. $x = 3$ или $x = -3$.

Проверим, что полученные числа являются решениями уравнения. Действительно, при подстановке их в данное уравнение получаются верные равенства

$$\sqrt{3^2 - 5} = 2 \text{ и } \sqrt{(-3)^2 - 5} = 2.$$

Следовательно, $x = 3$ и $x = -3$ – решения данного уравнения.

Под иррациональным неравенством понимается неравенство, в котором неизвестные величины находятся под знаком радикала.

Пример. Решить неравенство $\sqrt{3x - 5} > x - 1$.

Данное неравенство эквивалентно совокупности двух систем:

$$\sqrt{3x - 5} > x - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 3x - 5 > (x - 1)^2 \end{cases} \vee \left[\begin{cases} x - 1 < 0 \\ 3x - 5 > 0 \end{cases} \right. \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x \geq 1 \\ 3x - 5 > x^2 - 2x + 1 \end{cases} \vee \left[\begin{cases} x < 0 \\ 3 > \frac{5}{3} \end{cases} \right. \right] \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 1 \\ x^2 - 5x + 6 < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \in (2; 3) \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in (2; 3).$$

Ответ: $(2; 3)$.

Содержание работы

Задание 1. Решите уравнение:

- 1) $\sqrt{x^4 + 19} = 10$;
- 2) $\sqrt[3]{x - 9} = -3$;
- 3) $\sqrt{x + 1} = x - 5$;
- 4) $x + \sqrt{2x + 3} = 6$;
- 5) $x = \sqrt[3]{x^3 + x^2 - 6x + 8}$;
- 6) $\sqrt{5 + \sqrt[3]{x + 10}} = 4$.

Задание 2. Решите уравнения:

- 1) $3^x + 3^{3-x} = 12$;
- 2) $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$;
- 3) $4^x - 0,25^{x-2} = 15$.

Задание 3. Решите уравнения:

1) $\log_5 (x^2 + 8) - \log_5 (x + 1) = 3\log_5 2$;

2) $\lg (x^2 + 2x - 7) - \lg (x - 1) = 0$;

3) $\log_4^2 x + \log_4 \sqrt{x} - 1,5 = 0$;

4) $\lg^2 x - \lg x^2 + 1 = 0$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 27

Тема: «Уравнения и системы уравнений»

Цель: научиться решать системы уравнений.

Оборудование: справочные пособия.

Содержание работы

Задание 1. Решите системы уравнений:

1)
$$\begin{cases} x + 2y = -1, \\ 4^{x+y^2} = 16; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} 3^{y+1} + 2^x = 5, \\ 4^x - 6 \cdot 3^y + 2 = 0; \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} xy = 2^4, \\ \log_2^2 x + \log_2^2 y = 10; \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 2, \\ x^2 y - 2y + 9 = 0. \end{cases}$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 28

Тема: «Использование свойств и графиков функций при решении уравнений и неравенств»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться решать неравенства методом интервалов.

ОБОРУДОВАНИЕ: справочные пособия.

Справочный материал

На свойстве непрерывных функций основан метод решения неравенств с одной переменной (метод интервалов). Опишем его.

Пусть функция f непрерывна на интервале I и обращается в нуль в конечном числе точек этого интервала. Этими точками I разбивается на интервалы, в каждом из которых непрерывная функция f сохраняет постоянный знак. Чтобы определить этот знак, достаточно вычислить значение функции f в какой-либо одной точке из каждого такого интервала.

Пример. Решить неравенство: $\frac{x^2-1}{x^2-5x+6} \geq 0$.

Функция $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-5x+6}$ непрерывна в каждой точке своей области определения и обращается в нуль в точках -1 и 1 . Область определения этой функции – вся числовая прямая, за исключением нулей знаменателя, т.е. точек 2 и 3 . Эти точки и точки -1 и 1 разбивают область определения f на пять промежутков, в каждом из которых функция f непрерывна и не обращается в нуль. На рисунке отмечен знак f в каждом из соответствующих интервалов, который определяем, найдя знаки значений f во внутренних точках интервалов. Неравенство нестрогое, поэтому числа -1 и 1 (нули функции f) являются решениями неравенства. Рассматривая рисунок, можно записать ответ: множество решений неравенства – объединение промежутков $(-\infty; -1]$, $[1; 2)$ и $(3; \infty)$.

Содержание работы

Задание. Решите неравенства:

1) $x^2 - 5x + 4 > 0$;

2) $x^2 - 3x - 4 \leq 0$.

2. Найдите область допустимых значений функции:

а) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-7}}$;

б) $f(x) = \sqrt{9x - x^3}$

в) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-7}} - 3\sqrt{9x - x^3}$

а) $f(x) = \sqrt{\frac{x+5}{x}}$;

б) $f(x) = \sqrt{2x^3 - 8x}$;

в) $f(x) = \sqrt{\frac{x+5}{x}} + 2\sqrt{2x^3 - 8x}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 29

Тема: «Использование свойств и графиков функций при решении уравнений и неравенств»

Цель: научиться решать неравенства методом интервалов.

Оборудование: справочные пособия.

Содержание работы

Задание. Решите неравенства:

- 1) $\frac{x+3}{x^2+4x-5} \geq 0;$
- 2) $\frac{x^2-7x+6}{x-2} < 0;$
- 3) $\frac{(x-2)(x-4)}{x^2+2x-3} \geq 0.$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 30

Тема: «Использование свойств и графиков функций при решении уравнений и неравенств»

Цель: научиться решать неравенства методом интервалов.

Оборудование: справочные пособия.

Содержание работы

Задание.

1. Решите уравнения:

- 1) $x^3 - 3x^2 + x = 3;$
- 2) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0;$
- 3) $x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 6x - 8 = 0.$

2. Пусть $f(x) = x^2(x - 3)$. Найдите те значения x , для которых:

а) $f(x) > 0$; б) $f(x) < 0$; в) $f(x) \geq 0$; г) $f(x) \leq 0$.

3. Пусть $f(x) = x(x + 2)^2$. Найдите те значения x , для которых:

а) $f(x) > 0$; б) $f(x) < 0$; в) $f(x) \geq 0$; г) $f(x) \leq 0$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 31

Тема: «Элементы комбинаторики»

Цель: изучить основные понятия комбинаторики, применить их при решении задач.

Оборудование: справочные пособия.

Справочный материал

1. Комбинаторика и ее возникновение.

Комбинаторика- это область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из элементов, принадлежащих данному множеству.

Комбинаторика возникла в XVI веке. В жизни привилегированных слоев тогдашнего общества большое место занимали азартные игры (карты, кости). Широко были распространены лотереи. Первоначально комбинаторные задачи касались в основном азартных игр: сколькими способами можно получить данное число очков, бросая 2 или 3 кости или сколькими способами можно получить 2-ух королей в некоторой карточной игре. Эти и другие проблемы азартных игр являлись движущей силой в развитии комбинаторики и далее в развитии теории вероятностей.

Одним из первых занялся подсчетом числа различных комбинаций при игре в кости итальянский математик Тарталья. Он составил таблицы (числа способов выпадения k очков на r костях). Однако, он не учел, одна и та же сумма очков может выпасть различными способами, поэтому его таблицы содержали большое количество ошибок.

Теоретическое исследование вопросов комбинаторики предприняли в XVII веке французские математики Блез Паскаль и Ферма. Исходным пунктом их исследований были так же проблемы азартных игр.

Дальнейшее развитие комбинаторики связано с именами Я. Бернулли, Г. Лейбница, Л. Эйлера. Однако, и в их работах основную роль играли приложения к различным играм.

Сегодня комбинаторные методы используются для решения транспортных задач, в частности задач по составлению расписаний, для составления планов производства и реализации продукции и т.д.

2. Общие правила комбинаторики.

Правило суммы: Если некоторый объект A может быть выбран m способами, а объект B - k способами, то объект «либо A , либо B » можно выбрать $m+k$ способами.

Примеры:

1. Допустим, что в ящике находится n разноцветных шаров. Произвольным образом вынимается 1 шарик. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: n способами.

Распределим эти n шариков по двум ящикам: в первый- m шариков, во второй- k шариков. Произвольным образом из произвольно выбранного ящика вынимается 1 шарик. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: Из первого ящика шарик можно вынуть m способами, из второго- k способами. Тогда всего способов $m+k=n$.

2. Морской семафор.

В морском семафоре каждой букве алфавита соответствует определенное положение относительно тела сигнальщика двух флажков. Сколько таких сигналов может быть?

Решение: Общее число складывается из положений, когда оба флажка расположены по разные стороны от тела сигнальщика и положений, когда они расположены по одну сторону от тела сигнальщика. При подсчете числа возможных положений применяется правило суммы.

Правило произведения: Если объект А можно выбрать m способами, а после каждого такого выбора другой объект В можно выбрать (независимо от выбора объекта А) k способами, то пары объектов «А и В» можно выбрать $m \cdot k$ способами.

Примеры:

1. Сколько двузначных чисел существует?

Решение: Число десятков может быть обозначено любой цифрой от 1 до 9. Число единиц может быть обозначено любой цифрой от 0 до 9. Если число десятков равно 1, то число единиц может быть любым (от 0 до 9). Таким образом, существует 10 двузначных чисел, с числом десятков - 1. Аналогично рассуждаем и для любого другого числа десятков. Тогда можно посчитать, что существует $9 \cdot 10 = 90$ двузначных чисел.

2. Имеется 2 ящика. В одном лежит m разноцветных кубиков, а в другом - k разноцветных шариков. Сколькими способами можно выбрать пару «Кубик-шарик»?

Решение: Выбор шарика не зависит от выбора кубика, и наоборот. Поэтому, число способов, которыми можно выбрать данную пару равно $m \cdot k$.

3. Генеральная совокупность без повторений и выборки без повторений.

Генеральная совокупность без повторений – это набор некоторого конечного числа различных элементов $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.

Пример: Набор из n разноцветных лоскутков.

Выборкой объема k ($k \leq n$) называется группа из k элементов данной генеральной совокупности.

Пример: Пестрая лента, сшитая из n разноцветных лоскутков, выбранных из данных n .

Размещениями из n элементов по k называются такие выборки, которые содержат по k элементов, выбранных из числа данных n элементов генеральной совокупности без повторений, и отличаются друг от друга либо составом элементов, либо порядком их расположения.

- число размещений из n по k .

Число размещений из n по k можно определить следующим способом: первый объект выборки можно выбрать n способами, далее второй объект можно выбрать $n-1$ способом и т.д.

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))$$

Преобразовав данную формулу, имеем:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \text{ где } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \text{ (называется } n \text{ - факториал).}$$

Следует помнить, что $0! = 1$.

Примеры:

1. В первой группе класса А первенства по футболу участвует 17 команд. Разыгрываются медали: золото, серебро и бронза. Сколькими способами они могут быть разыграны?

Решение: Комбинации команд-победителей отличаются друг от друга составом и порядком следования элементов, т.е. являются размещениями из 17 по 3.

$$A_{17}^3 = \frac{17!}{(17-3)!} = \frac{17!}{14!} = 15 \cdot 16 \cdot 17 = 4080$$

Перестановками без повторений из n элементов называются размещения без повторений из n элементов по n, т.е. размещения отличаются друг от друга только порядком следования элементов.

- число перестановок.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Примеры:

1. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что они должны состоять из различных цифр?

Решение: Имеем перестановки из 5 элементов.

$$P_n = 5! = 120$$

Сочетаниями без повторений из n элементов по k называются такие выборки, которые содержат по k элементов, выбранных из числа данных n элементов генеральной совокупности без повторений, и отличаются друг от друга только составом элементов.

Примеры:

1. Если в полуфинале первенства по шахматам участвует 20 человек, а в финал выходят лишь трое, то сколькими способам и можно определить эту тройку?

Решение: В данном случае порядок, в котором располагается эта тройка, не существен. Поэтому тройки, вышедшие в финал, являются сочетаниями из 20 по 3.

$$C_{20}^3 = \frac{20!}{(20-3)! \cdot 3!} = \frac{20!}{17! \cdot 3!} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{2 \cdot 3} = 1140$$

Содержание работы

1. Сколькими способами можно выбрать председателя, заместителя и профорга из 9 человек?

2. Сколькими способами можно рассадить 7 человек по 9 вагонам?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 32

Тема: «Элементы комбинаторики»

Цель: изучить основные понятия комбинаторики, применить их при решении задач.

Оборудование: справочные пособия.

Содержание работы

1. В соревнованиях по фигурному катанию принимали участие россияне, итальянцы, украинцы, немцы, китайцы и французы. Сколькими способами могут распределиться места по окончании соревнований?
2. Сколько перестановок можно получить из букв слова КОЛОКОЛА?
3. Из учащихся 25 человек нужно выбрать троих дежурных. Сколькими способами это можно сделать?
4. Сколькими способами можно купить 6 пирожных, если имеются 2 сорта пирожных по 5 в каждом?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 33

Тема: «Элементы комбинаторики»

Цель: изучить основные понятия комбинаторики, применить их при решении задач.

Оборудование: справочные пособия.

Содержание работы

1. Научное общество состоит из 25-ти человек. Необходимо выбрать президента общества, вице-президента, ученого секретаря и казначея. Сколькими способами это можно сделать?
2. Сколькими способами можно собрать 6 разноцветных лоскутков в пеструю ленту?
3. Сколькими способами можно выбрать трех делегатов из десяти человек на конференцию?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 34

Тема: «Элементы теории вероятностей»

Цель: изучить основные понятия теории вероятности, применить их при решении задач.

Оборудование: справочные пособия.

Справочный материал

Согласно классическому определению вероятности вероятностью события A называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных

исходов, образующих полную группу. Вероятность события А определяется формулой:

$$P(A) = m/n,$$

где m – число элементарных исходов, благоприятствующих А;

n – число всех возможных элементарных исходов испытания.

Формула полной вероятности позволяет определить вероятность события А, которое может наступить при условии появления одного из несовместных событий B_1, B_2, \dots, B_n , образующих полную группу.

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$$

Чтобы оценить вероятности гипотез B_1, B_2, \dots, B_n , после того как стал известен результат испытания, используется формула Байеса.

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)}$$

Содержание работы

1. В ящике имеется 10 красных и 8 синих шаров. Наудачу вынимают один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется синим.
2. Бросаются два игральных кубика. Какова вероятность, что сумма выпавших очков равна 5.
3. В первом ящике содержится 20 деталей, из них 15 стандартных; во втором 30 деталей, из них 24 стандартных; в третьем – 10 деталей, из них 6 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящика – стандартная.
4. На заводе, изготовляющем болты, первая машина производит 25%, вторая - 35%, третья - 40% всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5, 4 и 2%. Случайно выбранный из продукции болт оказался дефектным. Какова вероятность того, что он был произведен первой машиной?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 35

Тема: «Элементы математической статистики»

Цель: изучить основные понятия математической статистики, применить их при решении задач.

Оборудование: справочные пособия.

Справочный материал

Дискретной (прерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Для задания дискретной случайной величины необходимо перечислить все возможные ее значения и указать их вероятности.

Законом распределения дискретной случайной величины называется соответствие между возможными значениями и их вероятностями. Его можно задать таблично, аналитически в виде функции распределения и графически с помощью многоугольника распределения.

Функция распределения случайной величины X – это функция $F(x)$, которая при каждом значении своего аргумента x численно равна вероятности того, что случайная величина X окажется меньше, чем значение аргумента x :
 $F(x) = P\{X < x\}$

1. Математическое ожидание случайной величины X определяется по формуле:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

Содержание работы

1. Возможные значения случайной величины таковы: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 8$. Известны вероятности первых двух возможных значений: $p_1 = 0,4$; $p_2 = 0,15$. Найти вероятность x_3 .

2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения. Построить многоугольник распределения.

X	1	3	6	8
p	0,2	0,1	0,4	0,3

3. Найти математическое ожидание случайной величины X , зная ее закон распределения.

X	3	5	2
p	0,1	0,6	0,3

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 36

Тема: «Прямые и плоскости в пространстве»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: изучить основные понятия параллельных прямых и плоскостей в пространстве.

ОБОРУДОВАНИЕ: справочные пособия.

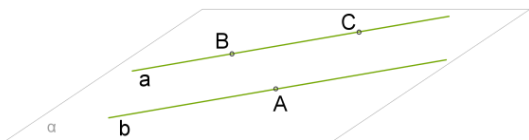
Справочный материал

1. Параллельные прямые в пространстве.

Две прямые в пространстве называются параллельными, если лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Параллельность прямых a и b обозначается так: $a \parallel b$ или $b \parallel a$.

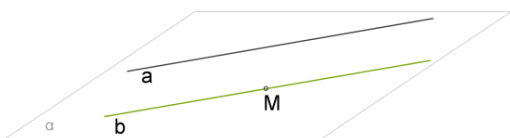
Теорема 1. Через две параллельные прямые можно провести плоскость, и при том только одну.



Доказательство:

1. Так как прямые a и b параллельны, из определения следует, что через них можно провести плоскость α .
2. Чтобы доказать, что такая плоскость только одна, на прямой a обозначаем точки B и C , а на прямой b точку A .
3. Так как через три точки, которые не лежат на одной прямой, можно провести только одну плоскость (2 аксиома), то α является единственной плоскостью, которой принадлежат прямые a и b .

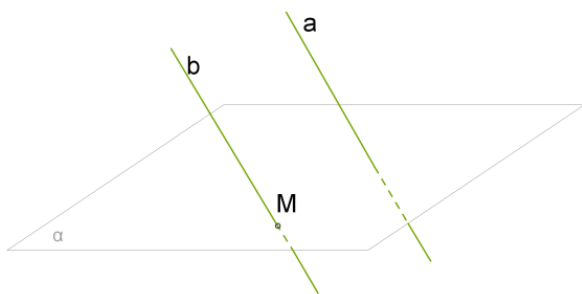
Теорема 2. Через любую точку пространства вне данной прямой можно провести прямую, параллельную данной прямой, и при том только одну.



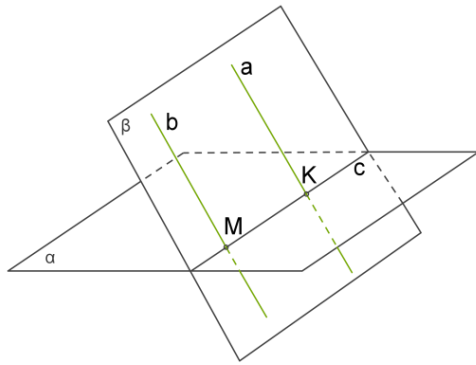
Доказательство:

1. Через данную прямую a и точку M , которая не лежит на прямой, проводится плоскость α .
2. Такая плоскость только одна (т.к. через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну).
3. А в плоскости α через точку M можно провести только одну прямую b , которая параллельна прямой a .

Теорема 3. Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.



(рис. 1)



(рис. 2)

Доказательство:

Рассмотрим две параллельные прямые a и b и допустим, что прямая b пересекает плоскость α в точке M (рис. 1).

Из 1-ой теоремы известно, что через параллельные прямые a и b можно провести только одну плоскость β .

Так как точка M находится на прямой b , то M также принадлежит плоскости β (рис. 2). Если у плоскостей α и β есть общая точка M , то у этих плоскостей есть общая прямая c , которая является прямой пересечения этих плоскостей (4 аксиома).

Прямые a , b и c находятся в плоскости β .

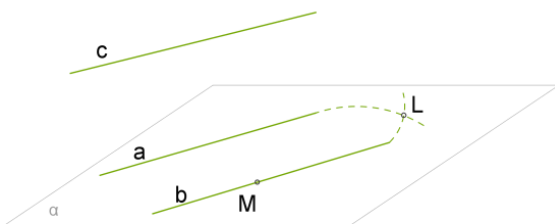
Если в этой плоскости одна из параллельных прямых b пересекает прямую c , то вторая прямая a тоже пересекает c .

Точку пересечения прямых a и c обозначим за K .

Так как точка K находится на прямой c , то K находится в плоскости α и является единственной общей точкой прямой a и плоскости α .

Значит, прямая a пересекает плоскость α в точке K .

Теорема 4. Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.



Дано: $a \parallel c$ и $b \parallel c$

Доказать: $a \parallel b$

Доказательство:

Выберем точку M на прямой b .

Через точку M и прямую a , которая не содержит эту точку, можно провести только одну плоскость α (Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести только одну плоскость).

Возможны два случая:

1) прямая b пересекает плоскость α или 2) прямая b находится в плоскости α .

Пусть прямая b пересекает плоскость α .

Значит, прямая c , которая параллельна прямой b , тоже пересекает плоскость α . Так как $a \parallel c$, то получается, что a тоже пересекает эту плоскость. Но прямая a не может одновременно пересекать плоскость α и находиться в плоскости α .

Получаем противоречие, следовательно, предположение, что прямая b пересекает плоскость α , является **неверным**.

Значит, прямая b находится в плоскости α .

Теперь нужно доказать, что прямые a и b параллельны.

Пусть у прямых a и b есть общая точка L .

Это означает, что через точку L проведены две прямые a и b , которые параллельны прямой c . Но по второй теореме это невозможно. Поэтому предположение неверное, и прямые a и b не имеют общих точек.

Так как прямые a и b находятся в одной плоскости α и у них нет общих точек, то они параллельны.

Всё множество прямых в пространстве, которые параллельны данной прямой, называется пучком параллельных прямых.

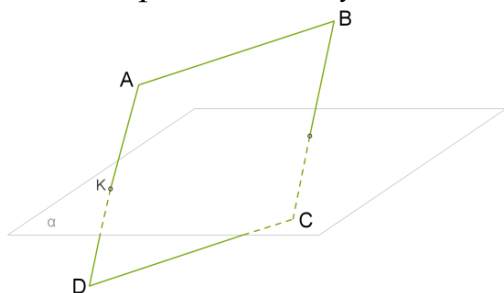
Выводы:

1) Любые две прямые пучка параллельных прямых параллельны между собой.

2) Параллельности прямых в пространстве присуща транзитивность: если $a \parallel b$ и $b \parallel c$, то $a \parallel c$.

Пример:

Одна сторона параллелограмма пересекает плоскость. Докажите, что прямая, которая содержит противоположную сторону параллелограмма, тоже пересекает эту плоскость.



Допустим, что у параллелограмма $ABCD$ сторона AD пересекает плоскость α в точке K .

Так как противоположные стороны параллелограмма параллельны, то, согласно третьей теореме, прямая, которая содержит сторону CD , тоже пересекает плоскость α .

2. Параллельность прямой и плоскости

Согласно аксиомам, если две точки прямой находятся в некоторой плоскости, то прямая лежит в этой плоскости. Отсюда следует, что возможны три случая взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве:

- 1) прямая лежит (находится) в плоскости
- 2) прямая и плоскость имеют только одну общую точку (прямая и плоскость пересекаются)
- 3) прямая и плоскость не имеют общих точек

Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.

2. Параллельность плоскостей

Как известно из аксиом стереометрии, если плоскости имеют одну общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку. Значит две плоскости или пересекаются или не пересекаются.

Плоскости, которые не пересекаются, называются параллельными.

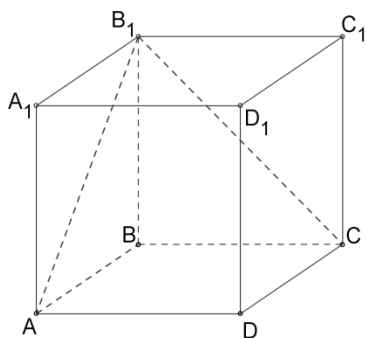
Параллельные плоскости α и β обозначаются $\alpha \parallel \beta$

Пример:

Любая конструкция с полом, потолком и стенами даёт нам представление о параллельных плоскостях - пол и потолок как две параллельные плоскости, боковые стены как параллельные плоскости.

Содержание работы

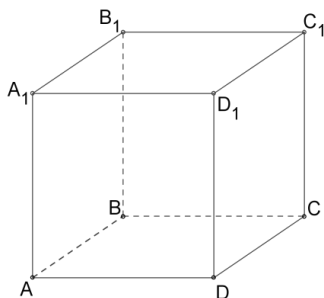
Задание 1. Определи взаимное расположение данной прямой и плоскости.



1. Прямая AA_1 и плоскость (CBB_1) ;
2. Прямая BC и плоскость (AA_1B_1) ;
3. Прямая CC_1 и плоскость (ABD) ;
4. Прямая CB_1 и плоскость (BB_1C_1) ;
5. Прямая AB_1 и плоскость (BCD) ;

Задание 2. Дан треугольник ABC . На сторонах AB и AC соответственно отложены точки D и E так, что $DE=3$ см и $AD:BD=8:3$. Через точки B и C проведена плоскость α , которая параллельна отрезку DE . Найти сторону BC .

Задание 3. Используя данный куб



1. определи взаимное расположение плоскостей ABC и AA_1B

2. назови плоскость параллельную AA_1B_1

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 37

Тема: «Прямые и плоскости в пространстве»

Цель: изучить основные понятия перпендикулярных прямых и плоскостей в пространстве.

Оборудование: справочные пособия.

Справочный материал

1. Перпендикулярность прямой и плоскости.

Две прямые называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90° .

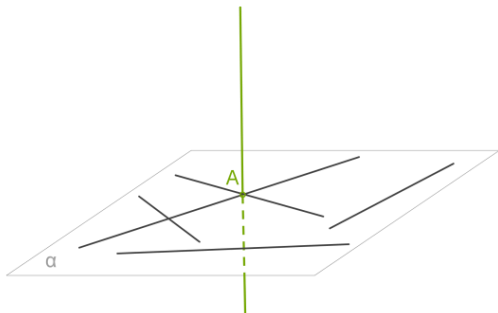
В пространстве перпендикулярными называют не только пересекающиеся прямые, но и скрещивающиеся прямые, так как мы говорим **об угле**, который могут образовать эти прямые, если их поместить в одной плоскости.

Так же как и в плоскости, в пространстве перпендикулярные прямые a и b обозначают $a \perp b$.

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая перпендикулярна к этой прямой.

Перпендикулярность прямой и плоскости

Прямая, пересекающая плоскость, называется перпендикулярной этой плоскости, если она перпендикулярна каждой прямой, которая лежит в данной плоскости.

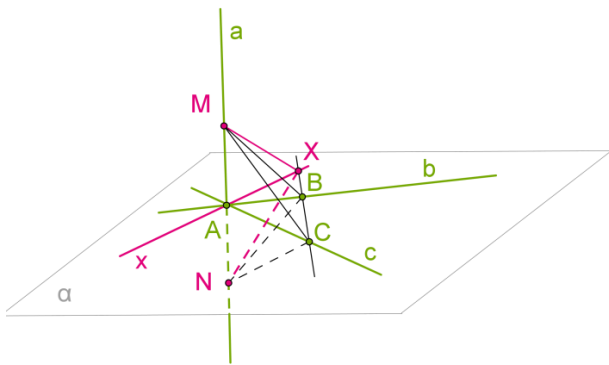


Перпендикулярность прямой и плоскости обозначается как $a \perp \alpha$.

Через любую точку пространства проходит прямая перпендикулярно данной плоскости, притом только одна.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости.

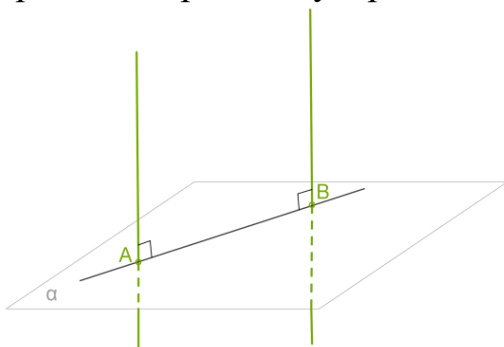
Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.



Доказательство:

Пусть a — прямая, перпендикулярная прямым b и c в плоскости. Проведём прямую a через точку A пересечения прямых b и c . Докажем, что прямая a перпендикулярна плоскости, то есть каждой прямой в этой плоскости.

1. Проведём произвольную прямую x через точку A в плоскости и покажем, что она перпендикулярна прямой a . Проведём в плоскости произвольную прямую, не проходящую через точку A и пересекающую прямые b , c и x . Пусть точками пересечения будут B , C и X .
2. Отложим на прямой a от точки A в разные стороны равные отрезки AM и AN .
3. Треугольник MCN равнобедренный, так как отрезок AC является высотой по условию теоремы и медианой по построению ($AM=AN$). По той же причине треугольник MBN тоже равнобедренный.
4. Следовательно, треугольники MBC и NBC равны по трём сторонам.
5. Из равенства треугольников MBC и NBC следует равенство углов MBX и NBX и, следовательно, равенство треугольников MBX и NBX по двум сторонам и углу между ними.
6. Из равенства сторон MX и NX этих треугольников заключаем, что треугольник MXN равнобедренный. Поэтому его медиана XA является также высотой. А это и значит, что прямая x перпендикулярна a . По определению прямая a перпендикулярна плоскости.

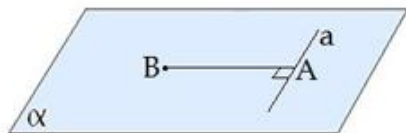


Свойства перпендикулярных прямой и плоскости.

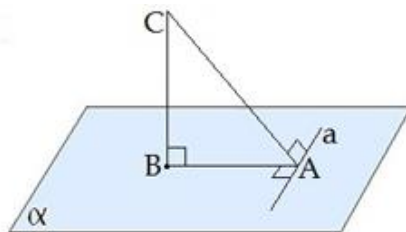
1. Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.
2. Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.

2. Теорема о трёх перпендикулярах

Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна ее проекции, то она перпендикулярна и самой наклонной.



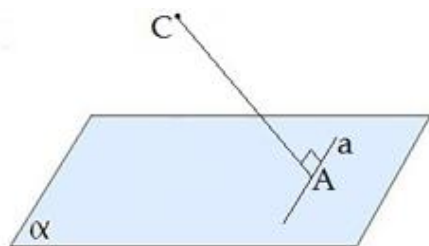
$a \perp AB$



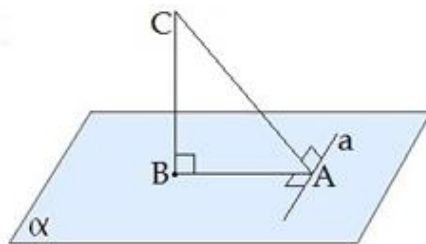
$a \perp AB, BC \perp BA \Rightarrow a \perp CA$

Справедлива
также обратная
теорема:

Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.



$a \perp AC$



$a \perp AC, BC \perp BA \Rightarrow a \perp BA$

**Содержание
работы**

Задание 1. Проведенная к плоскости перпендикулярная прямая пересекает плоскость в точке О. На прямой отложен отрезок AD, точка О является серединой этого отрезка. Определить вид и периметр треугольника ABD, если $AD = 6$ см, а $OB = 4$ см (ответ округлить до одной десятой).

Задание 2. Прямая PQ параллельна плоскости α . От точек P и Q к плоскости проведены прямые $PP_1 \perp \alpha$ и $QQ_1 \perp \alpha$. Известно, что $PQ = PP_1 = 7,6$ см. Определить вид четырехугольника PP_1Q_1Q и найти его периметр.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 38

Тема: «Прямые и плоскости в пространстве»

Цель: изучить основные понятия перпендикулярных прямых и плоскостей в пространстве.

Оборудование: справочные пособия.

Содержание работы

Задание 1. К плоскости α проведена наклонная, длина которой равна 13 см, проекция наклонной равна 5 см. На каком расстоянии от плоскости находится точка, из которой проведена наклонная?

Задание 2. К плоскости α проведена наклонная AB ($A \in \alpha$). Длина наклонной равна 4 см, наклонная с плоскостью образует угол 60° . Вычислить, на каком расстоянии от плоскости находится точка B .

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 39

Тема: «Прямые и плоскости в пространстве»

Цель: проверить и оценить знания учащихся по изученному материалу.

Оборудование: справочные пособия.

Содержание работы

Вариант 1

1. Прямая a параллельна прямой b , прямая b параллельна прямой c . Можно ли утверждать, что прямая a параллельна прямой c ? Почему?
2. Плоскость пересекает стороны AB и BC треугольника ABC соответственно в точках D и E , причем $AC \parallel DE$. Найдите AC , если $DB:AD = 3:2$ и $DE = 9$ см.
3. Отрезок MN , равный 23 см, лежит в плоскости α . Точка P не лежит в ней. Точки A и B – середины отрезков MP и NP . Вычислите расстояние между точками A и B .
4. Найти диагональ прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны 3 см, 4 см и 5 см.

Вариант 2

1. Верно ли, что две прямые, параллельные одной и той же плоскости, параллельны между собой? Почему?
2. Плоскость пересекает стороны AB и BC треугольника ABC соответственно в точках D и E , причем $AC \parallel DE$. Найдите AC , если $DB:AD = 4:3$ и $DE = 12$ см.
3. Отрезок MN , равный 13 см, лежит в плоскости α . Точка P не лежит в ней. Точки A и B – середины отрезков MP и NP . Вычислите расстояние между точками A и B .
4. Найти диагональ прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны 2 см, 3 см и 5 см.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 40

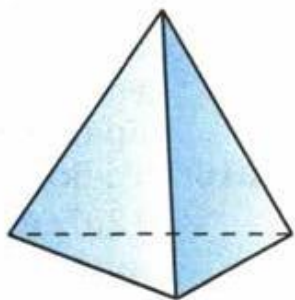
Тема: «Многогранники»

Цель: научиться изображать многогранники, решать задачи.

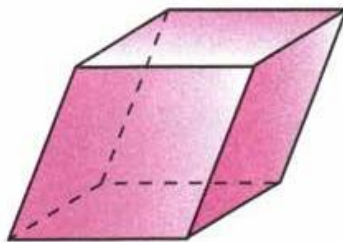
Оборудование: справочные пособия.

Справочный материал

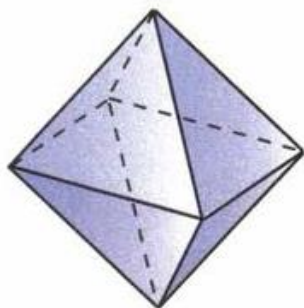
Виды многогранников:



тетраэдр

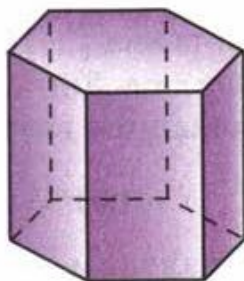


параллелепипед



октаэдр

Многогранник, составленный из двух равных многоугольников, расположенных в параллельных плоскостях, и n параллелограммов, называется призмой (см. рис.).



Многоугольники называются основаниями, а параллелограммы – боковыми гранями призмы. Стороны параллелограммов называются боковыми ребрами призмы. Эти ребра как противоположные стороны параллелограммов, последовательно приложенных друг к другу, равны и параллельны.

Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется высотой призмы.

Если боковые ребра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется прямой, в противном случае – наклонной. Высота прямой призмы равна ее боковому ребру.

Прямая призма называется правильной, если ее основания – правильные многоугольники. У такой призмы все боковые грани – равные прямоугольники.

Площадью полной поверхности призмы называется сумма площадей всех ее граней, а площадью боковой поверхности призмы – сумма площадей ее

боковых граней. Площадь $S_{\text{полн}}$ полной поверхности выражается через площадь $S_{\text{бок}}$ боковой поверхности и площадь $S_{\text{осн}}$ основания призмы формулой

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}.$$

Теорема

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.

Содержание работы

Задание 1. Докажите, что: а) у прямой призмы все боковые грани – прямоугольники; б) у правильной призмы все боковые грани – равные прямоугольники.

Задание 2. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 12 см и 5 см. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол в 45° . Найдите боковое ребро параллелепипеда.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 41

Тема: «Многогранники»

Цель: научиться изображать многогранники, решать задачи.

Оборудование: справочные пособия.

Содержание работы

Задание 1. Основанием прямого параллелепипеда является ромб с диагоналями 10 см и 24 см, а высота параллелепипеда равна 10 см. Найдите большую диагональ параллелепипеда.

Задание 2. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 8 см, боковое ребро равно 6 см. Найдите площадь сечения, проходящего через сторону верхнего основания и противоположащую вершину нижнего основания.

Задание 3. Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция с основаниями 25 см и 9 см и высотой 8 см. Найдите двугранные углы при боковых ребрах призмы.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 42

Тема: «Многогранники»

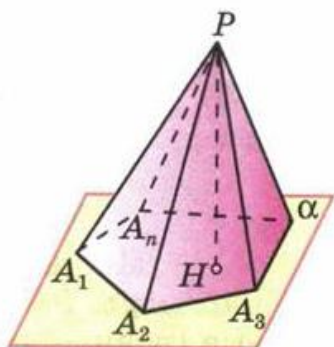
Цель: научиться находить ребра, высоту и площадь поверхности пирамиды.

Оборудование: справочные пособия.

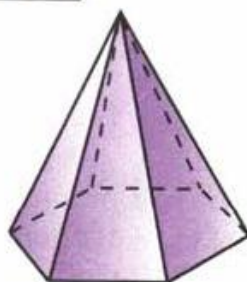
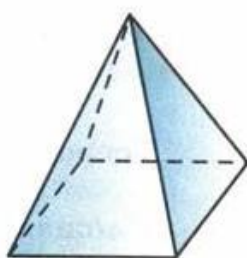
Справочный материал

Многогранник, составленный из n -угольника $A_1A_2\dots A_n$ и n треугольников (1), называется пирамидой. Многоугольник $A_1A_2\dots A_n$ называется основанием, а n треугольников – боковыми гранями пирамиды. Точка P называется вершиной пирамиды, а отрезки PA_1, PA_2, \dots, PA_n – ее боковыми ребрами.

Пирамиду с основанием $A_1A_2\dots A_n$ и вершиной P обозначают так: $PA_1A_2\dots A_n$ и называют n -угольной пирамидой. На рисунке изображены четырехугольная и шестиугольная пирамиды. Ясно, что треугольная пирамида – это тетраэдр.



Пирамида. Многоугольник $A_1A_2A_3 \dots A_n$ – основание пирамиды. Треугольники $A_1PA_2, A_2PA_3, \dots, A_nPA_1$ – боковые грани, P – вершина пирамиды



Площадью полной поверхности пирамиды называется сумма площадей всех ее граней (т.е. основания и боковых граней), а площадью боковой поверхности пирамиды – сумма площадей ее боковых граней. Очевидно, $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$.

Пирамида называется правильной, если ее основание – правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является ее высотой.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется апофемой.

Теорема

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.

Содержание работы

Задание 1. Основанием пирамиды является ромб, сторона которого равна 5 см, а одна из диагоналей равна 8 см. Найдите боковые ребра пирамиды, если

высота ее проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 7 см.

Задание 2. Основанием пирамиды является параллелограмм, стороны которого равны 20 см и 36 см, а площадь равна 360 см^2 . Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 12 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Задание 3. Основанием пирамиды является параллелограмм со сторонами 5 м и 4 м и меньшей диагональю 3 м. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 2 м. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 43

Тема: «Измерения в геометрии»

Цель: научиться находить объемы тел.

Оборудование: справочные пособия.

Справочный материал

Теорема

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.

Следствие 1

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

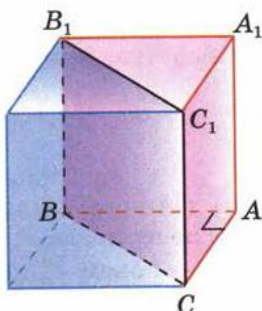
$$V = abc = Sh.$$

Следствие 2

Объем прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник, равен произведению площади основания на высоту.

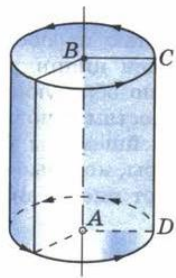
Теорема

Объем прямой призмы равен произведению площади основания на высоту.



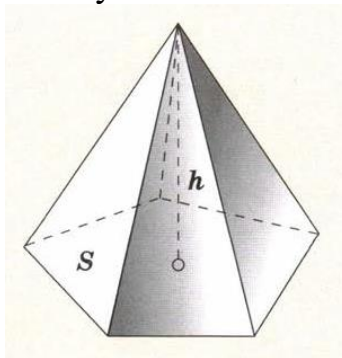
Теорема

Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту.



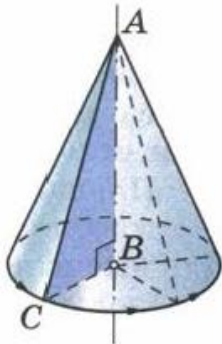
Теорема

Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.



Теорема

Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.



Теорема

Объем шара радиуса R равен $\frac{4}{3} \pi R^3$.

Содержание работы

Задание 1. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, стороны основания которого равны a и b, а высота равна h, если:

а) $a = 11$, $b = 12$, $h = 15$; б) $a = 3\sqrt{2}$, $b = \sqrt{5}$, $h = 10\sqrt{2}$;

в) $a = 18$, $b = 5\sqrt{3}$, $h = 13$; г) $a = 3\frac{1}{3}$, $b = \sqrt{5}$, $h = 0,96$.

Задание 2. Найдите объем куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если: а) $AC = 12$ см;
б) $AC_1 = 3\sqrt{2}$ м; в) $DE = 1$ см, где E - середина ребра AB .

Задание 3. Найдите объем прямой призмы $ABCA_1 B_1 C_1$, если: а) угол $BAC = 120^\circ$, $AB = 5$ см, $AC = 3$ см и наибольшая из площадей боковых граней равна 35 см^2 ; б) угол $AB_1 C = 60^\circ$, $AB_1 = 3$, $CB_1 = 2$ и двугранный угол с ребром BB_1 прямой.

Задание 4. Площадь основания цилиндра равна Q , а площадь его осевого сечения равна S . Найдите объем цилиндра.

Задание 5. Найдите объем наклонной призмы, у которой основанием является треугольник со сторонами 10 см, 10 см и 12 см, а боковое ребро, равное 8 см, составляет с плоскостью основания угол в 60° .

Задание 6. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, высота которой равна 12 см. а сторона основания равна 13 см.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 44

Тема: «Измерения в геометрии»

Цель: закрепить знания учащихся при решении задач

Оборудование: справочные пособия.

Справочный материал

Задание 1. Пусть h , r и V соответственно высота, радиус основания и объем конуса. Найдите:

- а) V , если $h = 3$ см, $r = 1,5$ см;
- б) h , если $r = 4$ см, $V = 48\pi \text{ см}^3$;
- в) r , если $h = m$, $V = p$.

Задание 2. Высота конуса равна 5 см. На расстоянии 2 см от вершины его пересекает плоскость, параллельная основанию. Найдите объем исходного конуса, если объем меньшего конуса, отсекаемого от исходного, равен 24 см^3 .

Задание 3. Найдите объем конуса, если площадь его основания равна Q , а площадь боковой поверхности равна P .

Задание 4. Пусть V – объем шара радиуса R , а S – площадь его поверхности. Найдите: а) S и V , если $R = 4$ см; б) R и S , если $V = 113,04 \text{ см}^3$; в) R и V , если $S = 64\pi \text{ см}^2$

Задание 5. Вода покрывает приблизительно $\frac{3}{4}$ земной поверхности. Сколько

квадратных километров земной поверхности занимает суша? (Радиус Земли считать равным: 6375 км.)

Задание 6. Сколько кожи пойдет на покрывку футбольного мяча радиуса 10 см? (На швы добавить 8 % от площади поверхности мяча.)

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 45

Тема: «Координаты и векторы»

Цель: изучить основные понятия векторов в пространстве.

Оборудование: справочные пособия.

Справочный материал

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Вектором называется направленный отрезок, то есть такой отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой – концом (рис. 1).

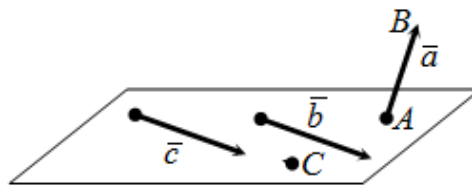


Рис. 1

Если начало вектора совпадает с его концом, то такой вектор называется **нулевым** и обозначается как $\vec{0}$. (На рисунке 1 нулевым является вектор $\overrightarrow{CC} = \vec{0}$).

Замечание. Любая точка пространства рассматривается как нулевой вектор.

Длиной или **модулем** $|\overrightarrow{AB}|$ вектора \overrightarrow{AB} называется длина отрезка АВ.

Замечание. Длина нулевого вектора равна нулю.

Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным**.

Коллинеарные и неколлинеарные векторы в пространстве.

Два ненулевых вектора называются **коллинеарными** или **параллельными**, если они лежат на одной или на параллельных прямых. (На рисунке 1 таковыми являются векторы \vec{b} и \vec{c}).

Сонаправленные и противоположные векторы в пространстве.

Два ненулевых коллинеарных вектора \vec{a} и \vec{b} называются **сонаправленными**, если их направления совпадают ($\vec{a} \uparrow \vec{b}$); и **противоположно направленными** – в противном случае ($\vec{a} \downarrow \vec{b}$).

Векторы называются **равными**, если они сонаправлены и их длины равны.

Утверждение. От любой точки пространства можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.

Два ненулевых вектора и называются **противоположными**, если их длины равны и они противоположно направлены.

Векторы называются **компланарными**, если при откладывании их от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости.

Замечание. Любые два коллинеарных вектора компланарны; три вектора, среди которых имеется два коллинеарных, также компланарны.

Примеры решения задач

ПРИМЕР 1

Задание Найти координаты вектора \overrightarrow{AB} , если $A(1; -2; 0)$, $B(2; -1; 2)$.

Решение Для нахождения координат вектора от координат его конца отнимем соответствующие координаты начала:
$$\overrightarrow{AB} = (2 - 1; -1 - (-2); 2 - 0) = (1; 1; 2).$$

Если вектор задан в пространстве своими координатами, то его длина равна корню квадратному из суммы квадратов координат.

ПРИМЕР 2

Задание Найти модуль вектора $\vec{a} = (0; -3; 2)$.

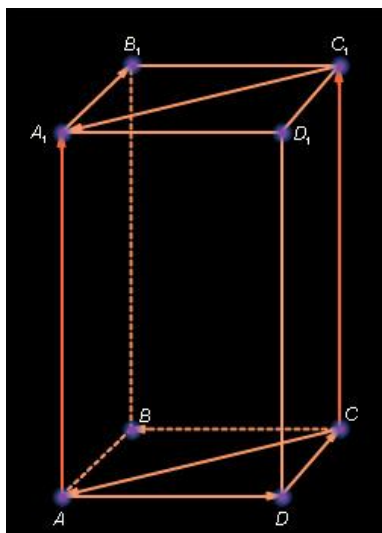
Решение Модуль вектора равен корню квадратному из суммы квадратов его координат, то есть для заданного вектора \vec{a} имеем:
$$|\vec{a}| = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{0 + 9 + 4} = \sqrt{13}$$

Содержание работы

1. Найти координаты вектора \overrightarrow{AB} , если $A(9; -6; 1)$, $B(4; -1; 0)$.

2. Найти длину вектора \vec{a} , если $\vec{a} = (3; -4; 0)$.

3. Используя рисунок, укажите равные векторы, сонаправленные и противоположные векторы.



ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 46

Тема: «Координаты и векторы»

Цель: научиться находить скалярное произведение векторов.

Оборудование: справочные пособия.

Справочный материал

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} обозначается так: $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Таким образом,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{a \ b}).$$

Скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ выражается формулой $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Косинус угла α между ненулевыми векторами \vec{a} и \vec{b} вычисляется по формуле: $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Содержание работы

Задание 1. Даны векторы $\vec{a}\{1; -1; 2\}$ и $\vec{b}\{-1; 1; 1\}$ и $\vec{c}\{5; 6; 2\}$. Вычислите $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$, $\vec{a} \cdot \vec{a}$.

Задание 2. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{j} - 5\vec{k}$. Вычислите $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{i}$, $\vec{b} \cdot \vec{j}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 47

Тема: «Координаты и векторы»

Цель: научиться находить скалярное произведение векторов.

Оборудование: справочные пособия.

Содержание работы

Задание 1. Вычислите угол между векторами:

- а) $\vec{a}\{2; -2; 0\}$ и $\vec{b}\{3; 0; -3\}$;
- б) $\vec{a}\{\sqrt{2}; \sqrt{2}; 2\}$ и $\vec{b}\{-3; -3; 0\}$;
- в) $\vec{a}\{0; 5; 0\}$ и $\vec{b}\{0; -\sqrt{3}; 1\}$;
- г) $\vec{a}\{-2,5; 2,5; 0\}$ и $\vec{b}\{-5; 5; 5\sqrt{2}\}$.

Задание 2. Даны точки $A(1;3;0)$, $B(2;3;-1)$ и $C(1;2;-1)$. Вычислите угол между векторами \vec{CA} и \vec{CB} .

Задание 3. Даны векторы $\vec{a}\{-1; 2; 3\}$ и $\vec{b}\{5; x; -1\}$. При каком значении x выполняется условие: а) $\vec{a} \vec{b} = 3$; б) $\vec{a} \vec{b} = -1$; в) $\vec{a} \perp \vec{b}$?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 48

Тема: «Координаты и векторы»

Цель: проверить и оценить знания учащихся по изученному материалу.

Оборудование: справочные пособия.

Содержание работы

Вариант 1

1. Даны векторы $\vec{a}\{3; -5; 2\}$, $\vec{b}\{0; 7; 1\}$ и $\vec{c}\{-3; -1; 0\}$. Вычислите координаты вектора $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.
2. Вычислите скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} , если $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 4$ и угол между этими векторами равен 60° ($\cos 60^\circ = 0,5$).
3. Дан вектор $\vec{a}\{5; -1; 2\}$. Запишите разложение этих векторов по координатным векторам \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} .
4. Дан вектор $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. Запишите координаты вектора \vec{a} и вычислите его длину.
5. Найдите координаты вектора \vec{AB} , если $A(5; -1; 3)$, $B(2; -2; 4)$.
6. Вычислите расстояние между точками A и B , если $A(3; -1; 1)$ и $B(-4; 0; 5)$.
7. Даны векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , причем: $\vec{a} = 6\vec{i} - 8\vec{k}$, $|\vec{b}| = 1$, $\vec{c}\{4; 1; m\}$, $(\vec{a}; \vec{b}) = 60^\circ$.
Найти: а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) значение m , при котором $\vec{a} \perp \vec{c}$.

Вариант 2

1. Даны векторы $\vec{a} \{5; -1; 1\}$, $\vec{b} \{-2; 1; 0\}$ и $\vec{c} \{0; 2; 4\}$. Вычислите координаты вектора $\vec{p} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$.

2. Вычислите скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} , если $\vec{a} \{5; -1; 1\}$, $\vec{b} \{-2; 1; 0\}$

3. Дан вектор $\vec{a} \{3; -2; 1\}$. Запишите разложение этих векторов по координатным векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

4. Дан вектор $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$. Запишите координаты векторов \vec{a} и вычислите его длину.

5. Найдите координаты вектора \overrightarrow{AB} , если $A(6; 3; -2)$, $B(2; 4; -5)$.

6. Вычислите расстояние между точками A и B , если $A(-2; 1; 2)$ и $B(-3; -1; 3)$.

7. Даны векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , причем: $\vec{a} = 4\vec{j} - 3\vec{k}$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $\vec{c} \{2; m; 8\}$, $(\vec{a}; \vec{b}) = 45^\circ$.

Найти: а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) значение m , при котором $\vec{a} \perp \vec{c}$.

Информационное обеспечение обучения

Печатные издания

Основные учебные издания

1. Башмаков, М.И. Математика: учебник / Башмаков М.И. — Москва: КноРус, 2021. — 394 с. — ISBN 978-5-406-08166-2. — URL: <https://book.ru/book/939220>
2. Башмаков, М.И. Математика. Практикум: учебно-практическое пособие / Башмаков М.И., Энтина С.Б. — Москва: КноРус, 2021. — 294 с. — ISBN 978-5-406-05758-2. — URL: <https://book.ru/book/939104>

Дополнительные учебные издания

3. Об образовании в Российской Федерации: федер. закон от 29.12. 2012 № 273-ФЗ (в ред. Федеральных законов от 07.05.2013 № 99-ФЗ, от 07.06.2013 № 120-ФЗ, от 02.07.2013 № 170-ФЗ, от 23.07.2013 № 203-ФЗ, от 25.11.2013 № 317-ФЗ, от 03.02.2014 № 11-ФЗ, от 03.02.2014 № 15-ФЗ, от 05.05.2014 № 84-ФЗ, от 27.05.2014 № 135-ФЗ, от 04.06.2014 № 148-ФЗ, с изм., внесенными Федеральным законом от 04.06.2014 № 145-ФЗ, в ред. от 03.07.2016, с изм. от 19.12.2016.).
4. Приказ Министерства образования и науки РФ от 17.05.2012 № 413 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования».
5. Приказ Министерства образования и науки РФ от 31 декабря 2015 г. N 1578 "О внесении изменений в федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования, утвержденный приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 мая 2012 г. N413"
6. Письмо Департамента государственной политики в сфере подготовки рабочих кадров и ДПО Министерства образования и науки РФ от 17.03.2015 № 06-259 «Рекомендации по организации получения среднего общего образования в пределах освоения образовательных программ среднего профессионального образования на базе основного общего образования с учетом требований федеральных государственных образовательных стандартов и получаемой профессии или специальности среднего профессионального образования».

Электронные издания (электронные ресурсы)

7. www.fcior.edu.ru (Информационные, тренировочные и контрольные материалы).
8. www.school-collection.edu.ru (Единая коллекции цифровых образовательных ресурсов).