

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Саратовский государственный технический университет имени  
Гагарина Ю.А.»

Филиал федерального государственного бюджетного образовательного  
учреждения высшего образования  
«Саратовский государственный технический университет имени  
Гагарина Ю.А.» в г.Петровске



УТВЕРЖДАЮ

Директор филиала СГТУ  
имени Гагарина Ю.А. в г.Петровске  
Е.А.Бесшапошникова  
«30» июня 2021 г.

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по дисциплине  
ЕН.01 «Математика»

специальности  
15.02.15 «Технология металлообрабатывающего производства»

Методические указания рассмотрены  
на заседании предметной (цикловой) комиссии  
общеобразовательных, ОГСЭ и ЕН дисциплин,  
профессиональных модулей специальностей  
социально-экономического профиля  
«14» июня 2021 года, протокол №13

Председатель ПЦК Мед /О.В.Медведева/

Петровск 2021

## **Пояснительная записка**

Методические указания по выполнению практических работ подготовлены на основе рабочей программы учебной дисциплины «Математика», разработанной на основе ФГОС СПО по специальности 15.02.15 «Технология металлообрабатывающего производства» и соответствующих общих (ОК) и профессиональных (ПК) компетенций:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 09. Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 10. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

ПК 1.3. Разрабатывать технологическую документацию по обработке заготовок на основе конструкторской документации в рамках своей компетенции в соответствии с нормативными требованиями, в том числе с использованием систем автоматизированного проектирования.

ПК 1.4. Осуществлять выполнение расчетов параметров механической обработки и аддитивного производства в соответствии с принятым технологическим процессом согласно нормативным требованиям, в том числе с использованием систем автоматизированного проектирования.

ПК 1.5. Осуществлять подбор конструктивного исполнения инструмента, материалов режущей части инструмента, технологических приспособлений и оборудования в соответствии с выбранным технологическим решением, в том числе с использованием систем автоматизированного проектирования.

ПК 1.6. Оформлять маршрутные и операционные технологические карты для изготовления деталей на механических участках машиностроительных производств, в том числе с использованием систем автоматизированного проектирования.

ПК 1.7. Осуществлять разработку и применение управляющих программ для металлорежущего или аддитивного оборудования в целях реализации принятой технологии изготовления деталей на механических участках машиностроительных производств, в том числе с использованием систем автоматизированного проектирования.

ПК 1.10. Разрабатывать планировки участков механических цехов машиностроительных производств в соответствии с производственными задачами, в том числе с использованием систем автоматизированного проектирования.

ПК 2.3. Разрабатывать технологическую документацию по сборке узлов или изделий на основе конструкторской документации в рамках своей компетенции в соответствии с нормативными требованиями, в том числе с использованием систем автоматизированного проектирования.

ПК 2.4. Осуществлять выполнение расчетов параметров процесса сборки узлов или изделий в соответствии с принятым технологическим процессом согласно нормативным требованиям, в том числе с использованием систем автоматизированного проектирования.

ПК 2.5. Осуществлять подбор конструктивного исполнения сборочного инструмента, материалов исполнительных элементов инструмента, приспособлений и оборудования в соответствии с выбранным технологическим решением, в том числе с использованием систем автоматизированного проектирования.

ПК 2.6. Оформлять маршрутные и операционные технологические карты для сборки узлов или изделий на сборочных участках машиностроительных производств, в том числе с использованием систем автоматизированного проектирования.

ПК 2.7. Осуществлять разработку управляющих программ для автоматизированного сборочного оборудования в целях реализации принятой технологии сборки узлов или изделий на сборочных участках машиностроительных производств, в том числе с использованием систем автоматизированного проектирования.

ПК 2.10. Разрабатывать планировки участков сборочных цехов машиностроительных производств в соответствии с производственными задачами, в том числе с использованием систем автоматизированного проектирования.

ПК 3.1. Осуществлять диагностику неисправностей и отказов систем металлорежущего и аддитивного производственного оборудования в рамках своей компетенции для выбора методов и способов их устранения.

ПК 3.4. Организовывать ресурсное обеспечение работ по наладке металлорежущего и аддитивного оборудования в соответствии с производственными задачами, в том числе с использованием SCADA систем.

ПК 3.5. Контролировать качество работ по наладке, подналадке и техническому обслуживанию металлорежущего и аддитивного оборудования и соблюдение норм охраны труда и бережливого производства, в том числе с использованием SCADA систем.

ПК 4.1. Осуществлять диагностику неисправностей и отказов систем сборочного производственного оборудования в рамках своей компетенции для выбора методов и способов их устранения.

ПК 4.4. Организовывать ресурсное обеспечение работ по наладке сборочного оборудования в соответствии с производственными задачами, в том числе с использованием SCADA систем.

ПК 4.5. Контролировать качество работ по наладке, подналадке и техническому обслуживанию сборочного оборудования и соблюдение норм охраны труда и бережливого производства, в том числе с использованием SCADA систем.

ПК 5.2. Организовывать определение потребностей в материальных ресурсах, формирование и оформление их заказа с целью материально-технического обеспечения деятельности структурного подразделения.

Целью освоения учебной дисциплины «Математика» является:

- формирование представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, об идеях и методах математики;
- развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, для продолжения образования и самообразования;
- обеспечение сформированности представлений о социальных, культурных и исторических факторах становления математики;
- обеспечение сформированности логического, алгоритмического и математического мышления;
- обеспечение сформированности умений применять полученные знания при решении различных задач;
- обеспечение сформированности представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления.

При выполнении практических работ студент должен **уметь**:

- анализировать сложные функции и строить их графики;
- выполнять действия над комплексными числами;
- вычислять значения геометрических величин;
- производить действия над матрицами и определителями;
- решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики;
- решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчисления;
- решать системы линейных уравнений различными методами.

При выполнении практических работ студент должен **знать**:

- основные математические методы решения прикладных задач;
- основы дифференциального и интегрального исчисления;
- основные методы и понятия математического анализа, линейной алгебры;
- теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики;
- роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

Содержание практических занятий определено рабочей программой и тематическим планированием, соответствует теоретическому материалу изучаемых разделов учебной дисциплины.

Объём практических занятий по дисциплине определяется учебным планом по данной специальности.

Продолжительность практического занятия - 2 академических часа. Перед проведением практического занятия преподавателем организуется инструктаж, а по ее окончании – обсуждение итогов.

Комплект методических указаний по выполнению практических работ дисциплины «Математика» содержит 21 практических занятий.

**Перечень практических работ  
по дисциплине «Математика»**

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1.**

Тема: «Теория пределов».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2.**

Тема: «Теория пределов».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3.**

Тема: «Теория пределов».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4.**

Тема: «Теория пределов».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5.**

Тема: «Производная, исследование функций с помощью производных».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6.**

Тема: «Производная, исследование функций с помощью производных».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 7.**

Тема: «Производная, исследование функций с помощью производных».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8.**

Тема: «Производная, исследование функций с помощью производных».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 9.**

Тема: «Интеграл и его приложения».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 10.**

Тема: «Интеграл и его приложения».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 11.**

Тема: «Интеграл и его приложения».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 12.**

Тема: «Интеграл и его приложения».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 13.**

Тема: «Контрольная работа».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 14.**

Тема: «Алгебраическая форма комплексного числа».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 15.**

Тема: «Алгебраическая форма комплексного числа».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 16.**

Тема: «Тригонометрическая форма комплексного числа».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 17.**

Тема: «Контрольная работа».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 18.**

Тема: «Матрицы и определители».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 19.**

Тема: «Кривые второго порядка».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 20.**

Тема: «Кривые второго порядка».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 21.**

Тема: «Контрольная работа».

## **ИНСТРУКЦИИ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ**

Прежде чем приступить к выполнению заданий, внимательно прочитайте данные рекомендации. Практические работы включают в себя задания следующих видов:

### **Решение математических задач.**

Одних вопросов и советов преподавателя студенту недостаточно для обучения решению задач. Нельзя забывать, что "умение решать задачи есть искусство, приобретаемое практикой".

Вопросы и советы студенту условно можно подразделить на четыре группы. Нужно помнить что вопросы, рекомендуемые для первого этапа, окажут помощь и на втором этапе, а рекомендуемые для второго этапа - на третьем и т. п. Дело в том, что этапы решения задачи не могут быть строго изолированы один от другого, между ними существует определенная связь, в их единстве заключается процесс решения задачи.

#### **1. Вопросы и советы для усвоения содержания задачи (1-й этап).**

Нельзя приступать к решению задачи, не уяснив четко, в чем заключается задание, т. е. не установив, каковы данные и искомые или посылки и заключения. **Первый совет:** не спешить начинать решать задачу. Этот совет не означает, что задачу надо решать как можно медленней. Он означает, что решению задачи должна предшествовать подготовка, заключающаяся в следующем:

- а) сначала следует ознакомиться с задачей, внимательно прочитав ее содержание. При этом схватывается общая ситуация, описанная в задаче;
- б) ознакомившись с задачей, необходимо вникнуть в ее содержание. При этом нужно следовать такому совету: выделить в задаче данные и искомые, а в задаче на доказательство - посылки и заключения.
- в) Если задача геометрическая или связана с геометрическими фигурами, полезно сделать чертеж к задаче и обозначить на чертеже данные и искомые г)
- В том случае, когда данные (или искомые) в задаче не обозначены, надо ввести подходящие обозначения. При решении текстовых задач алгебры и начал анализа вводят обозначения искомых или других переменных, принятых за искомые.
- д) Уже на первой стадии решения задачи, стадии понимания задания, полезно попытаться ответить на вопрос: "Возможно ли удовлетворить условию?" Не всегда сразу удастся ответить на этот вопрос, но иногда это можно сделать. Отвечая на вопрос: "Возможно ли удовлетворить условию?", полезно выяснить, однозначно ли сформулирована задача, не содержит ли она избыточных или противоречивых данных. Одновременно выясняется, достаточно ли данных для решения задачи.

**2. Составление плана решения задачи (2-й этап).** Составление плана решения задачи является главным шагом на пути ее решения. Правильно

составленный план решения задачи почти гарантирует правильное ее решение. Но составление плана может оказаться сложным и длительным процессом. Поэтому попробуйте ответить на вопросы которые помогут вам лучше и быстрее составить план решения задачи, "открыть" идею ее решения:

а) Известна ли вам какая-либо родственная задача? Аналогичная задача? Если такая или родственная задача известна, то составление плана решения задачи не будет затруднительным. Но далеко не всегда известна задача, родственная решаемой. В этом случае может помочь в составлении плана решения совет.

б) Подумайте, известна ли вам задача, к которой можно свести решаемую. Если такая задача известна вам, то путь составления плана решения данной задачи очевиден: свести решаемую задачу к решенной ранее. Может оказаться, что родственная задача неизвестна вам и вы не можете свести данную задачу к какой-либо известной. План же сразу составить не удастся.

Стоит воспользоваться советом: "Попытайтесь сформулировать задачу иначе". Иными словами, попытайтесь перефразировать задачу, не меняя ее математического содержания.

При переформулировании задачи пользуйтесь либо определениями данных в ней математических понятий (заменяют термины их определениями), либо их признаками (точнее сказать, достаточными условиями). Надо отметить, что способность учащегося переформулировать текст задачи является показателем понимания математического содержания задачи.

Переформулировка задачи это перевод ее на язык математики, т. е. язык алгебры, геометрии или анализа. Это, скорее, формализация задачи, "математизация" ее. К такому приему и приходится часто прибегать при решении многих текстовых задач.

г) Составляя план решения задачи, всегда следует задавать себе вопрос: "Все ли данные задачи использованы?" Выявление неучтенных данных задачи облегчает составление плана ее решения.

д) При составлении плана задачи иногда бывает полезно следовать совету: "Попытайтесь преобразовать искомые или данные". Часто преобразование искомого или данных способствует более быстрому составлению плана решения. При этом искомые преобразуют так, чтобы они приблизились к данным, а данные - так, чтобы они приблизились к искомому. Так, при каждом случае тождественных преобразований данные преобразуются, постепенно приближаясь к результату (искомому). Аналогично уравнение, систему уравнений, неравенство или систему неравенств преобразуют в равносильные, чтобы найти их корни или множество решений.

е) Нередко случается так, что, вы все же не можете составить план ее решения. Тогда может помочь еще один совет: "Попробуйте решить лишь часть задачи", т. е. попробуйте сначала удовлетворить лишь части условий, с тем чтобы далее искать способ удовлетворить оставшимся условиям задачи.

ж) Нередко в составлении плана решения задачи помогает ответ на вопрос: "Для какого частного случая возможно достаточно быстро решить эту задачу?" Обнаружив такой частный случай, вы ставите перед собой новую цель -

воспользоваться решением задачи в найденном частном случае для более общего (но, может быть, не самого общего) случая. Так можно поступить, постепенно обобщая задачу до исходной, решаемой задачи. Предполагаемый вариант рассуждений - явное применение полной индукции. Итак, совет: "Рассмотрите частные случаи задачной ситуации, решите задачу для какого-нибудь частного случая, примените индуктивные рассуждения".

**3. Реализация плана решения задачи (3-й этап).** План указывает лишь общий контур решения задачи. При реализации плана решающий задачи рассматриваются все детали, которые вписываются в этот контур. Эти детали надо рассматривать тщательно и терпеливо. Но при этом (решающему задачу) полезно следовать некоторым советам:

- а) Проверяйте каждый свой шаг, убеждайтесь, что он совершен правильно. Иными словами, нужно доказывать правильность каждого шага ссылками на соответствующие, известные ранее математические факты, предложения.
- б) При реализации плана поможет и совет: "Замените термины и символы их определениями". Так, термин "параллелограмм" заменяется его определением: "Четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны", термин "предел числовой последовательности" для доказательства, например, того предложения, что предел суммы двух последовательностей, имеющих пределы, равен сумме пределов этих последовательностей, можно заменить, и вполне успешно, его определением.
- в) При решении некоторых задач помогает совет: "Воспользуйтесь свойствами данных в условии объектов".

**4. Анализ и проверка правильности решения задачи (4-й этап).** Даже очень хорошие студенты, получив ответ и тщательно изложив ход решения, считают задачу решенной. А ведь получение результата не означает еще, что задача решена правильно. Тем более не означает, что для решения выбран лучший, наиболее удачный, изящный, если можно так выразиться, вариант. По В. М. Брадису, задачу можно считать решенной, если найденное решение:

- безошибочно,
- обоснованно,
- имеет исчерпывающий характер.

Поэтому анализ решения задачи, проверка решения и достоверности результата должны быть этапом решения задачи. Итак, два совета: "Проверьте результат", "Проверьте ход решения". Проверка результата может производиться различными способами. Проверая правильность хода решения, мы тем самым убеждаемся и в правильности результата. Значит, надо выполнить совет: "Проверьте все узловые пункты решения", еще раз убедитесь в истинности проведенных рассуждений.

Второй способ проверки результата заключается в получении того же результата применением другого метода решения задачи, поэтому полезно всегда задавать решающему вопрос: "Нельзя ли тот же результат получить иначе?" Иными словами, стоит последовать совету: "Решите задачу другим способом". Если при решении задачи другим способом получен тот же

результат, что и в первом случае, задачу можно считать решенной правильно. К тому же получение различных вариантов решения одной и той же задачи имеет важное обучающее значение.

### **Выполнение контрольных работ.**

1. При подготовке к любой контрольной работе рекомендуется сначала внимательно разобраться с теоретическим материалом по учебнику, затем закрепить свои знания, решая задачи.
2. Подготовиться к работе означает: вы внимательно просматриваете тексты задач и прикидываете, какие из предложенных задач вам по силам и выполняете их в первую очередь.
3. Если вы переоценили свои силы — взяли трудную задачу — и не решили, то не отчаивайтесь. Дома в спокойной обстановке разберитесь, в чем причина вашей неудачи, и решите эту же задачу.
4. Если у вас пока нет большой любви к определенной дисциплине, и вас нервируют трудные задачи, то не расстраивайтесь: для начала выберите задачи начального уровня. Решая самые простые задачи, вы постепенно приобретаете уверенность в своих силах.
5. Если вы успешно решили легкую задачу на уроке, то попросите у преподавателя более трудную задачу. Если на уроке не успели, то обратитесь к преподавателю с просьбой дать вам возможность решить более трудную задачу во внеурочное время.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1

Тема: «Теория пределов»

Цель: научиться вычислять пределы функции.

Оборудование: справочные пособия, микрокалькуляторы.

### Справочный материал

#### 1. Приращение аргумента и функции

Возьмём в области определения функции  $y=f(x)$  произвольно два значения аргумента, первое будем называть начальным (для точки  $M$ ), второе – изменённым (для точки  $M_1$ ).

Начальное значение  $x$  считается постоянным в ходе всего рассуждения, а точка  $A$  (рис.1), соответствующая ему на оси  $Ox$ , – неподвижной. Изменённое значение аргумента принято обозначать  $x + \Delta x$ , ему на рис. 1. соответствует точка  $P$ .

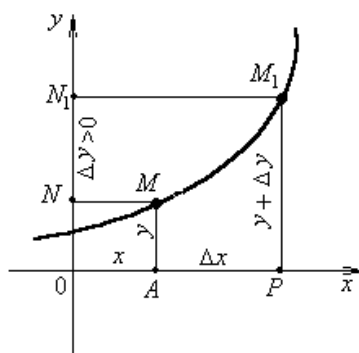


рис.1

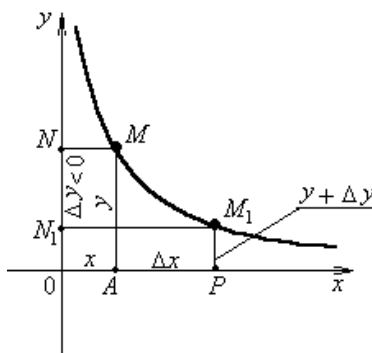


рис.2

▼  $\Delta x$  выражает ту величину, на которую изменяется аргумент при переходе от первого значения аргумента ко второму, и называется *приращением аргумента*.



$\Delta x$  равняется разности между вторым и первым значениями аргумента.

Значениям  $x$  и  $x + \Delta x$  аргумента соответствуют определённые значения функции: начальное  $y$  и изменённое  $y + \Delta y$ .

▼  $\Delta y$  есть величина, на которую изменяется значение функции  $y$  при изменении аргумента на величину  $\Delta x$ , и называется *приращением функции*.

▲

$\Delta y$  равняется разности между вторым и первым значениями функции.

Построим точки  $M(x; y)$  и  $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y)$  графика функции  $y=f(x)$  (рис.2).  $\Delta y = NN_1 = ON_1 - ON$ .

Геометрически приращение функции  $\Delta y$  есть разность ординат точек графика функции, соответствующих изменённому и начальному значениям аргумента.

Приращение функции  $\Delta y$  может быть как положительным, так и отрицательным. При положительном  $\Delta y$  отрезок  $NN_1 = \Delta y$  на оси ординат (рис.1) расположен выше неподвижной точки  $N$ , при отрицательном  $\Delta y$  – ниже её (рис.2).

А для того, что бы найти выражение приращения функции  $y=f(x)$ , обусловленное изменением значения аргумента  $x$  на величину  $\Delta x$  следует найти:

1. начальное значение функции есть:  $y=f(x)$ ;
2. изменённое значение её равно:  $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ ;
3. приращение функции:  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ .

**Задание.** Найти приращение  $\Delta y$  функции  $y = \frac{1}{x}$ . Соответствующее произвольному приращению  $\Delta x$  аргумента  $x$ .

## 2. Предел функции в точке

Пусть функция  $y=f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$ , кроме быть может, самой точки  $x_0$ .

**Определение 1** («на языке последовательностей», или по Гейне.)

▼ 1. Число  $A$  называется *пределом функции*  $y=f(x)$  в точке  $x_0$  (или при  $x \rightarrow x_0$ ), если для любой последовательности допустимых значений аргумента  $x_n$ ,  $n \in N$  ( $x \neq x_0$ ), сходящейся к  $x_0$  (т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ), последовательность соответствующих значений функции  $f(x_n)$ ,  $n \in N$  сходится к числу  $A$  (т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ ). ▲

В этом случае пишут  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  или  $f(x) \rightarrow A$  при  $x \rightarrow x_0$ .

**Геометрический смысл** предела функции:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  означает, что для всех точек  $x$ , достаточно близких к точке  $x_0$ , соответствующие значения функции как угодно мало отличаются от числа  $A$ .

**Определение 2** (на «языке  $\varepsilon$ - $\delta$ », или по Коши)

▼ 2. Число  $A$  называется *пределом функции*  $y=f(x)$  в точке  $x_0$  (или при  $x \rightarrow x_0$ ), если для любого положительно  $\varepsilon$  найдётся такое положительное число  $\delta$ , что для всех  $x \neq x_0$ , удовлетворяющих неравенству  $|x - x_0| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ . ▲

Записывают  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ .

**Геометрический смысл** предела функции:  $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , если для любой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $A$  найдётся такая  $\delta$ -окрестность точки  $x_0$ , что для всех  $x \neq x_0$  из этой  $\delta$ -окрестности соответствующие значения функции  $f(x)$  лежат в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $A$ .

Иными словами, точки графика функции  $y=f(x)$  лежат внутри полосы шириной  $2\varepsilon$ , ограниченной прямыми  $y=A+\varepsilon$ ,  $y=A-\varepsilon$ . Очевидно, что величина  $\delta$  зависит от выбора  $\varepsilon$ , поэтому пишут  $\delta=\delta(\varepsilon)$ .

## 3. Предел функции при $x \rightarrow \infty$

Пусть функция  $y=f(x)$  определена в промежутке  $(-\infty; \infty)$ .

▼ Число  $A$  называется *пределом функции*  $f(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ , если для любого положительного числа  $\varepsilon$  существует такое число  $M=M(\varepsilon)>0$ , что при всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $|x|>M$  выполняется неравенство  $|f(x)-A|<\varepsilon$ . (20) ▲

Если  $x \rightarrow +\infty$ , то пишут  $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ;

Если  $x \rightarrow -\infty$ , то пишут  $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

*Геометрический смысл* этого определения таков: для любого положительного  $\varepsilon$  существует такое положительное  $M$ , что при  $x \in (-\infty; -M)$  или  $x \in (M; +\infty)$  соответствующие значения функции совпадают в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $A$ , т.е. точки графика лежат в полосе шириной  $2\varepsilon$ , ограниченной прямыми  $y=A+\varepsilon$  и  $y=A-\varepsilon$ .

#### 4. Основные теоремы о пределах

Рассмотрим теоремы, которые облегчают нахождение пределов функции.

*Формулировка и доказательство теорем для случаев, когда  $x \rightarrow x_0$  и  $x \rightarrow \infty$ , аналогичны.* В приводимых теоремах будем считать, что пределы  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x)$  существуют и конечны.

**Теорема 1.** Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm \phi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x).$$

*Следствие.* Функция может иметь только один предел при  $x \rightarrow x_0$ .

**Теорема 2.** Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot \phi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x).$$

Теоремы 1 и 2 справедливы для любого конечного числа функций.

*Следствие.* Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

*Следствие.* Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^n.$$

*Следствие.*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{\phi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x)}.$$

$x_0$  может обозначать и число и один из символов  $\infty, +\infty, -\infty$ .

**Теорема.** Предел дроби равен пределу числителя, делённому на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x)}, \quad \left( \lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) \neq 0 \right).$$

Рассмотрим выражение вида  $\frac{f(x)}{\phi(x)}$ . Возможны случаи:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = b$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\phi(x)}$
$a=0$	$b \neq 0$	0
$a \neq 0$	$b=0$	$\infty$
$a=0$	$b=0$	НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ дробь может принимать различные значения, а также вовсе не иметь предела
$a = \infty$	$b = \infty$	

## 5. Признаки существования пределов

Не всякая функция, даже ограниченная, имеет предел. Во многих вопросах анализа бывает достаточно только убедиться в существовании предела функции. В таких случаях пользуются признаками существования предела.

**Теорема (о пределе промежуточной функции).** Если функция  $f(x)$  заключена между двумя функциями  $\phi(x)$  и  $g(x)$ , стремящимися к одному и тому же пределу, то она также стремится к этому пределу, т.е. если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A, \quad \phi(x) \leq f(x) \leq g(x), \quad \text{то}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

**Теорема (о пределе монотонной функции).** Если функция  $f(x)$  монотонна и ограничена при  $x < x_0$  или при  $x > x_0$ , то существует соответственно её левый

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) \quad \text{или её правый предел} \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0).$$

**Следствие.** Ограниченная монотонная последовательность  $x_n, n \in N$ , имеет предел.

## 6. Вычисление предела

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

Для того чтобы найти

1. вычисляем  $f(x_0)$ , если данное выражение имеет смысл, то предел равен этому выражению.

- при нахождении пределов применяют соотношения:

$$\lim_{x \rightarrow a} k = k; \quad (k = \text{const}); \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} k \cdot x = \pm \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{k}{x} = \pm 0; \quad \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{k}{x} = \pm \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} 0, & 0 < a < 1; \\ +\infty, & a > 1. \end{cases}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & 0 < a < 1; \\ 0, & a > 1. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & a > 1; \\ -\infty, & 0 < a < 1. \end{cases}; \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & a > 1; \\ +\infty, & 0 < a < 1. \end{cases}$$

Далеко не всякая подстановка предельного значения в функцию вместо независимой переменной может сразу привести к нахождению предела. Случаи, в которых подстановка предельного значения в функцию не даёт значения предела, называют *неопределённостями*; к ним относятся неопределённости видов:

$$\left[ \frac{0}{0} \right]; \left[ \frac{\infty}{\infty} \right]; [0 \cdot \infty]; [\infty - \infty]; [1^\infty]; [\infty^0]; [0^0] \text{ и др.}$$

2. Если в результате вычислений получилась одна из неопределённостей, то следует применить соответствующие правила для раскрытия данной неопределённости.

**Неопределённость вида**  $\left[ \frac{0}{0} \right]$

- Для того чтобы разрешить неопределённость вида  $\left[ \frac{0}{0} \right]$ , до вычисления предела средствами алгебры в числителе и знаменателе выделяем множитель  $(x - a) \rightarrow 0$  и сокращаем на него, т.к.  $(x - a) \neq 0$ .

- Чтобы раскрыть неопределённость  $\left[ \frac{0}{0} \right]$ , в которой числитель или знаменатель содержит иррациональность, следует соответствующим образом избавиться от иррациональности.

**Неопределённость вида**  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$

- Числитель и знаменатель, *сложные степенные* функции: необходимо вынести за скобку в числителе и знаменателе дроби неизвестное с наибольшим показателем степени среди всех слагаемых дроби; после сокращения дроби неопределённость устраняется.
- Предел рационального выражения вида

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots + b_mx^m}$$

при  $x \rightarrow \infty$  будем рассматривать как предел частного двух многочленов, который равен:

- 0, если степень числителя  $n$  меньше степени знаменателя  $m$ , т.е.  $n < m$ ;
  - отношению коэффициентов при старших членах, если степени числителя  $n$  и знаменателя  $m$  равны, т.е.  $n = m$ ;
  - $\infty$ , если степень числителя  $n$  больше степени знаменателя  $m$ , т.е.  $n > m$ .
- Числитель и знаменатель, *сложные показательные* функции: за скобку вынести наиболее быстро возрастающее слагаемое среди всех слагаемых дроби; после сокращения дроби неопределённость устраняется.

**Неопределённости**  $[\infty - \infty]$  и  $[0 \cdot \infty]$

- Неопределённости  $[\infty - \infty]$  и  $[0 \cdot \infty]$  раскрываются путём

преобразования и сведения их к неопределённости  $\left[ \frac{0}{0} \right]$  или  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$ .

## Содержание работы

**Задание: Вычислить пределы**

$$6. \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{5}} \frac{5x^2 - 9x - 2}{5x^2 + x};$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^3 - 27};$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x - 1}{2x - 3};$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - 1}{5x + 1};$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 5}{2x^3 - 1};$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 - 2x}{x + 5x^4};$$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2

**Тема: «Теория пределов»**

**Цель:** научиться вычислять пределы функции.

**Оборудование:** справочные пособия, микрокалькуляторы.

## Содержание работы

**Задание: Вычислить пределы**

$$1. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4};$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 25}{x^2 + 9x + 20};$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{9 - x^2}{3x - x^2};$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1};$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x - 2x^2 + 2}{x^3 - 2x^2 + 3x};$$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3

**Тема: «Теория пределов»**

**Цель:** научиться вычислять пределы функции.

**Оборудование:** справочные пособия, микрокалькуляторы.

### Содержание работы

**Задание:** Вычислить пределы

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + x - 6};$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4};$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{5x - x^2}{25 - x^2};$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9};$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 9x - x^2 + 9}{x^3 - 4x^2 + 3x};$$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4

**Тема:** «Теория пределов»

**Цель:** научиться вычислять пределы функции.

**Оборудование:** справочные пособия, микрокалькуляторы.

### Содержание работы

**Задание:** Вычислить пределы

$$6. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 7x + 3}{2x^2 - x};$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2};$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3}{4x - 1};$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{4x^2 - 1};$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 3x - 1}{4 + x};$$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5

**Тема:** «Производная, исследование функций с помощью производных»

**Цель:** научиться находить производные функций, значение производной в точке.

**Оборудование:** справочные пособия, микрокалькуляторы.

## Справочный материал

### Производная

$$f'(x_0) = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \Delta x = x - x_0$$

### Правила вычисления производных

$$\begin{aligned} (cu)' &= cu' & (u \cdot v)' &= u'v + v' \\ (u \pm v)' &= u' \pm v' & \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - v'u}{v^2} \end{aligned}$$

### Формулы производных

1) $c' = 0$	
2) $x' = 1$	9) $(\sin x)' = \cos x$
3) $(kx)' = k$	10) $(\cos x)' = -\sin x$
4) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	11) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
5) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	12) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
6) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	13) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
7) $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}$	14) $(e^x)' = e^x$
8) $\left(\frac{1}{x^3}\right)' = -\frac{3}{x^4}$	15) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
	16) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

## Содержание работы

1. Найдите производную функции:

$$f(x) = \frac{x^3}{6} - 0,5x^2 - 3x + 2,$$

вычислите ее значение при  $x = -1$ .

2. Найдите  $f'(x)$ , если  $f(x) = x\sqrt{x}$ .

3. Найдите производную функции  $g(x) = \frac{3}{5-4x}$ .

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6

**Тема:** «Производная, исследование функций с помощью производных»

**Цель:** научиться находить производные функций, значение производной в точке.

**Оборудование:** справочные пособия, микрокалькуляторы.

### **Содержание работы**

1. Найдите производную функции:  $f(x) = -\frac{x^3}{6} + 1,5x^2 + 5x - 3$ , вычислите ее значение при  $x = -2$ .
2. Найдите  $f'(x)$ , если  $f(x) = -x\sqrt{x}$ .
3. Найдите производную функции  $g(x) = \frac{4-3x}{x+2}$ .

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 7**

**Тема:** «Производная, исследование функций с помощью производных»

**Цель:** научиться находить производные функций, значение производной в точке.

**Оборудование:** справочные пособия, микрокалькуляторы.

### **Содержание работы**

1. Найдите значение  $f'(0,5)$ , если  $f(x) = \frac{3}{5-4x}$ .
2. Решите уравнение:  $f'(x) = 0$ , если  $f(x) = 4x + \frac{8}{x}$ .
3. Решите неравенство:  $g'(x) < 0$ , если  $g(x) = (x - 3)(x + 2)^2$ .

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8**

**Тема:** «Производная, исследование функций с помощью производных»

**Цель:** научиться находить производные функций, значение производной в точке.

**Оборудование:** справочные пособия, микрокалькуляторы.

### **Содержание работы**

1. Найдите значение  $f'(-0,5)$ , если  $f(x) = \frac{4}{3+2x}$ .
2. Решите уравнение:  $g(x) = 0$ , если  $g(x) = 3x + \frac{9}{x}$ .
3. Решите неравенство:  $f'(x) > 0$ , если  $f(x) = (4 - x)(x + 3)^2$ .

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 9**

**Тема:** «Интеграл и его приложения»

**Цель:** научиться вычислять неопределенный интеграл различными способами.

**Оборудование:** таблицы первообразных некоторых функций, микрокалькуляторы.

## Справочный материал

### 1. Свойства неопределенного интеграла:

$$1. \left( \int f(x) dx \right)' = (F(x) + C)' = f(x);$$

$$2. d \left( \int f(x) dx \right) = f(x) dx;$$

$$3. \int dF(x) = F(x) + C;$$

$$4. \int (u + v - w) dx = \int u dx + \int v dx - \int w dx; \text{ где } u, v, w - \text{некоторые функции от } x.$$

$$\int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx;$$

### 2. Таблица основных интегралов.

Интеграл		Значение	Интеграл		Значение
1	$\int \operatorname{tg} x dx$	$+C \mid \cos x \mid - \ln$	9	$\int e^x dx$	$e^x + C$
2	$\int \operatorname{ctg} x dx$	$+ C \mid \sin x \mid \ln$	10	$\int \cos x dx$	$\sin x + C$
3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	11	$\int \sin x dx$	$-\cos x + C$
4	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$\operatorname{tg} x + C$
5	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x+a}{x-a} \right  + C$	13	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	$-\operatorname{ctg} x + C$
6		$\ln$	14		

	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$ x + \sqrt{x^2 \pm a^2}  + C$		$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a} + C$
7	$\int x^\alpha dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	15	$\int \frac{1}{\cos x} dx$	$\ln \left  \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right  + C$
8	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln x  + C$	16	$\int \frac{1}{\sin x} dx$	$\ln \left  \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right  + C$

3. Способ подстановки (замены переменных).

**Теорема:** Если требуется найти интеграл  $\int f(x)dx$  (t) иф, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены  $x = (t)dt$  получается:  $\int f(x)dx =$

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Пример 1.

Найти неопределенный интеграл  $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$ .

Сделаем замену  $t = \sin x, dt = \cos x dx$ .

$$\int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C.$$

Пример 2.  $\int x(x^2 + 1)^{3/2} dx$ .

Замена  $t = x^2 + 1; dt = 2x dx; dx = \frac{dt}{2x}$ ; Получаем:

$$\int t^{3/2} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{3/2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2 + 1)^{5/2}}{5} + C;$$

## Содержание работы

Вычислить неопределенный интеграл:

$$1. y = \int x^3 - x^2 + \frac{1}{x^2} dx$$

$$2. y = \int \sqrt[3]{x} dx$$

$$3. y = \int \left(\frac{2+x}{x}\right)^2 dx$$

$$4. y = \int \frac{x^2 + \sqrt{x^3 + 3}}{\sqrt{x}} dx$$

$$5. y = \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$6. y = \int \frac{e^x dx}{1 + e^x}$$

$$7. y = \int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx$$

$$8. y = \int \ln x dx$$

$$9. y = \int x * \sin 2x dx$$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 10

**Тема:** «Интеграл и его приложения»

**Цель:** научиться вычислять неопределенный интеграл различными способами.

**Оборудование:** таблицы первообразных некоторых функций, микрокалькуляторы.

### Содержание работы

$$1. y = \int 4x^3 + 3x^2 - 3 + \frac{1}{x^4} dx$$

$$2. y = \int 2\sqrt{x^3} dx$$

$$3. y = \int \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$$

$$4. y = \int \frac{3x^5 + 4x^2 - 2}{x^3} dx$$

$$5. y = \int \frac{(6x - 5)dx}{\sqrt{3x^2 - 5x + 6}}$$

$$6. y = \int e^{x^2} x dx$$

$$7. y = \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$$

$$8. y = \int x * e^x dx$$

$$9. y = \int \arcsin x \, dx$$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 11

**Тема:** «Интеграл и его приложения»

**Цель:** научиться вычислять определенный интеграл.

**Оборудование:** таблицы первообразных некоторых функций, микрокалькуляторы.

### Справочный материал

**ПРИМЕР 1.** Вычислите интеграл  $\int_{-2}^2 (-4x + 4 + x^2) dx$ .

**РЕШЕНИЕ.** Найдем множество всех первообразных для функции  $-4x + 4 + x^2$ :

$$F(x) = -4 \cdot \frac{x^2}{2} + 4 \cdot x + \frac{x^3}{3} + C = -2x^2 + 4x + \frac{x^3}{3} + C.$$

Пользуясь формулой Ньютона-Лейбница, получаем:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 (-4x + 4 + x^2) dx &= \left( -2x^2 + 4x + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^2 = \left( -2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + \frac{2^3}{3} \right) - \left( -2 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + \frac{(-2)^3}{3} \right) = \\ &= \left( -8 + 8 + \frac{8}{3} \right) - \left( -8 - 8 - \frac{8}{3} \right) = 21 \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

**О т в е т:**  $21 \frac{1}{3}$ .

**ПРИМЕР 2.** Выясните, при каком отрицательном значении переменной  $a$  верно равенство

$$\int_{-2a}^a 2x^3 dx = -7,5?$$

**РЕШЕНИЕ.** Поскольку для  $2x^3$  одной из первообразных является  $\frac{x^4}{2}$ ,

$$\int_{-2a}^a 2x^3 dx = \left( \frac{x^4}{2} \right) \Big|_{-2a}^a = \frac{a^4}{2} - \frac{(-2a)^4}{2} = -\frac{15a^4}{2}.$$

Следовательно, нужно решить уравнение:

$$-\frac{15a^4}{2} = -7,5,$$

$$-\frac{15a^4}{2} = -\frac{15}{2},$$

$$a^4 = 1,$$

$$a = \pm 1.$$

Отрицательный корень этого уравнения – это число  $-1$ .

**О т в е т:**  $-1$ .

## Содержание работы

### Вариант 1

1. Вычислите интегралы: а)  $\int_{-1}^2 x^2 dx$ ; б)  $\int_0^{\frac{\pi}{12}} (1 + \cos 2x) dx$ .
2. Докажите справедливость равенства:  $\int_0^1 (2x + 1) dx = \int_0^2 (x^3 - 1) dx$ .

### Вариант 2

1. Вычислите интегралы: а)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} -2 \sin x dx$ ; б)  $\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$ .
2. Докажите справедливость равенства:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \int_0^{\sqrt[3]{3}} x^2 dx$ .

### Вариант 3

1. Вычислите интегралы: а)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$ ; б)  $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)^2}$ .
2. Докажите справедливость равенства:  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = \int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ .

### Вариант 4

1. Вычислите интегралы: а)  $\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ ; б)  $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{2x}{9}\right)}$ .
2. Докажите справедливость равенства:  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_0^1 dx$ .

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 12

**Тема:** «Интеграл и его приложения»

**Цель:** научиться вычислять определенный интеграл.

**Оборудование:** таблицы первообразных некоторых функций, микрокалькуляторы.

## Содержание работы

### Вариант 1

1. Вычислите интегралы: а)  $\int_{-1}^2 -x^3 dx$ ;

б)  $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) dx$

2. Верно ли неравенство:  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x} < \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^2}$  ?

### Вариант 2

1. Вычислите интегралы: а)  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} -\frac{dx}{\sin^2 x}$ ;

б)  $\int_0^2 (1+3x)^4 dx$ .

3. Верно ли неравенство:  $\int_{-1}^1 x^4 dx < \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$  ?

### Вариант 3

1. Вычислите интегралы: а)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos x dx$ ;

б)  $\int_2^7 \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$ .

2. Верно ли неравенство:  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} > \int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$  ?

### Вариант 4

1. Вычислите интегралы: а)  $\int_1^5 x^4 dx$ ;

б)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$ .

2. Верно ли неравенство:  $\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx > \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^2}$  ?

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 13

**Тема:** «Контрольная работа»

**Цель:** проверить и оценить знания учащихся.

**Оборудование:** справочный материал.

### Содержание работы

#### Вариант 1

1. Найдите область определения функции:

$$y = \sqrt{x^2 + 2x - 3}.$$

2. Найдите производные функций:

а)  $y = \sqrt{x} \cdot (2x^2 - x);$

б)  $y = (2x - 7)^8;$

в)  $y = x + 2\cos x.$

3. Вычислить неопределённый интеграл:

а)  $\int x^3 dx;$

б)  $\int (\cos x + 2x) dx.$

4. Вычислить определённый интеграл:

$$\int_0^2 (1 + 2x)^3.$$

5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2, y = 0, x = 1 \text{ и } x = 2.$$

## Вариант 2

1. Найдите область определения функции:

$$y = \sqrt{x^2 + x - 6}.$$

2. Найдите производные функций:

а)  $y = \sqrt{x} \cdot (3x^5 - x);$

б)  $y = (9x + 5)^4;$

в)  $y = x + 3\sin x.$

3. Вычислить неопределённый интеграл:

а)  $\int x^5 dx;$

б)  $\int (\sin x + 2x) dx.$

4. Вычислить определённый интеграл:

$$\int_1^2 (x + 2)^3.$$

5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2, y = 0, x = 0 \text{ и } x = 2.$$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 14

**Тема:** «Алгебраическая форма комплексного числа»

**Цель:** научиться выполнять арифметические действия над комплексными числами в алгебраической форме.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Справочный материал

Мнимая единица  $i$ ,  $i^2 = -1$ .

*Алгебраическая форма комплексного числа.*

$z = a + ib$ , где  $a, b$  – действительные числа;

$a$  – действительная часть комплексного числа,

$b$  – мнимая часть комплексного числа;

Обозначения действительной и мнимой части:  $a = \operatorname{Re} z, b = \operatorname{Im} z$ .

Модуль комплексного числа:  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Сопряжённые комплексные числа:  $z = a + ib$  и  $\bar{z} = a - ib$ .

*Действия над комплексными числами в алгебраической форме.*

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2);$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2);$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) - i(a_1 b_2 + b_1 a_2)}{a_2^2 + b_2^2}.$$

**Пример:**

$$z_1 + z_2 = 5 + 2i + 2 - 5i = 7 - 3i$$

$$z_1 - z_2 = 5 + 2i - (2 - 5i) = 5 + 2i - 2 + 5i = 3 + 7i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (5 + 2i) \cdot (2 - 5i) = 10 + 4i - 25i + 10 = 20 - 21i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 + 2i}{2 - 5i} = \frac{(5 + 2i)(2 + 5i)}{(2 - 5i)(2 + 5i)} = \frac{10 + 4i + 25i - 10}{4 + 25} = \frac{29i}{29} = i$$

## Содержание работы

**Выполните действия:**

- 1)  $(4 - 3i) + (-2 + i)$ ;
- 2)  $(5 + 6i) + (7 - 6i)$ ;
- 3)  $(-0,7 + 0,3i) + (0,9 - 1,7i)$ ;
- 4)  $(-0,4 - 2,1i) + (0,6 + 3i)$ ;
- 5)  $(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}i) + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)$
- 6)  $(2 + 3i)(6 - 5i)$ ;
- 7)  $(-3 + 2i) \cdot 2 + (7 - 5i) \cdot 3$ ;
- 8)  $\frac{1}{1 - i}$ ;
- 9)  $\frac{5}{1 + 2i}$ ;
- 10)  $\frac{2 + i}{2 - 7i}$ ;

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 15

**Тема:** «Алгебраическая форма комплексного числа»

**Цель:** научиться выполнять арифметические действия над комплексными числами в алгебраической форме.

**Оборудование:** справочные пособия.

## Содержание работы

### Выполните действия:

- 1)  $(0,2-0,3i)(0,4+0,5i)$ ;
- 2)  $(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}i)(\frac{2}{3}-\frac{1}{3})$ ;
- 3)  $(2-3i)^2$ ;
- 4)  $(-1+i)^2$ ;
- 5)  $3+i+(-2+5i)(-1-2i)$ ;
- 6)  $(3-2i)(1+4i)+(-6-i)$ ;
- 7)  $(4-5i)(-2+3i)+(1+2i)(-3+4i)$ ;
- 8)  $^{(2+i)}_{3-2i}$ ;
- 9)  $^{4+3i}_{3-4i}$ ;
- 10)  $^{1+i}_{2-i}+^{2-i}_{3+i}+2i$ .

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 16

**Тема:** «Тригонометрическая форма комплексного числа»

**Цель:** научиться выполнять арифметические действия над комплексными числами в алгебраической форме.

**Оборудование:** справочные пособия.

## Содержание работы

### 1. Найдите модуль комплексного числа:

- 1) 3; 2)  $i$ ; 3)  $-5i$ ; 4)  $-2$ ; 5)  $1+i$ ; 6)  $3-4i$ ; 7)  $-\sqrt{3}+i$ ; 8)  $-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$ .

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 17

**Тема:** «Контрольная работа»

**Цель:** проверить и оценить знания учащихся.

**Оборудование:** справочный материал.

## Содержание работы

### Вариант 1

1<sup>0</sup>. Даны комплексные числа:  $z_1 = 2 - 3i$ ,  $z_2 = i + 1$ ,  $z_3 = -1 - i$ .

Вычислите: а)  $z_1 + z_2$ ; б)  $z_2 - z_3$ ; в)  $z_1 \cdot z_2$ .

2<sup>0</sup>. Изобразите на комплексной плоскости числа

1)  $z = i$ ;

- 2)  $z = 1 - i$ ;  
 3)  $z = 3 - 5i$ .
- 3<sup>0</sup>. Вычислите: а)  $(5+i)(-2+3i)$ ; б)  $\frac{4i}{1+i}$ .
4. Представить следующие комплексные числа в тригонометрической форме:  
 а)  $-3$ ; б)  $-i$ ; в)  $1 + i$ .
5. Решите уравнения:  
 а)  $x^2 - 4x + 8 = 0$ ; б)  $x^2 + ix + 6 = 0$ .

## Вариант 2

- 1<sup>0</sup>. Даны комплексные числа:  $z_1 = 2 - 3i$ ,  $z_2 = i + 1$ ,  $z_3 = -1 - i$ .  
 Вычислите: а)  $z_1 + z_3$ ; б)  $z_1 - z_2$ ; в)  $z_3 \cdot z_2$ .
- 2<sup>0</sup>. Изобразите на комплексной плоскости числа  
 1)  $z = -i$ ;  
 2)  $z = i - 2$ ;  
 3)  $z = 5 - 3i$ .
- 3<sup>0</sup>. Вычислите: а)  $(3+4i)(6-5i)$ ; б)  $\frac{5-i}{2+i}$ .
4. Представить следующие комплексные числа в тригонометрической форме:  
 а)  $-2$ ; б)  $i$ ; в)  $1 - i$ .
5. Решите уравнения:  
 а)  $x^2 + 5x + 9 = 0$ ; б)  $x^2 + ix + 2 = 0$ .

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 18

**Тема:** «Матрицы и определители»

**Цель:** научиться вычислять матрицы, действия над матрицами.

**Оборудование:** справочные пособия, микрокалькуляторы.

### Справочный материал

#### 1. Умножение матрицы на число.

Пример:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 12 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 7 & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & -3 \\ 21 & 0 \end{pmatrix}$$

Для того чтобы умножить матрицу на число, нужно **каждый** элемент матрицы умножить на это число.

#### 2. Сумма (разность) матриц.

Для выполнения сложения (вычитания) матриц, необходимо, чтобы они были одинаковыми по размеру.

Для того чтобы сложить матрицы, необходимо сложить их соответствующие элементы:

$$F + G = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 + (-4) & -1 + (-3) \\ -5 + 15 & 0 + 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12 - 4 & -1 - 3 \\ -5 + 15 & 0 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$$

Для разности матриц правило аналогичное, необходимо найти разность соответствующих элементов.

Пример:

Найти разность матриц

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -15 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - H = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 3 & -15 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - (-4) & 5 - 3 & -17 - (-15) \\ -1 - (-5) & 0 - (-7) & 10 - 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 + 4 & 5 - 3 & -17 + 15 \\ -1 + 5 & 0 + 7 & 10 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

### 3. Умножение матриц.

Чтобы матрицу  $K$  можно было умножить на матрицу  $L$  нужно, чтобы число столбцов матрицы  $K$  равнялось числу строк матрицы  $L$ .

Пример 1:

Умножить матрицу  $K = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$  на матрицу  $L = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Формула умножения для конкретного случая:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 c_1 + b_1 c_2 \\ a_2 c_1 + b_2 c_2 \end{pmatrix}$$

$$KL = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \\ 5 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Пример 2:

Умножить матрицу  $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$  на матрицу  $N = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

Формула:  $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 c_1 + b_1 c_2 & a_1 d_1 + b_1 d_2 \\ a_2 c_1 + b_2 c_2 & a_2 d_1 + b_2 d_2 \end{pmatrix}$

$$MN = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 9 - 3 \cdot 6 & 2 \cdot (-6) - 3 \cdot (-4) \\ 4 \cdot 9 - 6 \cdot 6 & 4 \cdot (-6) - 6 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В результате получена так называемая нулевая матрица.

Пример 3:

Умножить матрицу  $P = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$  на матрицу  $R = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Формула:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 d_1 + b_1 d_2 + c_1 d_3 \\ a_2 d_1 + b_2 d_2 + c_2 d_3 \\ a_3 d_1 + b_3 d_2 + c_3 d_3 \end{pmatrix}$$

$$PR = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 + 8 \cdot (-3) - 4 \cdot 1 \\ 6 \cdot 2 + 9 \cdot (-3) - 5 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 + 7 \cdot (-3) - 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -20 \\ -16 \end{pmatrix}$$

## Содержание работы

### Вариант № 1

1. Найти матрицу  $3A-B$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: } 1) \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 13 & 0 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$$

2. Вычислить произведение матриц:

$$1) \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: } 1) \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 12 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: } 1) \begin{pmatrix} 43 & 10 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 56 & 2 \\ 49 & 11 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 14 & 11 \end{pmatrix}$$

### Вариант № 2

1. Найти матрицу  $A+2B$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: } 1) \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 13 & 0 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$$

2. Вычислить произведение матриц:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: } 1) \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: } 1) \begin{pmatrix} 43 & 10 \\ 49 & 11 \end{pmatrix} 2) \begin{pmatrix} 56 & 2 \\ 14 & 11 \end{pmatrix} 3) \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 19

**Тема:** «Кривые второго порядка»

**Цель:** дать понятие кривых второго порядка; научиться строить кривые второго порядка.

**Оборудование:** справочные пособия, микрокалькуляторы.

### Справочный материал

К кривым второго порядка относят кривые, записанные уравнением  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Ex + Dy + F = 0$ . В зависимости от значений коэффициентов (вещественные числа) это могут быть окружность, эллипс, гипербола, парабола. Эти кривые были известны с глубокой древности. Все эти кривые суть сечения прямого кругового конуса плоскостями (конические сечения).

**Эллипс.** Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух данных точек  $F_1$  и  $F_2$  (фокусов) есть величина постоянная  $2a$ , большая  $F_1F_2$ . Каноническое уравнение (простейшее) уравнение эллипса:  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

Эллипс, заданный таким уравнением симметричен относительно осей координат (рис 1)

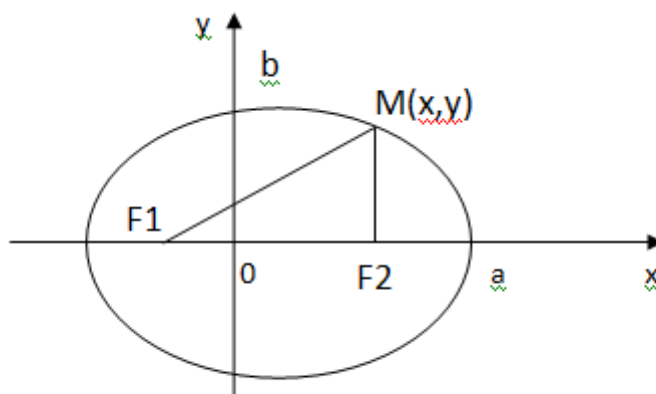


Рис 1

$M(x,y)$  – произвольная точка эллипса,  $(x,y)$  – текущие координаты этой точки. Все точки эллипса удовлетворяют условию:  $F_1M + F_2M = 2a$ .

$a, b$  называются полуосями эллипса,  $a$  – большая полуось,  $b$  – малая полуось.  $F_1$  и  $F_2$  – фокусы эллипса находятся на оси  $ox$  на расстоянии  $C = \sqrt{a^2 - b^2}$  от центра  $O$ . Отношение  $c/a = E$  называется эксцентриситетом эллипса.

**Пример 1.** 1) Написать уравнение эллипса, если  $a=4$ ,  $b=3$ ; 2) Найти координаты фокусов; 3) Найти  $E$ .

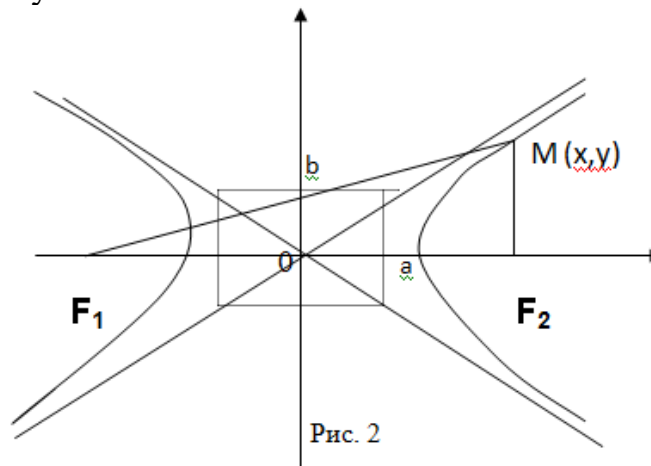
**Ответ:** 1)  $x^2/16 + y^2/9 = 1$ ; 2)  $C = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$ ,  $F_1(-\sqrt{7}, 0)$ ;  $F_2(\sqrt{7}, 0)$ ; 3)  $E = c/a = \sqrt{7}/4 < 1$ .

**Гипербола.** Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний каждой из которых до двух данных точек  $F_1$  и  $F_2$  (фокусов) есть постоянная величина  $2a$  ( $0 < 2a < F_1F_2$ ).

Каноническое (простейшее) уравнение гиперболы.

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$$

Гипербола, заданная уравнением симметрична относительно осей координат (Рис 2). Она пересекает ось  $ox$  в точках  $A_1(-a, 0)$  и  $A_2(+a, 0)$  – вершинах гиперболы и не пересекает ось  $oy$ . Параметр  $a$  называется вещественной полуосью,  $b$  – мнимой полуосью,  $C = \sqrt{a^2 + b^2}$  – расстояние от фокуса до центра симметрии  $O$ . Отношение  $c/a = E$  называется эксцентриситетом гиперболы. Прямые  $y = \pm b/a x$  называются асимптотами гиперболы.



$M(x, y)$  – произвольные точки гиперболы,  $(x, y)$  – текущие координаты произвольной точки. Все точки гиперболы удовлетворяют условию

$$|F_1M - F_2M| = 2a.$$

**Пример 2.** Дана гипербола  $x^2 - 4y^2 = 16$ . 1) Написать каноническое уравнение гиперболы; 2) Найти вещественную и мнимую полуоси; 3) Найти асимптоты гиперболы; 4) Вычислить эксцентриситет  $E$ .

**Ответ:** 1)  $x^2/16 - y^2/4 = 1$ ; 2)  $a = \sqrt{16} = 4$ ;  $b = \sqrt{4} = 2$ . 3)  $y = \pm(b/a)x$  или  $y = \pm(2/4)x$  или  $y = \pm(1/2)x$ ; 4)  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ ,

$$E = c/a = (2\sqrt{5})/4 = (\sqrt{5})/2;$$

$$E = (\sqrt{5})/2 > 1.$$

**Парабола.** Параболой называется геометрическое место точек, одинаково удаленных от данной точки (фокуса) и данной прямой (директрисы).

Каноническое уравнение параболы имеет два вида:

- 1)  $y^2 = 2px$  – парабола симметрична относительно  $ox$  (рис.3)
- 2)  $x^2 = 2py$  – парабола симметрична относительно  $oy$  (рис.4)

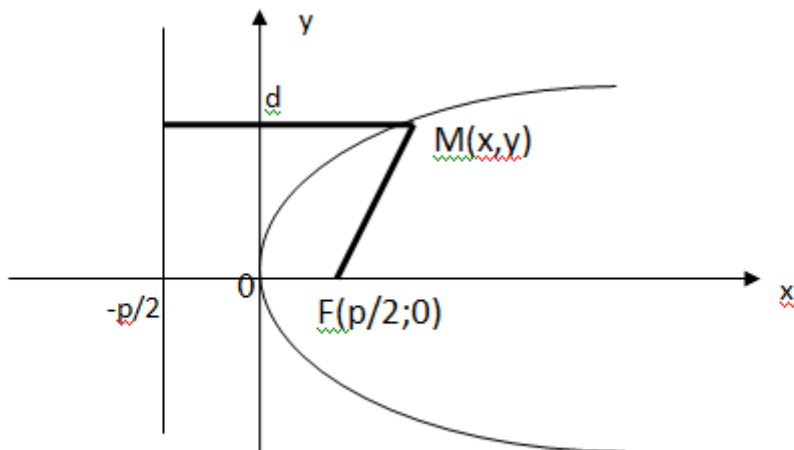


Рис. 3

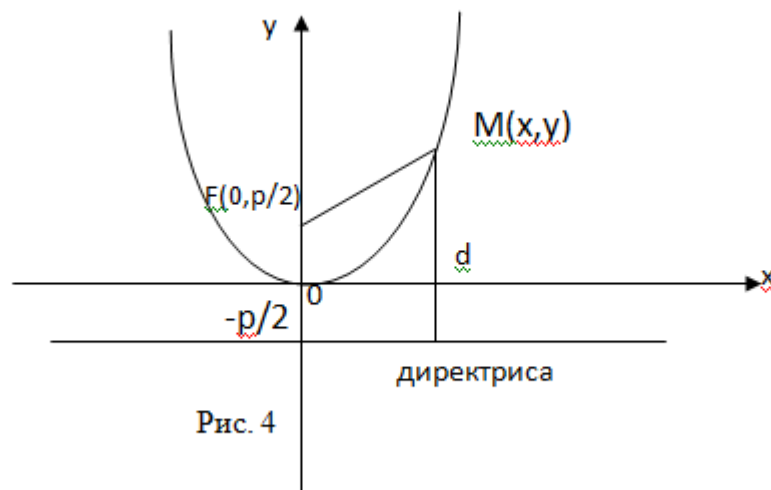


Рис. 4

$M(x, y)$  – произвольная точка параболы,

$(x, y)$  – текущие координаты произвольной точки,

$x = -p/2$  – уравнение директрисы.

$FM = d$ , где  $d$  – расстояние от точки  $M$  до директрисы.

В обоих случаях вершина параболы находится на оси симметрии в начале координат  $O$ .

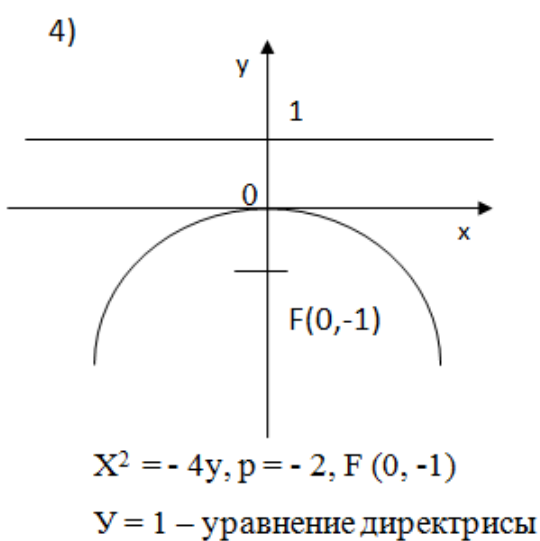
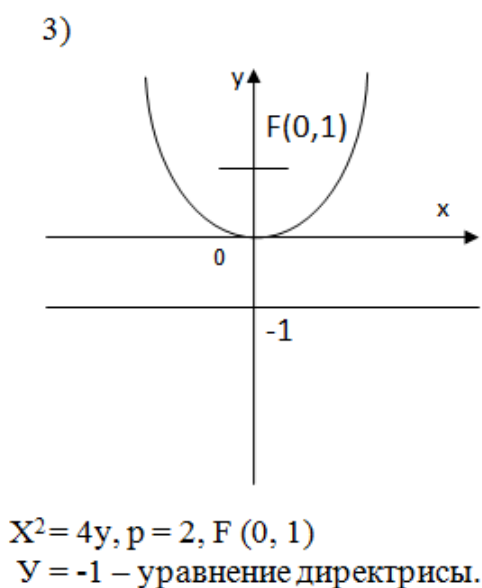
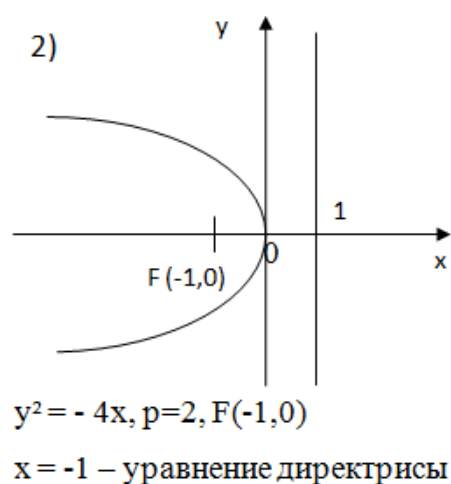
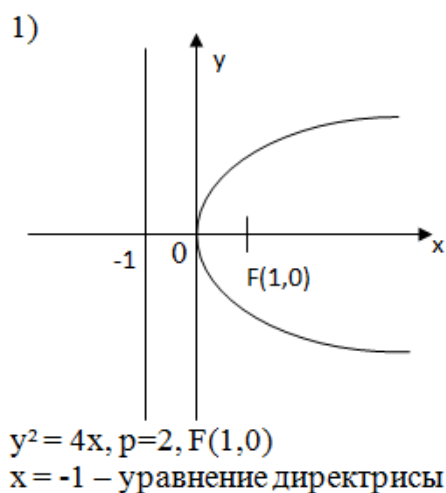
Парабола  $y^2 = 2px$  имеет фокус  $F(p/2)$  и директрису  $x = -p/2$

Парабола  $x^2 = 2py$  имеет фокус  $F(p/2)$  и директрису  $y = -p/2$

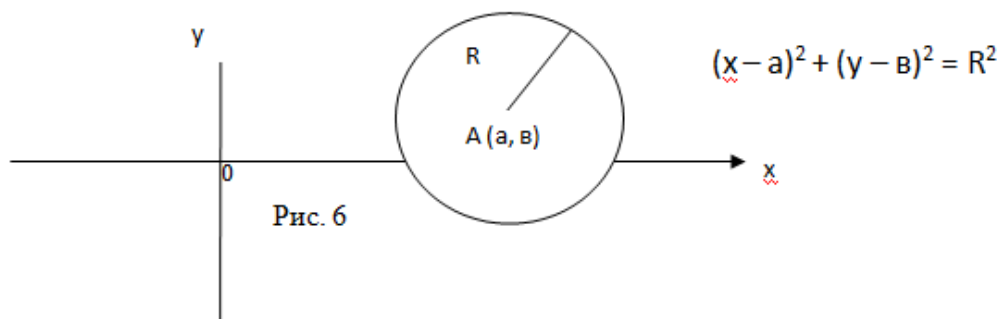
**Пример 3.** Построить параболы заданные уравнениями:

1)  $y^2 = 4x$ ; 2)  $y^2 = -4x$ ; 3)  $x^2 = 4y$ ; 4)  $x^2 = -4y$ ; а так же их фокусы и директрисы и написать уравнения директрис.

**Ответ:**



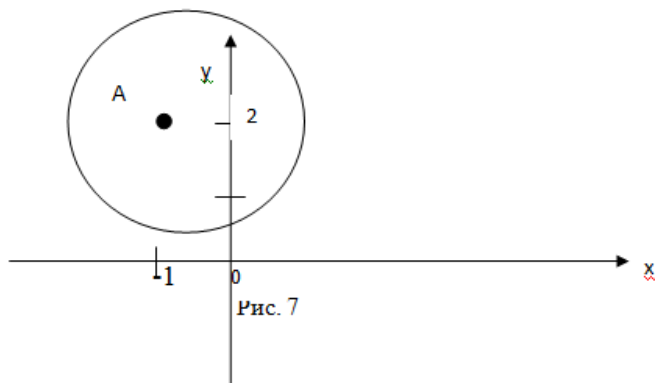
**Окружность.** Уравнение окружности с центром в точке  $A(a, b)$  и радиусом  $R$ ; (рис.6)



**Пример 4.** 1) Написать уравнение окружности с центром в точке  $A(-1, 2)$ ,  $R = 2$ . 2) Построить ее. 3) Лежит ли точка  $O(0, 0)$  на окружности?

Ответ: 1)  $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ , если раскроем скобки, то уравнение примет вид:  $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

2)



3) О (0,0) не лежит на окружности, т. к. координаты этой точки не удовлетворяют уравнению:  $0+0+0+0+1 \neq 0$ .

## Содержание работы

### Задание

1. Составить уравнение окружности с центром в заданной точке S и данным радиусом r: S (4; -7), r=5;
2. Для указанных окружностей определить координаты центра S и радиус r:  
а)  $x^2 + y^2 - 8x + 12y - 29 = 0$  б)  $x^2 + y^2 + 7y - 18 = 0$
3. Составить уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку M (2; 1).
4. Найти координаты вершин, оси, фокусы и эксцентриситет эллипсов:  $16x^2 + 25y^2 = 400$
5. Найти координаты вершин, оси, фокусы, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы: а)  $4x^2 - 5y^2 - 100 = 0$  б)  $x^2 - 3y^2 + 6y - 15 = 0$
6. Найти координаты фокуса и написать уравнение директрисы для параболы  $y^2 = 8x$
7. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, зная координаты фокуса: F (0; 4).

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 20

**Тема:** «Кривые второго порядка»

**Цель:** дать понятие кривых второго порядка; научиться строить кривые второго порядка.

**Оборудование:** справочные пособия, микрокалькуляторы.

## Содержание работы

### Задание

1. Составить уравнение окружности с центром в заданной точке  $S$  и данным радиусом  $r$ :  $S(-6; 3)$ ,  $r = \sqrt{2}$
2. Для указанных окружностей определить координаты центра  $S$  и радиус  $r$ :  
а)  $9x^2 + 9y^2 - 72x + 18y - 208 = 0$  б)  $4x^2 + 4y^2 + 16x - 32y - 41 = 0$
3. Окружность, касающаяся осей координат, проходит через точку  $M(-2; -4)$ . Написать её уравнение.
4. Найти координаты вершин, оси, фокусы и эксцентриситет эллипсов:  $4x^2 + 9y^2 = 36$
5. Найти координаты вершин, оси, фокусы, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы: а)  $4x^2 - 5y^2 - 100 = 0$  б)  $x^2 - y^2 + 4x - 10y - 25 = 0$
6. Найти координаты фокуса и написать уравнение директрисы для параболы  $y^2 = -12x$
7. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, зная координаты фокуса:  $F(0; -3)$ .

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 21

**Тема:** «Контрольная работа»

**Цель:** проверить и оценить знания учащихся.

**Оборудование:** справочный материал.

## Содержание работы

### Вариант 1

1. Найдите произведение матриц  $AB$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислите определитель двумя способами (методом треугольников и

методом разложения по столбцу (строке)):  $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$

3. Найти  $AA^T$  и определитель полученной матрицы, если  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$
4. Вычислить  $2A - 3B$ , где  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$
5. Решить систему уравнений методом подстановки и методом Крамера:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - 4y = -5 \end{cases}$$

6. Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$$

## Вариант 2

1. Найдите произведение матриц АВ

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислите определитель двумя способами (методом треугольников и

методом разложения по столбцу (строке)):  $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix}.$

3. Найти  $AA^T$  и определитель полученной матрицы, если  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$

4. Вычислить  $2A + 3B$ , где  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$

5. Решить систему уравнений методом подстановки и методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ x + 4y = 7 \end{cases}$$

6. Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y - 4z = 20 \\ 3x - 2y - 5z = 6 \end{cases}$$

## Информационное обеспечение обучения

### Печатные издания

1. Макусева, Т. Г. Математический анализ. Основные методы интегрирования: учебное пособие / Т. Г. Макусева, А. Г. Багоутдинова, О. В. Шемелова. — Саратов: Ай Пи Ар Медиа, 2019. — 235 с. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/85749.html>
2. Башмаков, М.И. Математика: учебник / Башмаков М.И. — Москва: КноРус, 2021. — 394 с. — ISBN 978-5-406-08166-2. — URL: <https://book.ru/book/939220>
3. Башмаков, М.И. Математика. Практикум: учебно-практическое пособие / Башмаков М.И., Энтина С.Б. — Москва: КноРус, 2021. — 294 с. — ISBN 978-5-406-05758-2. — URL: <https://book.ru/book/939104>
4. Денежкина И.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие / Денежкина И.Е., Степанов С.Е., Цыганок И.И. — Москва: КноРус, 2021. — 302 с. — ISBN 978-5-406-06325-5. — URL: <https://book.ru/book/939267>

### Электронные издания (электронные ресурсы):

5. <http://school-collection.edu.ru/>
6. <http://fcior.edu.ru/>
7. <http://college.ru/matematika/>
8. <http://www.mce.su>
9. <http://www.exponenta.ru>