

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Саратовский государственный технический университет имени  
Гагарина Ю.А.»

Филиал федерального государственного бюджетного образовательного  
учреждения высшего образования  
«Саратовский государственный технический университет имени  
Гагарина Ю.А.» в г. Петровске



УТВЕРЖДАЮ  
Директор филиала СГТУ  
имени Гагарина Ю.А. в г.Петровске  
Е.А.Бесшапошникова  
«30» июня 2021 г.

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по дисциплине  
ЕН.01 «Математика»

специальности  
15.02.10 «Мехатроника и мобильная робототехника  
(по отраслям)»

Методические указания рассмотрены  
на заседании предметной (цикловой) комиссии  
общеобразовательных, ОГСЭ и ЕН дисциплин,  
профессиональных модулей специальностей  
социально-экономического профиля  
«14» июня 2021 года, протокол №13

Председатель ПЦК Мед /О.В.Медведева/

Петровск 2021

## Пояснительная записка

Методические указания по выполнению практических работ подготовлены на основе рабочей программы учебной дисциплины «Математика», разработанной на основе ФГОС СПО по специальности 15.02.10 «Мехатроника и мобильная робототехника (по отраслям)» и соответствующих общих (ОК) и профессиональных (ПК) компетенций:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.2. Осуществлять настройку и конфигурирование программируемых логических контроллеров и микропроцессорных систем в соответствии с принципиальными схемами подключения.

Целью освоения учебной дисциплины «Математика» является:

- формирование представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, об идеях и методах математики;
- развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, для продолжения образования и самообразования;
- обеспечение сформированности представлений о социальных, культурных и исторических факторах становления математики;
- обеспечение сформированности логического, алгоритмического и математического мышления;
- обеспечение сформированности умений применять полученные знания при решении различных задач;

- обеспечение сформированности представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления.

При выполнении практических работ студент должен **уметь:**

- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

При выполнении практических работ студент должен **знать:**

- значение математики в профессиональной деятельности и при освоении профессиональной образовательной программы;
- основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;
- основные понятия и методы теории вероятностей и математической статистики;
- основы интегрального и дифференциального исчисления.

Объём практических занятий по дисциплине определяется учебным планом по данной специальности.

Продолжительность практического занятия - 2 академических часа. Перед проведением практического занятия преподавателем организуется инструктаж, а по ее окончании – обсуждение итогов.

Комплект методических указаний по выполнению практических работ дисциплины «Математика» содержит 14 практических занятий.

## **Темы практических работ**

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1.** Тема: «Комплексные числа и действия над ними».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2.** Тема: «Матрицы и определители».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3.** Тема: «Матрицы и определители».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4.** Тема: «Системы линейных уравнений».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5.** Тема: «Прямая на плоскости и ее уравнение».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6 – 7.** Тема: «Кривые второго порядка».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8.** Тема: «Теория пределов».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 9.** Тема: «Производная и дифференциал».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 10.** Тема: «Неопределенный интеграл».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 11.** Тема: «Определенный интеграл».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 12.** Тема: «Дифференциальные уравнения».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 13.** Тема: «Множества. Отношения».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 14.** Тема: «Элементы теории вероятностей».

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1

### Тема: «Комплексные числа и действия над ними»

**Цель:** научиться выполнять арифметические действия над комплексными числами в алгебраической форме.

**Оборудование:** справочные пособия.

#### Справочный материал

Мнимая единица  $i$ ,  $i^2 = -1$ .

*Алгебраическая форма комплексного числа.*

$z = a + ib$ , где  $a, b$  – действительные числа;

$a$  – действительная часть комплексного числа,

$b$  – мнимая часть комплексного числа;

Обозначения действительной и мнимой части:  $a = \operatorname{Re} z, b = \operatorname{Im} z$ .

Модуль комплексного числа:  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Сопряжённые комплексные числа:  $z = a + ib$  и  $\bar{z} = a - ib$ .

*Действия над комплексными числами в алгебраической форме.*

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2);$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2);$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) - i(a_1 b_2 + b_1 a_2)}{a_2^2 + b_2^2}.$$

#### Пример:

$$z_1 + z_2 = 5 + 2i + 2 - 5i = 7 - 3i$$

$$z_1 - z_2 = 5 + 2i - (2 - 5i) = 5 + 2i - 2 + 5i = 3 + 7i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (5 + 2i) \cdot (2 - 5i) = 10 + 4i - 25i + 10 = 20 - 21i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 + 2i}{2 - 5i} = \frac{(5 + 2i)(2 + 5i)}{(2 - 5i)(2 + 5i)} = \frac{10 + 4i + 25i - 10}{4 + 25} = \frac{29i}{29} = i$$

## Порядок выполнения работы

### Вариант № 1

#### 1. Выполните действия:

- 1)  $(4-3i)+(-2+i)$ ;
- 2)  $(5+6i)+(7-6i)$ ;
- 3)  $(-0,7+0,3i)+(0,9-1,7i)$ ;
- 4)  $(-0,4-2,1i)+(0,6+3i)$ ;
- 5)  $(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}i)+(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)$
- 6)  $(2+3i)(6-5i)$ ;
- 7)  $(-3+2i)*2+(7-5i)*3$ ;
- 8)  $\frac{1}{1-i}$ ;
- 9)  $\frac{5}{1+2i}$ ;
- 10)  $\frac{2+i}{2-7i}$ ;

#### 2. Найдите модуль комплексного числа:

- 1) 3; 2)  $i$ ; 3)  $-5i$ ; 4)  $-2$ .

### Вариант № 2

#### 1. Выполните действия:

- 1)  $(0,2-0,3i)(0,4+0,5i)$ ;
- 2)  $(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}i)(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}i)$ ;
- 3)  $(2-3i)^2$ ;
- 4)  $(-1+i)^2$ ;
- 5)  $3+i+(-2+5i)(-1-2i)$ ;
- 6)  $(3-2i)(1+4i)+(-6-i)$ ;
- 7)  $(4-5i)(-2+3i)+(1+2i)(-3+4i)$ ;
- 8)  $\frac{(2+i)}{3-2i}$ ;
- 9)  $\frac{4+3i}{3-4i}$ ;
- 10)  $\frac{1+i}{2-i}+\frac{2-i}{3+i}+2i$ .

#### 2. Найдите модуль комплексного числа:

- 1)  $1+i$ ; 2)  $3-4i$ ; 3)  $-\sqrt{3}+i$ ; 4)  $-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$ .

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2

### Тема: «Матрицы, определители»

**Цель:** научиться вычислять матрицы, действия над матрицами.

**Оборудование:** справочные пособия, микрокалькуляторы.

#### Справочный материал

##### 1. Умножение матрицы на число.

Пример:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 12 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 7 & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & -3 \\ 21 & 0 \end{pmatrix}$$

Для того чтобы умножить матрицу на число, нужно **каждый** элемент матрицы умножить на это число.

##### 2. Сумма (разность) матриц.

Для выполнения сложения (вычитания) матриц, необходимо, чтобы они были одинаковыми по размеру.

*Для того чтобы сложить матрицы, необходимо сложить их соответствующие элементы:*

$$\begin{aligned} F + G &= \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 + (-4) & -1 + (-3) \\ -5 + 15 & 0 + 7 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 12 - 4 & -1 - 3 \\ -5 + 15 & 0 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Для разности матриц правило аналогичное, *необходимо найти разность соответствующих элементов.*

Пример:

Найти разность матриц  $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ ,  $H = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -15 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} A - H &= \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 3 & -15 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - (-4) & 5 - 3 & -17 - (-15) \\ -1 - (-5) & 0 - (-7) & 10 - 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 + 4 & 5 - 3 & -17 + 15 \\ -1 + 5 & 0 + 7 & 10 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 3. Умножение матриц.

Чтобы матрицу  $K$  можно было умножить на матрицу  $L$  нужно, чтобы число столбцов матрицы  $K$  равнялось числу строк матрицы  $L$ .

Пример 1:

Умножить матрицу  $K = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$  на матрицу  $L = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Формула умножения для конкретного случая:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 c_1 + b_1 c_2 \\ a_2 c_1 + b_2 c_2 \end{pmatrix}$$

$$KL = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \\ 5 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Пример 2:

Умножить матрицу  $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$  на матрицу  $N = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

Формула:  $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 c_1 + b_1 c_2 & a_1 d_1 + b_1 d_2 \\ a_2 c_1 + b_2 c_2 & a_2 d_1 + b_2 d_2 \end{pmatrix}$

$$MN = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 9 - 3 \cdot 6 & 2 \cdot (-6) - 3 \cdot (-4) \\ 4 \cdot 9 - 6 \cdot 6 & 4 \cdot (-6) - 6 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В результате получена так называемая нулевая матрица.

Пример 3:

Умножить матрицу  $P = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$  на матрицу  $R = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Формула:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 d_1 + b_1 d_2 + c_1 d_3 \\ a_2 d_1 + b_2 d_2 + c_2 d_3 \\ a_3 d_1 + b_3 d_2 + c_3 d_3 \end{pmatrix}$$

$$PR = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 + 8 \cdot (-3) - 4 \cdot 1 \\ 6 \cdot 2 + 9 \cdot (-3) - 5 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 + 7 \cdot (-3) - 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -20 \\ -16 \end{pmatrix}$$

## Порядок выполнения работы

### Вариант № 1

#### 1. Найти матрицу $3A-B$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: } 1) \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 13 & 0 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$$

#### 2. Вычислить произведение матриц:

$$1) \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: } 1) \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 12 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: } 1) \begin{pmatrix} 43 & 10 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 56 & 2 \\ 49 & 11 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 14 & 11 \end{pmatrix}$$

### Вариант № 2

#### 1. Найти матрицу $A+2B$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: } 1) \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 13 & 0 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$$

#### 2. Вычислить произведение матриц:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: } 1) \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ответ:  $1) \begin{pmatrix} 43 & 10 \\ 49 & 11 \end{pmatrix} 2) \begin{pmatrix} 56 & 2 \\ 14 & 11 \end{pmatrix} 3) \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3

### Тема: «Матрицы, определители»

**Цель:** научиться вычислять определители второго и третьего порядка.

**Оборудование:** справочные пособия, микрокалькуляторы.

### Справочный материал

**1. Определитель второго порядка** можно раскрыть с помощью формулы:

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 11 & -3 \\ -15 & -2 \end{vmatrix} = 11 \cdot (-2) - (-15) \cdot (-3) = -22 - 45 = -67$$

**2. Определитель третьего порядка** можно раскрыть с помощью формулы (способ 1):

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$

Пример:

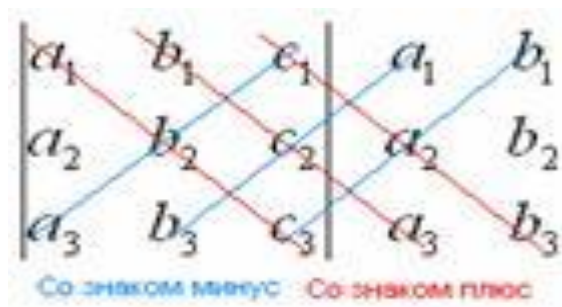
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 9 + (-7) \cdot (-2) \cdot 6 + 4 \cdot 8 \cdot 3 - (-7) \cdot 0 \cdot 3 - 1 \cdot 8 \cdot 6 - 4 \cdot (-2) \cdot 9 =$$

$$= 0 + 84 + 96 - 0 - 48 + 72 = 204$$

(способ 2):

Способ Саррюса или способом «параллельных полосок».

Суть состоит в том, что справа от определителя приписывают первый и второй столбец и аккуратно карандашом проводят линии:



Множители, находящиеся на «красных» диагоналях входят в формулу со знаком «плюс».

Множители, находящиеся на «синих» диагоналях входят в формулу со знаком минус:

Пример:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \\ -7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 9 + (-2) \cdot 6 \cdot (-7) + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 0 \cdot (-7) - 1 \cdot 6 \cdot 8 - (-2) \cdot 4 \cdot 9 =$$

$$= 0 + 84 + 96 - 0 - 48 + 72 = 204$$

## Порядок выполнения работы

**Вычислить определители:**

1)  $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}$

2)  $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

3)  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & -6 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -4 & 5 & -3 \end{vmatrix}$

$$4) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$5) \begin{vmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$6) \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4

### Тема: «Системы линейных уравнений»

**Цель:** научиться решать системы линейных уравнений методом Крамера.

**Оборудование:** справочные пособия, микрокалькуляторы.

### Справочный материал

Рассмотрим систему линейных уравнений в общем виде:

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = s_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = s_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = s_3 \end{cases}$$

Находим главный определитель системы:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Если  $D = 0$ , то система имеет бесконечно много решений или несовместна (не имеет решений). В этом случае правило Крамера не поможет, нужно использовать метод Гаусса.

Если  $D \neq 0$ , то система имеет единственное решение и для нахождения корней мы должны вычислить еще три определителя:

$$D_1 = \begin{vmatrix} s_1 & b_1 & c_1 \\ s_2 & b_2 & c_2 \\ s_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & s_1 & c_1 \\ a_2 & s_2 & c_2 \\ a_3 & s_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & s_1 \\ a_2 & b_2 & s_2 \\ a_3 & b_3 & s_3 \end{vmatrix}$$

И, наконец, ответ рассчитывается по формулам:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

**Пример:**

Решить систему линейных уравнений методом Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

**Решение:**

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-4 - 2) + 2 \cdot (-3 + 4) + 4 \cdot (-3 - 8) = -18 + 2 - 44 = -60 \neq 0, \text{ значит, система имеет}$$

единственное решение.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 21 & -2 & 4 \\ 9 & 4 & -2 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 21 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 21 \cdot (-4 - 2) + 2 \cdot (-9 + 20) + 4 \cdot (-9 - 40) = -126 + 22 - 196 = -300$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-300}{-60} = 5$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 21 & 4 \\ 3 & 9 & -2 \\ 2 & 10 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} - 21 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-9 + 20) - 21 \cdot (-3 + 4) + 4 \cdot (30 - 18) = 33 - 21 + 48 = 60$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{60}{-60} = -1$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 21 \\ 3 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 21 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 21 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (40 + 9) - 3 \cdot (-20 + 21) + 2 \cdot (-18 - 84) = 147 - 3 - 284 = -60$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-60}{-60} = 1$$

**Ответ:**  $x_1 = 5, x_2 = -1, x_3 = 1$ .

## Порядок выполнения работы

### Вариант № 1

Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

$$1. \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

**Ответ:** 1.(1,3,2); 2.(1,0,3) 3.(0,0,0).

$$2. \quad \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$$

**Ответ:** 1.(1,3,2); 2.(1,0,3) 3.(1,0,0).

$$3. \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

**Ответ:** 1.(3,4,8) 2.(1,2,3) 3.(5,8,2).

### Вариант № 2

Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

$$1. \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 10 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

**Ответ:** 1.(-1,3,2); 2.(0,0,3) 3.(0,0,0).

$$2. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

**Ответ:** 1.(3,4,8); 2.(1,2,3); 3.(5,8,2).

$$3. \begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

**Ответ:** 1.(-1,3,2); 2.(0,0,3); 3.(0,0,0).

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5

### Тема: «Прямая на плоскости и ее уравнение»

**Цель:** научиться составлять уравнения прямой на плоскости, решать задачи.

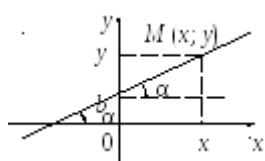
**Оборудование:** справочные пособия, микрокалькуляторы.

### Справочный материал

Простейшей из линий является прямая. Разным способам задания прямой в прямоугольной системе координат соответствуют различные виды ее уравнений.

**1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.** Пусть на плоскости  $Oxy$  задана произвольная прямая, не параллельная оси  $Oy$ . Ее положение определяется ординатой  $b$  точки  $(0; b)$  пересечения с осью  $Oy$  и углом  $\alpha$  между прямой и положительным направлением оси  $Ox$ .

**Определение 2.** Углом наклона данной прямой к оси  $Ox$  называется наименьшее неотрицательное значение угла  $\alpha$ , на который нужно повернуть против часовой стрелки ось  $Ox$ , чтобы ее положительное направление совпало с одним из направлений прямой.



Возьмем на прямой произвольную точку  $M(x; y)$ . Из

определения тангенса угла следует равенство  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y - b}{x}$ , т.

е.  $y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha + b$ . Обозначим  $\operatorname{tg} \alpha = k$  и получим  $y = k \cdot x + b$  – уравнение прямой с угловым коэффициентом.

**Определение 3.** Число  $k = \operatorname{tg} \alpha$  называется *угловым коэффициентом* прямой.

### **Частные случаи уравнения прямой с угловым коэффициентом.**

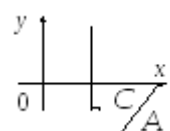
- 1) Если прямая проходит через начало координат, то  $b = 0$ , а уравнение имеет вид  $y = k \cdot x$ .
- 2) Если прямая проходит параллельно оси  $Ox$ , т. е.  $\alpha = 0$  ( $k = \operatorname{tg} 0 = 0$ ), то уравнение имеет вид  $y = b$ .
- 3) Если прямая проходит параллельно оси  $Oy$ , т. е.  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  ( $k = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \infty$ ), то уравнение имеет вид  $x = a$ , где  $a$  – абсцисса точки пересечения прямой с осью  $Ox$ .

### **2. Общее уравнение прямой. Уравнение**

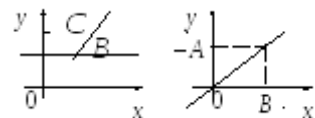
$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0, (1)$$

где  $A, B, C$  – произвольные числа, причем  $A$  и  $B$  не равны нулю одновременно, называется *общим уравнением прямой*.

### **Частные случаи общего уравнения прямой.**



- 1) Если  $B = 0$ , то  $A \cdot x + C = 0$  – уравнение прямой параллельной



оси  $Oy$  и проходящей через точку  $\left(-\frac{C}{A}; 0\right)$ .

- 2) Если  $B \neq 0, A = 0$ , то  $B \cdot y + C = 0$  – уравнение прямой

параллельной оси  $Ox$  и проходящей через точку  $\left(0; -\frac{C}{B}\right)$  (см рис. справа).

- 3) Если  $C = 0$ , то  $A \cdot x + B \cdot y = 0$  – уравнение прямой, проходящей через начало координат и через точку  $(B; -A)$  (см рис. справа).

- 4) Если  $A = 0$  и  $C = 0$ , то прямая совпадает с осью  $Ox$ .

- 5) Если  $B = 0$  и  $C = 0$ , то прямая совпадает с осью  $Oy$ .

### **3. Уравнение прямой проходящей через данную точку в данном направлении.**

Пусть прямая проходит через точку  $M_0(x_0; y_0)$  и ее направление характеризуется угловым коэффициентом  $k$ . Тогда уравнение прямой примет вид

$$(y - y_0) = k \cdot (x - x_0), (2)$$

где  $x, y$  – координаты текущей точки, лежащей на прямой,

*Примечание.* Из этого уравнения нельзя определить прямую параллельную оси  $Oy$ .

**4. Уравнение прямой проходящей через две точки.** Пусть прямая проходит через точки  $M_1(x_1; y_1)$  и  $M_2(x_2; y_2)$ . Тогда

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (3)$$

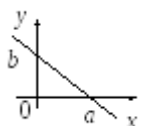
уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

Угловой коэффициент, для данного случая запишется в виде:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (4)$$

**Частные случаи уравнения прямой проходящей через две точки.**

Если  $x_2 = x_1$ , то прямая проходит параллельно оси  $Oy$ , а уравнение имеет вид  $x = x_1$ .



Если  $y_2 = y_1$ , то прямая проходит параллельно оси  $Ox$ , а уравнение имеет вид  $y = y_1$ .

**5. Уравнение прямой в отрезках.** Пусть прямая пересекает ось  $Ox$  в

точке  $M_1(a; 0)$  и ось

$Oy$  в точке  $M_2(0; b)$ . В этом случае уравнение (3) примет вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad \text{— уравнение прямой в отрезках} \quad (5)$$

где  $a$  и  $b$  — отрезки, отсекаемые данной прямой от соответствующих осей координат.

**6. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно**

**данному вектору.** Уравнение прямой, проходящей через заданную точку  $M_0(x_0; y_0)$

перпендикулярно вектору  $\vec{n} = [A; B]$  имеет вид

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) = 0, \quad (6)$$

где  $x, y$  — координаты текущей точки лежащей на этой прямой.

**Определение 4.** Вектор  $\vec{n} = [A; B]$ , перпендикулярный прямой, называется *нормальным вектором* этой прямой.

**Основные задачи для прямой линии на плоскости.**

1) Угол между двумя прямыми.

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}, \quad (7)$$

где  $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$ ,  $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$  – угловые коэффициенты соответствующих прямых.

2) *Условие параллельности прямых.* Так как  $\varphi = 0$ , то

$$k_1 = k_2. (8)$$

3) *Условие перпендикулярности прямых.* Так как  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , то

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \text{ или, что тоже самое, } k_1 k_2 = -1. (9)$$

4) *Расстояние от точки до прямой.* Пусть заданы прямая своим уравнением  $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$  и точка на плоскости  $M_0(x_0; y_0)$ , тогда

$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} - \text{расстояние} (10)$$

от точки  $M_0$  до данной прямой.

## Порядок выполнения работы

### Вариант 1

#### Задание 1

Треугольник задан вершинами  $A(-3; -3)$ ,  $B(-4; 5)$ ,  $C(3; 1)$ . Выполнить чертеж.

- 1) Составить уравнения сторон треугольника;
- 2) Составить уравнение медианы BD;
- 3) Найти угол наклона прямой AC к оси Oх.

#### Задание 2

Привести уравнение прямой к каноническому виду  $l: 2x + 3y - 18 = 0$

#### Задание 3

Точка, двигаясь прямолинейно, прошла через положения  $A(-1; 6)$ ,  $B(3; -2)$ . В каких точках она пересечет оси координат?

#### Задание 4

Вычислить длину отрезка прямой  $l: 3x - 4y + 12 = 0$ , заключенного между осями координат.

### **Задание 5**

На прямой  $l: 2x - 3y + 6 = 0$  найдите точку М, равноудаленную от точек  $A(3; 0)$ ,  $B(5; 2)$ .

## **Вариант 2**

### **Задание 1**

Треугольник задан вершинами  $A(4; -2)$ ,  $B(-4; 2)$ ,  $C(2; 5)$ . Выполнить чертеж.

- 1) Составить уравнения сторон треугольника;
- 2) Составить уравнение медианы CD;
- 3) Найти угол наклона прямой BC к оси Oх.

### **Задание 2**

Привести уравнение прямой к каноническому виду  $l: 3x + 7y - 42 = 0$

### **Задание 3**

Прямая, проходящая через точку  $(-2; -1)$ , отсекает на оси Oх отрезок  $a =$   
4. Составьте уравнение этой прямой (в общем виде).

### **Задание 4**

Вычислить длину отрезка прямой  $l: 3x + 4y + 24 = 0$ , заключенного между осями координат.

### **Задание 5**

На прямой  $l: 2x + y - 2 = 0$  найдите точку М, равноудаленную от точек  $A(0; 6)$ ,  $B(1; 5)$ .

## **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6 – 7**

### **Тема: «Кривые второго порядка»**

**Цель:** дать понятие кривых второго порядка; научиться строить кривые второго порядка.

**Оборудование:** справочные пособия, микрокалькуляторы.

### **Справочный материал**

К кривым второго порядка относят кривые, записанные уравнением  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Ex + Dy + F = 0$ . В зависимости от значений коэффициентов (вещественные числа) это могут быть окружность, эллипс, гипербола, парабола. Эти кривые были известны с глубокой древности. Все эти кривые суть сечения прямого кругового конуса плоскостями (конические сечения).

**Эллипс.** Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух данных точек  $F_1$  и  $F_2$  (фокусов) есть величина постоянная  $2a$ , большая  $F_1F_2$ . Каноническое уравнение (простейшее) уравнение эллипса:  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

Эллипс, заданный таким уравнением симметричен относительно осей координат (рис 1)

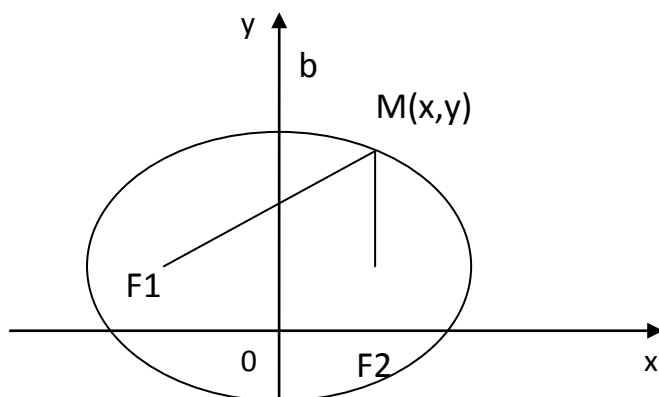


Рис 1

$M(x, y)$  – произвольная точка эллипса,  $(x, y)$  – текущие координаты этой точки. Все точки эллипса удовлетворяют условию:  $F_1M + F_2M = 2a$ .

$a, b$  называются полуосями эллипса,  $a$  – большая полуось,  $b$  – малая полуось.  $F_1$  и  $F_2$  – фокусы эллипса находятся на оси  $ox$  на расстоянии  $C = \sqrt{a^2 - b^2}$  от центра  $O$ . Отношение  $c/a = E$  называется эксцентриситетом эллипса.

**Пример 1.** 1) Написать уравнение эллипса, если  $a=4$ ,  $b=3$ ; 2) Найти координаты фокусов; 3) Найти  $E$ .

**Ответ:** 1)  $x^2/16 + y^2/9 = 1$ ; 2)  $C = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$ ,  $F_1(-\sqrt{7}, 0)$ ;  $F_2(\sqrt{7}, 0)$ ; 3)  $E = c/a = \sqrt{7}/4 < 1$ .

**Гипербола.** Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний каждой из которых до двух данных точек  $F_1$  и  $F_2$  (фокусов) есть постоянная величина  $2a$  ( $0 < 2a < F_1, F_2$ ).

Каноническое (простейшее) уравнение гиперболы.

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$$

Гипербола, заданная уравнением симметрична относительно осей координат (Рис 2). Она пересекает ось  $ox$  в точках  $A_1(-a, 0)$  и  $A_2(+a, 0)$  – вершинах гиперболы и не пересекает ось  $oy$ . Параметр  $a$  называется вещественной полуосью,  $b$  – мнимой полуосью,  $C = \sqrt{a^2 + b^2}$  – расстояние от фокуса до центра симметрии  $O$ .

Отношение  $c/a = E$  называется эксцентриситетом гиперболы. Прямые  $y = \pm b/a x$  называются асимптотами гиперболы.

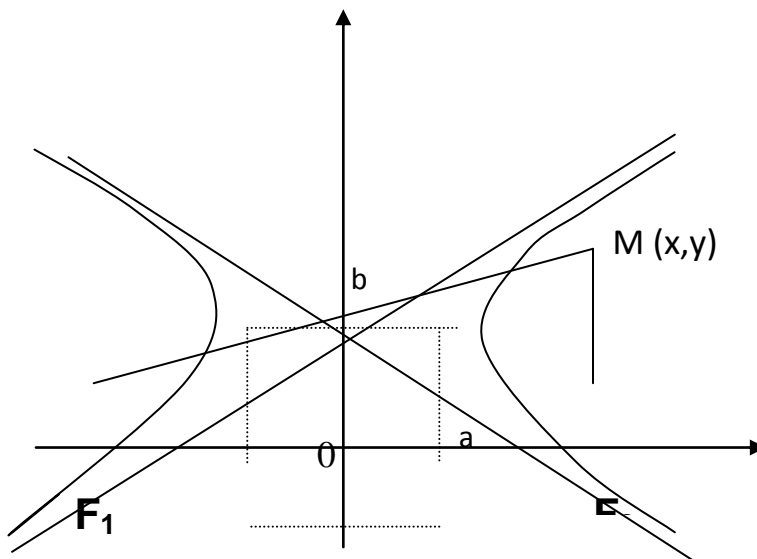


Рис. 2

$M(x, y)$  – произвольные точки гиперболы,  $(x, y)$  – текущие координаты произвольной точки. Все точки гиперболы удовлетворяют условию

$$|F_1M - F_2M| = 2a.$$

**Пример 2.** Дана гипербола  $x^2 - 4y^2 = 16$ . 1) Написать каноническое уравнение гиперболы; 2) Найти вещественную и мнимую полуоси; 3) Найти асимптоты гиперболы; 4) Вычислить эксцентриситет  $E$ .

**Ответ:** 1)  $x^2/16 - y^2/4 = 1$ ; 2)  $a = \sqrt{16} = 4$ ;  $b = \sqrt{4} = 2$ . 3)  $y = \pm(b/a)x$  или  $y = \pm(2/4)x$  или  $y = \pm(1/2)x$ ; 4)  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ ,  
 $E = c/a = (2\sqrt{5})/4 = (\sqrt{5})/2$ ;  
 $E = (\sqrt{5})/2 > 1$ .

**Парабола.** Параболой называется геометрическое место точек, одинаково удаленных от данной точки (фокуса) и данной прямой (директрисы).

Каноническое уравнение параболы имеет два вида:

- 1)  $y^2 = 2px$  – парабола симметрична относительно  $ox$  (рис.3)
- 2)  $x^2 = 2py$  – парабола симметрична относительно  $oy$  (рис.4)

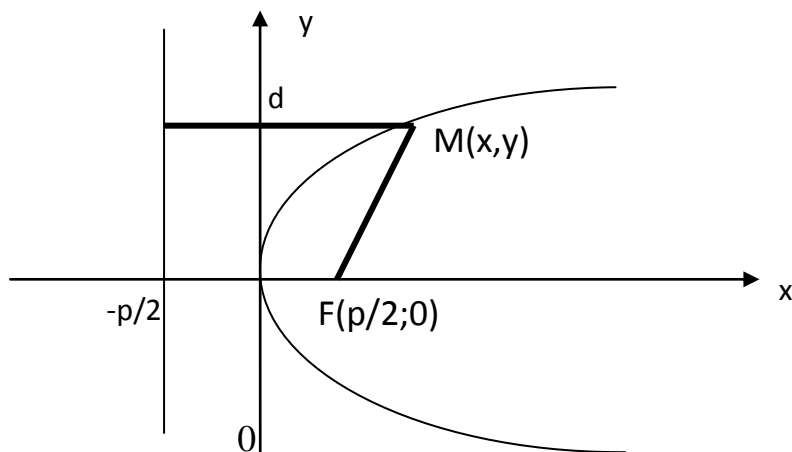


Рис. 3

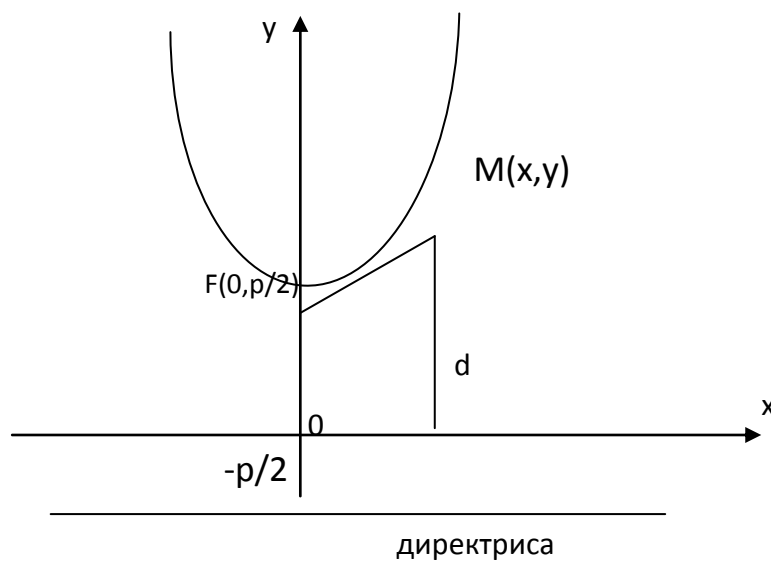


Рис. 4

$M(x, y)$  – произвольная точка параболы,

$(x, y)$  – текущие координаты произвольной точки,

$x = -p/2$  – уравнение директрисы.

$FM = d$ , где  $d$  – расстояние от точки  $M$  до директрисы.

В обоих случаях вершина параболы находится на оси симметрии в начале координат 0.

Парабола  $y^2 = 2px$  имеет фокус  $F(p/2)$  и директрису  $x = -p/2$

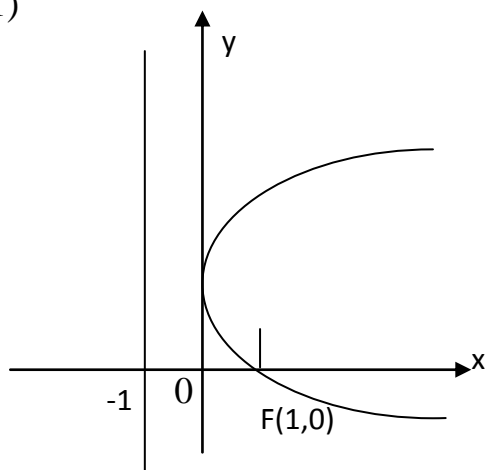
Парабола  $x = 2py$  имеет фокус  $F(p/2)$  и директрису  $y = -p/2$

**Пример 3.** Построить параболы заданные уравнениями:

1)  $y^2 = 4x$ ; 2)  $y^2 = -4x$ ; 3)  $x^2 = 4y$ ; 4)  $x^2 = -4y$ ; а так же их фокусы и директрисы и написать уравнения директрис.

**Ответ:**

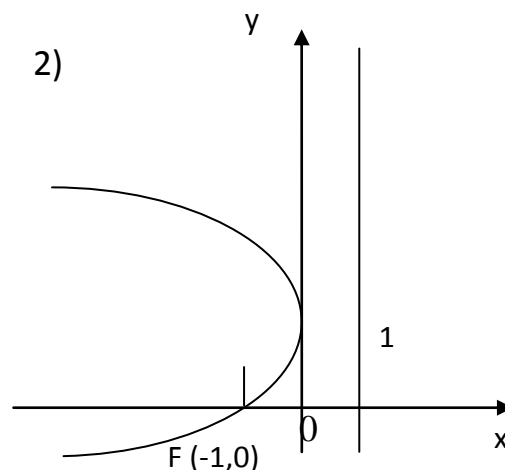
1)



$$y^2 = 4x, p=2, F(1,0)$$

$x = -1$  – уравнение директрисы

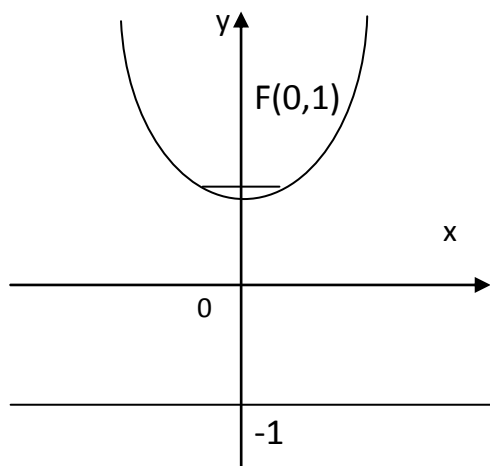
2)



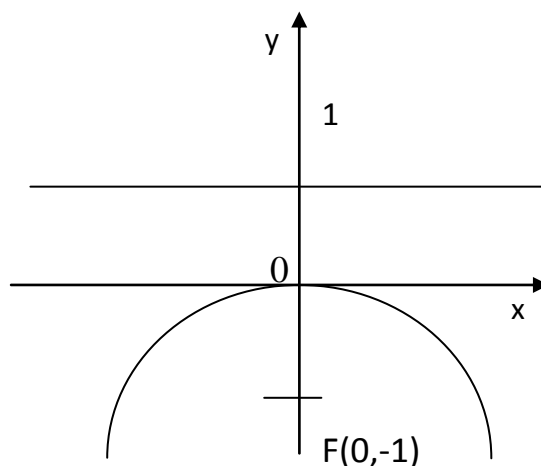
$$y^2 = -4x, p=2, F(-1,0)$$

$x = 1$  – уравнение директрисы

3)



4)



$$X^2 = 4y, p = 2, F(0, 1)$$

$Y = -1$  – уравнение директрисы.

$$X^2 = -4y, p = -2, F(0, -1)$$

$Y = 1$  – уравнение директрисы

**Окружность.** Уравнение окружности с центром в точке  $A(a, b)$  и радиусом  $R$ ;  
(рис.6)

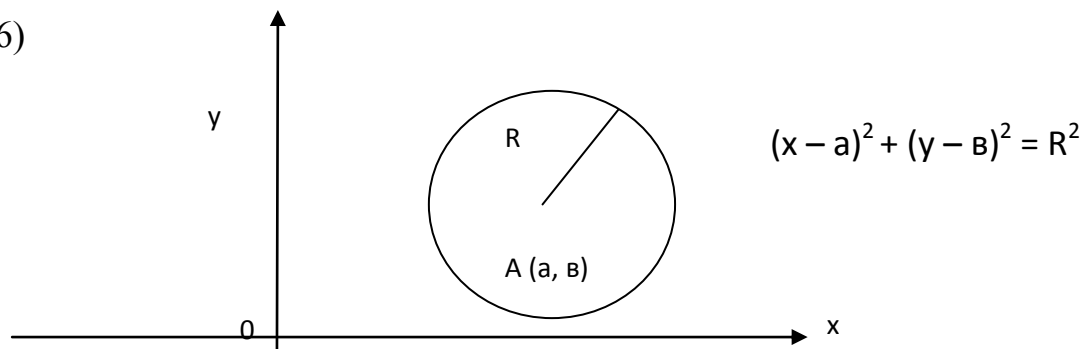


Рис. 6

**Пример 4.** 1) Написать уравнение окружности с центром в точке  $A(-1, 2)$ ,  $R = 2$ . 2) Построить ее. 3) Лежит ли точка  $O(0, 0)$  на окружности?

Ответ: 1)  $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ , если раскроем скобки, то уравнение примет вид:  $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

2)

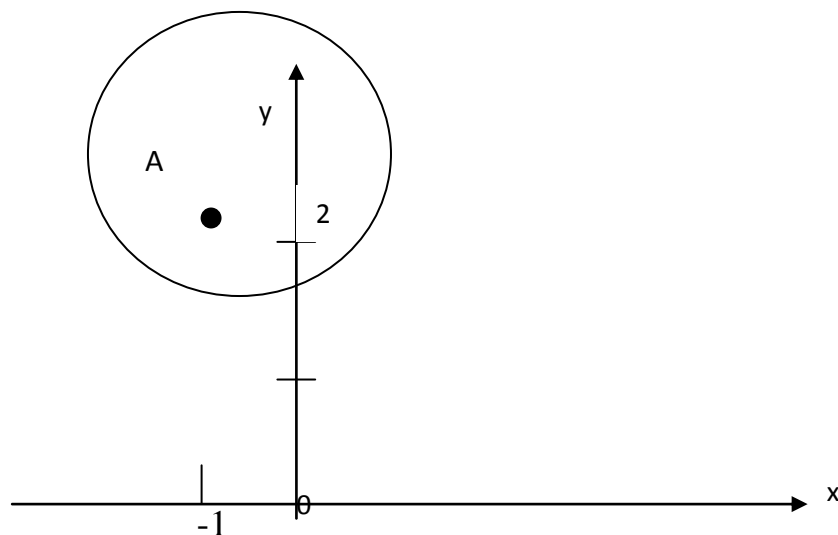


Рис. 7

- 2) О (0,0) не лежит на окружности, т. к. координаты этой точки не удовлетворяют уравнению:  $0+0+0+0+1 \neq 0$ .

## Порядок выполнения работы

### Вариант 1

1. Составить уравнение окружности с центром в заданной точке S и данным радиусом r: S (4; -7), r=5;
2. Для указанных окружностей определить координаты центра S и радиус r:  
а)  $x^2 + y^2 - 8x + 12y - 29 = 0$  б)  $x^2 + y^2 + 7y - 18 = 0$
3. Составить уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку M (2; 1).
4. Найти координаты вершин, оси, фокусы и эксцентриситет эллипсов:  
 $16x^2 + 25y^2 = 400$
5. Найти координаты вершин, оси, фокусы, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы: а)  $4x^2 - 5y^2 - 100 = 0$  б)  $x^2 - 3y^2 + 6y - 15 = 0$
6. Найти координаты фокуса и написать уравнение директрисы для параболы  $y^2 = 8x$
7. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, зная координаты фокуса: F ( 0; 4).

### Вариант 2

1. Составить уравнение окружности с центром в заданной точке S и данным радиусом r: S (-6; 3),  $r = \sqrt{2}$
2. Для указанных окружностей определить координаты центра S и радиус r:  
а)  $9x^2 + 9y^2 - 72 + 18y - 208 = 0$  б)  $4x^2 + 4y^2 + 16x - 32y - 41 = 0$
3. Окружность, касающаяся осей координат, проходит через точку M (-2; -4). Написать её уравнение.

4. Найти координаты вершин, оси, фокусы и эксцентриситет эллипсов:  $4x^2 + 9y^2 = 36$
5. Найти координаты вершин, оси, фокусы, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы: а)  $4x^2 - 5y^2 - 100 = 0$  б)  $x^2 - y^2 + 4x - 10y - 25 = 0$
6. Найти координаты фокуса и написать уравнение директрисы для параболы  $y^2 = -12x$
7. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, зная координаты фокуса: F (0; - 3).

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8

### Тема: «Теория пределов»

**Цель:** научиться вычислять пределы функции.

**Оборудование:** справочные пособия, микрокалькуляторы.

### Справочный материал

#### 1. Приращение аргумента и функции

Возьмём в области определения функции  $y=f(x)$  произвольно два значения аргумента, первое будем называть начальным (для точки  $M$ ), второе – изменённым (для точки  $M_1$ ).

Начальное значение  $x$  считается постоянным в ходе всего рассуждения, а точка  $A$  (рис.1), соответствующая ему на оси  $Ox$ , – неподвижной. Изменённое значение аргумента принято обозначать  $x + \Delta x$ , ему на рис. 1. соответствует точка  $P$ .

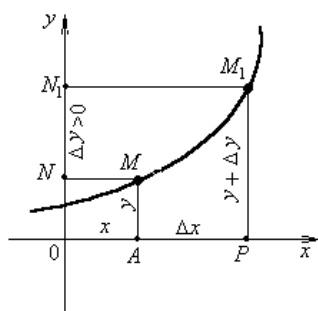


рис.1

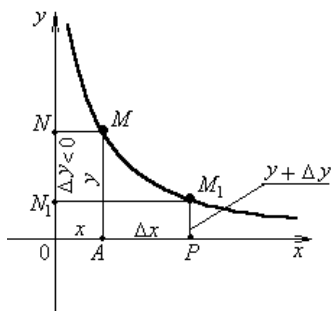


рис.2

▼  $\Delta x$  выражает ту величину, на которую изменяется аргумент при переходе от первого значения аргумента ко второму, и называется *приращением аргумента*. ▲  $\Delta x$  равняется разности между вторым и первым значениями аргумента.

Значениям  $x$  и  $x + \Delta x$  аргумента соответствуют определённые значения функции: начальное  $y$  и изменённое  $y + \Delta y$ .

▼  $\Delta y$  есть величина, на которую изменяется значение функции  $y$  при изменении аргумента на величину  $\Delta x$ , и называется *приращением функции*. ▲

$\Delta y$  равняется разности между вторым и первым значениями функции.

Построим точки  $M(x; y)$  и  $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y)$  графика функции  $y = f(x)$  (рис.2).  $\Delta y = NN_1 = ON_1 - ON$ .

Геометрически приращение функции  $\Delta y$  есть разность ординат точек графика функции, соответствующих изменённому и начальному значениям аргумента.

Приращение функции  $\Delta y$  может быть как положительным, так и отрицательным. При положительном  $\Delta y$  отрезок  $NN_1 = \Delta y$  на оси ординат (рис.1) расположен выше неподвижной точки  $N$ , при отрицательном  $\Delta y$  – ниже её (рис.2).

А для того, что бы найти выражение приращения функции  $y = f(x)$ , обусловленное изменением значения аргумента  $x$  на величину  $\Delta x$  следует найти:

1. начальное значение функции есть:  $y = f(x)$ ;
2. изменённое значение её равно:  $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ ;
3. приращение функции:  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ .

Задание. Найти приращение  $\Delta y$  функции  $y = \frac{1}{x}$ . Соответствующее произвольному приращению  $\Delta x$  аргумента  $x$ .

## 2. Предел функции в точке

Пусть функция  $y = f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$ , кроме быть может, самой точки  $x_0$ .

*Определение 1* («на языке последовательностей», или по Гейне.)

▼ 1. Число  $A$  называется *пределом функции*  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  (или при  $x \rightarrow x_0$ ), если для любой последовательности допустимых значений аргумента  $x_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ( $x_n \neq x_0$ ),

сходящейся к  $x_0$  (т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ), последовательность соответствующих значений функции  $f(x_n)$ ,  $n \in N$  сходится к числу  $A$  (т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ ). ▲

В этом случае пишут  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  или  $f(x) \rightarrow A$  при  $x \rightarrow x_0$ .

*Геометрический смысл* предела функции:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  означает, что для всех точек  $x$ , достаточно близких к точке  $x_0$ , соответствующие значения функции как угодно мало отличаются от числа  $A$ .

**Определение 2** (на «языке  $\varepsilon$ - $\delta$ », или по Коши)

▼2. Число  $A$  называется *пределом функции*  $y=f(x)$  в точке  $x_0$  (или при  $x \rightarrow x_0$ ), если для любого положительного  $\varepsilon$  найдётся такое положительное число  $\delta$ , что для всех  $x \neq x_0$ , удовлетворяющих неравенству  $|x - x_0| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ . ▲

Записывают  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ .

*Геометрический смысл* предела функции:  $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , если для любой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $A$  найдётся такая  $\delta$ -окрестность точки  $x_0$ , что для всех  $x \neq x_0$  из этой  $\delta$ -окрестности соответствующие значения функции  $f(x)$  лежат в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $A$ .

Иными словами, точки графика функции  $y=f(x)$  лежат внутри полосы шириной  $2\varepsilon$ , ограниченной прямыми  $y=A+\varepsilon$ ,  $y=A-\varepsilon$ . Очевидно, что величина  $\delta$  зависит от выбора  $\varepsilon$ , поэтому пишут  $\delta=\delta(\varepsilon)$ .

### 3. Предел функции при $x \rightarrow \infty$

Пусть функция  $y=f(x)$  определена в промежутке  $(-\infty; \infty)$ .

▼ Число  $A$  называется *пределом функции*  $f(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ , если для любого положительного числа  $\varepsilon$  существует такое число  $M=M(\varepsilon)>0$ , что при всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $|x|>M$  выполняется неравенство  $|f(x)-A|<\varepsilon$ . (20) ▲

Если  $x \rightarrow +\infty$ , то пишут  $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ;

Если  $x \rightarrow -\infty$ , то пишут  $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

*Геометрический смысл* этого определения таков: для любого положительного  $\varepsilon$  существует такое положительное  $M$ , что при  $x \in (-\infty; -M)$  или  $x \in (M; +\infty)$  соответствующие значения функции совпадают в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $A$ , т.е. точки графика лежат в полосе шириной  $2\varepsilon$ , ограниченной прямыми  $y=A+\varepsilon$  и  $y=A-\varepsilon$ .

#### 4. Основные теоремы о пределах

Рассмотрим теоремы, которые облегчают нахождение пределов функции.

*Формулировка и доказательство теорем для случаев, когда  $x \rightarrow x_0$  и  $x \rightarrow \infty$ ,*

*аналогичны.* В приводимых теоремах будем считать, что пределы  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x)$  существуют и конечны.

*Теорема 1.* Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm \phi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x).$$

*Следствие.* Функция может иметь только один предел при  $x \rightarrow x_0$ .

*Теорема 2.* Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot \phi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x).$$

Теоремы 1 и 2 справедливы для любого конечного числа функций.

*Следствие.* Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

*Следствие.* Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^n.$$

*Следствие.*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{\phi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x)}.$$

$x_0$  может обозначать и число и один из символов  $\infty, +\infty, -\infty$ .

*Теорема.* Предел дроби равен пределу числителя, делённому на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x)}, \quad \left( \lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) \neq 0 \right).$$

Рассмотрим выражение вида  $\frac{f(x)}{\phi(x)}$ . Возможны случаи:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = b$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\phi(x)}$
$a=0$	$b \neq 0$	0
$a \neq 0$	$b=0$	$\infty$
$a=0$	$b=0$	НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ дробь может принимать различные значения, а также вовсе не иметь предела
$a = \infty$	$b = \infty$	

## 5. Признаки существования пределов

Не всякая функция, даже ограниченная, имеет предел. Во многих вопросах анализа бывает достаточно только убедиться в существовании предела функции. В таких случаях пользуются признаками существования предела.

*Теорема (о пределе промежуточной функции).* Если функция  $f(x)$  заключена между двумя функциями  $\phi(x)$  и  $g(x)$ , стремящимися к одному и тому же пределу, то она также стремится к этому пределу, т.е. если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A, \quad \phi(x) \leq f(x) \leq g(x), \quad \text{то}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

**Теорема (о пределе монотонной функции).** Если функция  $f(x)$  монотонна и ограничена при  $x < x_0$  или при  $x > x_0$ , то существует соответственно её левый предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) \quad \text{или её правый предел} \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0).$$

**Следствие.** Ограниченная монотонная последовательность  $x_n, n \in \mathbb{N}$ , имеет предел.

## 6. Вычисление предела

Для того чтобы найти  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

1. вычисляем  $f(x_0)$ , если данное выражение имеет смысл, то предел равен этому выражению.

- при нахождении пределов применяют соотношения:

$$\lim_{x \rightarrow a} k = k; \quad (k = \text{const}); \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} k \cdot x = \pm\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{k}{x} = \pm 0; \quad \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{k}{x} = \pm\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} 0, & 0 < a < 1; \\ +\infty, & a > 1. \end{cases}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & 0 < a < 1; \\ 0, & a > 1. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & a > 1; \\ -\infty, & 0 < a < 1. \end{cases}; \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & a > 1; \\ +\infty, & 0 < a < 1. \end{cases}$$

Далеко не всякая подстановка предельного значения в функцию вместо независимой переменной может сразу привести к нахождению предела. Случаи, в которых подстановка предельного значения в функцию не даёт значения предела, называют *неопределённостями*; к ним относятся неопределённости видов:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \end{bmatrix}; [0 \cdot \infty]; [\infty - \infty]; [1^\infty]; [\infty^0]; [0^0] \text{ и др.}$$

2. Если в результате вычислений получилась одна из неопределённостей, то следует применить соответствующие правила для раскрытия данной неопределённости.

## Неопределённость вида $\frac{0}{0}$

- Для того чтобы разрешить неопределённость вида  $\frac{0}{0}$ , до вычисления предела средствами алгебры в числителе и знаменателе выделяем множитель  $(x - a) \rightarrow 0$  и сокращаем на него, т.к.  $(x - a) \neq 0$ .

- Чтобы раскрыть неопределённость  $\frac{0}{0}$ , в которой числитель или знаменатель содержит иррациональность, следует соответствующим образом избавиться от иррациональности.

## Неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$

- Числитель и знаменатель, *сложные степенные* функции: необходимо вынести за скобку в числителе и знаменателе дроби неизвестное с наибольшим показателем степени среди всех слагаемых дроби; после сокращения дроби неопределённость устраняется.
- Предел рационального выражения вида

$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots + b_mx^m}$  при  $x \rightarrow \infty$  будем рассматривать как предел частного двух многочленов, который равен:

- 0, если степень числителя  $n$  *меньше* степени знаменателя  $m$ , т.е.  $n < m$ ;
  - отношению коэффициентов при старших членах, если степени числителя  $n$  и знаменателя  $m$  равны, т.е.  $n = m$ ;
  - $\infty$ , если степень числителя  $n$  *больше* степени знаменателя  $m$ , т.е.  $n > m$ .
- Числитель и знаменатель, *сложные показательные* функции: за скобку вынести наиболее быстро возрастающее слагаемое среди всех слагаемых дроби; после сокращения дроби неопределённость устраняется.

## Неопределённости $[\infty - \infty]$ и $[0 \cdot \infty]$

- Неопределённости  $[\infty - \infty]$  и  $[0 \cdot \infty]$  раскрываются путём преобразования и

сведения их к неопределённости  $\frac{0}{0}$  или  $\frac{\infty}{\infty}$ .

## Порядок выполнения работы

### Задание: Вычислить пределы

Вариант 1	Вариант 2
1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4};$	1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + x - 6};$
2. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 25}{x^2 + 9x + 20};$	2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4};$
3. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{9 - x^2}{3x - x^2};$	3. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5x - x^2}{25 - x^2};$
4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1};$	4. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9};$
5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x - 2x^2 + 2}{x^3 - 2x^2 + 3x};$	5. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 9x - x^2 + 9}{x^3 - 4x^2 + 3x};$
6. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 7x + 3}{2x^2 - x};$	6. $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{5}} \frac{5x^2 - 9x - 2}{5x^2 + x};$
7. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2};$	7. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^3 - 27};$
8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3}{4x - 1};$	8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x - 1}{2x - 3};$
9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{4x^2 - 1};$	9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - 1}{5x + 1};$
10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 3x - 1}{4 + x};$	10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 5}{2x^3 - 1};$
11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x + 1}{4x^3 - x};$	11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 - 2x}{x + 5x^4};$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 9

### Тема: «Производная и дифференциал»

**Цель:** научиться находить производные функций, значение производной в точке.

**Оборудование:** справочные пособия, микрокалькуляторы.

#### Справочный материал

##### Производная

$$f'(x_0) = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \Delta x = x - x_0$$

##### Правила вычисления производных

$$\begin{aligned} (cu)' &= cu' & (u \cdot v)' &= u'v + v'u \\ (u \pm v)' &= u' \pm v' & \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - v'u}{v^2} \end{aligned}$$

##### Формулы производных

1) $c' = 0$	
2) $x' = 1$	9) $(\sin x)' = \cos x$
3) $(kx)' = k$	10) $(\cos x)' = -\sin x$
4) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	11) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
5) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	12) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
6) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	13) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
7) $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}$	14) $(e^x)' = e^x$
8) $\left(\frac{1}{x^3}\right)' = -\frac{3}{x^4}$	15) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
	16) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

#### Порядок выполнения работы

##### Вариант 1

1. Найдите производную функции:

$$f(x) = \frac{x^3}{6} - 0,5x^2 - 3x + 2,$$

вычислите ее значение при  $x = -1$ .

2. Найдите  $f'(x)$ , если  $f(x) = x\sqrt{x}$ .
3. Найдите производную функции  $g(x) = \frac{3}{5-4x}$ .
4. Найдите значение  $f'(0,5)$ , если  $f(x) = \frac{3}{5-4x}$ .
5. Решите уравнение:  $f'(x) = 0$ , если  $f(x) = 4x + \frac{8}{x}$ .
6. Решите неравенство:  $g'(x) < 0$ , если  $g(x) = (x - 3)(x + 2)^2$ .

### **Вариант 2**

1. Найдите производную функции:

$$f(x) = -\frac{x^3}{6} + 1,5x^2 + 5x - 3,$$

вычислите ее значение при  $x = -2$ .

2. Найдите  $f'(x)$ , если  $f(x) = -x\sqrt{x}$ .
3. Найдите производную функции  $g(x) = \frac{4-3x}{x+2}$ .
4. Найдите значение  $f'(-0,5)$ , если  $f(x) = \frac{4}{3+2x}$ .
5. Решите уравнение:  $g(x) = 0$ , если  $g(x) = 3x + \frac{9}{x}$ .
6. Решите неравенство:  $f'(x) > 0$ , если  $f(x) = (4 - x)(x + 3)^2$ .

## **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 10**

### **Тема: «Неопределенный интеграл»**

**Цель:** научиться вычислять неопределенный интеграл различными способами.

**Оборудование:** таблицы первообразных некоторых функций, микрокалькуляторы.

### **Справочный материал**

*1. Свойства неопределенного интеграла:*

1.  $\left( \int f(x) dx \right)' = (F(x) + C)' = f(x);$

2.  $d\left( \int f(x) dx \right) = f(x) dx;$

$$3. \int dF(x) = F(x) + C;$$

$$4. \int (u + v - w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx; \text{ где } u, v, w - \text{некоторые функции от } x.$$

$$\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx;$$

## 2. Таблица основных интегралов.

Интеграл		Значение	Интеграл		Значение
1	$\int \operatorname{tg} x dx$	$+C \mid \cos x \mid -\ln$	9	$\int e^x dx$	$e^x + C$
2	$\int \operatorname{ctg} x dx$	$+C \mid \sin x \mid \ln$	10	$\int \cos x dx$	$\sin x + C$
3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	11	$\int \sin x dx$	$-\cos x + C$
4	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$\operatorname{tg} x + C$
5	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x+a}{x-a} \right  + C$	13	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	$-\operatorname{ctg} x + C$
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln \left  x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right  + C$	14	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a} + C$
7	$\int x^\alpha dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	15	$\int \frac{1}{\cos x} dx$	$\ln \left  \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right  + C$

8	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln x  + C$	16	$\int \frac{1}{\sin x} dx$	$\ln \left  \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right  + C$
---	---------------------	--------------	----	----------------------------	--

3. Способ подстановки (замены переменных).

**Теорема:** Если требуется найти интеграл  $\int f(x)dx$  (t) и ф, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены  $x = (t)dt$  получается:  $\int f(x)dx =$

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Пример 1.

Найти неопределенный интеграл  $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$ .

Сделаем замену  $t = \sin x, dt = \cos x dx$ .

$$\int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C.$$

Пример 2.  $\int x(x^2 + 1)^{3/2} dx$ .

Замена  $t = x^2 + 1; dt = 2x dx; dx = \frac{dt}{2x}$ ; Получаем:

$$\int t^{3/2} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{3/2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2 + 1)^{5/2}}{5} + C;$$

## Порядок выполнения работы

Вычислить неопределенный интеграл:

$$1. y = \int x^3 - x^2 + \frac{1}{x^2} dx$$

$$2. y = \int \sqrt[3]{x} dx$$

$$3. y = \int \left( \frac{2+x}{x} \right)^2 dx$$

$$4. y = \int \frac{x^2 + \sqrt{x^3 + 3}}{\sqrt{x}} dx$$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 11

### Тема: «Определенный интеграл»

**Цель:** научиться вычислять определенный интеграл.

**Оборудование:** таблицы первообразных некоторых функций, микрокалькуляторы.

#### Справочный материал

**ПРИМЕР 1.** Вычислите интеграл  $\int_{-2}^2 (-4x + 4 + x^2) dx$ .

**РЕШЕНИЕ.** Найдем множество всех первообразных для функции  $-4x + 4 + x^2$ :

$$F(x) = -4 \cdot \frac{x^2}{2} + 4 \cdot x + \frac{x^3}{3} + C = -2x^2 + 4x + \frac{x^3}{3} + C.$$

Пользуясь формулой Ньютона-Лейбница, получаем:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 (-4x + 4 + x^2) dx &= \left( -2x^2 + 4x + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^2 = \left( -2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + \frac{2^3}{3} \right) - \left( -2 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + \frac{(-2)^3}{3} \right) = \\ &= \left( -8 + 8 + \frac{8}{3} \right) - \left( -8 - 8 - \frac{8}{3} \right) = 21 \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

**О т в е т:**  $21 \frac{1}{3}$ .

**ПРИМЕР 2.** Выясните, при каком отрицательном значении переменной  $a$  верно равенство

$$\int_{-2a}^a 2x^3 dx = -7,5?$$

**РЕШЕНИЕ.** Поскольку для  $2x^3$  одной из первообразных является  $\frac{x^4}{2}$ ,

$$\int_{-2a}^a 2x^3 dx = \left( \frac{x^4}{2} \right) \Big|_{-2a}^a = \frac{a^4}{2} - \frac{(-2a)^4}{2} = -\frac{15a^4}{2}.$$

Следовательно, нужно решить уравнение:

$$-\frac{15a^4}{2} = -7,5,$$

$$-\frac{15a^4}{2} = -\frac{15}{2},$$

$$a^4 = 1,$$

$$a = \pm 1.$$

Отрицательный корень этого уравнения – это число  $-1$ .

О т в е т: -1.

## Порядок выполнения работы

### Вариант 1

1. Вычислите интегралы: а)  $\int_{-1}^2 x^2 dx$ ; б)  $\int_0^{\frac{\pi}{12}} (1 + \cos 2x) dx$ .
2. Докажите справедливость равенства:  $\int_0^1 (2x + 1) dx = \int_0^2 (x^3 - 1) dx$ .

### Вариант 2

1. Вычислите интегралы: а)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} -2 \sin x dx$ ; б)  $\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$ .
2. Докажите справедливость равенства:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \int_0^{\sqrt[3]{3}} x^2 dx$ .

### Вариант 3

1. Вычислите интегралы: а)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$ ; б)  $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)^2}$ .
2. Докажите справедливость равенства:  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = \int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ .

### Вариант 4

1. Вычислите интегралы: а)  $\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ ; б)  $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{2x}{9}\right)}$ .
2. Докажите справедливость равенства:  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_0^1 dx$ .

### Вариант 5

1. Вычислите интегралы: а)  $\int_{-1}^2 -x^3 dx$ ; б)  $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) dx$ .
2. Верно ли неравенство:  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x} < \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^2}$  ?

### Вариант 6

1. Вычислите интегралы: а)  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} -\frac{dx}{\sin^2 x}$ ; б)  $\int_0^2 (1+3x)^4 dx$ .
3. Верно ли неравенство:  $\int_{-1}^1 x^4 dx < \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$  ?

### Вариант 7

1. Вычислите интегралы: а)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos x dx$ ; б)  $\int_2^7 \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$ .
2. Верно ли неравенство:  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} > \int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$  ?

### Вариант 8

1. Вычислите интегралы: а)  $\int_1^5 x^4 dx$ ; б)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$ .
2. Верно ли неравенство:  $\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx > \int_2^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{x^2}$  ?

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 12

### Тема: «Дифференциальные уравнения»

**Цель:** научиться решать дифференциальные уравнения I и II –го порядков, находить общее и частное решение.

**Оборудование:** таблицы первообразных некоторых функций, микрокалькуляторы.

### Справочный материал

#### 1. Дифференциальное уравнение *первого порядка*, содержит:

- 1) независимую переменную  $x$ ;
- 2) зависимую переменную  $y$  (функцию);
- 3) первую производную функции:  $y'$ .

Решить дифференциальное уравнение – это значит, найти **множество**

**функций**  $y = f(x) + C$ , которые удовлетворяют данному уравнению. Такое

множество функций называется **общим решением дифференциального уравнения**.

### Пример 1

Решить дифференциальное уравнение  $xy' = y$

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = y$$

В рассматриваемом примере переменные легко разделяются перекидыванием множителей по правилу пропорции:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Переменные разделены. В левой части – только «игреки», в правой части – только «иксы».

Следующий этап – **интегрирование дифференциального уравнения**.

Интегрируем обе части:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |y| = \ln |x| + C$$

Решение дифференциального уравнения в неявном виде называется **общим интегралом дифференциального уравнения**. То есть,  $\ln |y| = \ln |x| + C$  – это общий интеграл.

**Вместо** записи  $\ln |y| = \ln |x| + C$  обычно пишут  $\ln |y| = \ln |x| + \ln |C|$ .

В данном случае:

$$\ln |y| = \ln |Cx|$$

$$y = Cx$$

Функция представлена в явном виде. Это и есть общее решение.

Множество функций  $y = Cx$ , где  $C = const$  является общим решением дифференциального уравнения  $xy' = y$ .

Придавая константе  $C$  различные значения, можно получить бесконечно много **частных решений** дифференциального уравнения.

## Пример 2

Найти частное решение дифференциального уравнения  $y' = -2y$ , удовлетворяющее начальному условию  $y(0) = 2$

По условию требуется найти **частное решение** ДУ, удовлетворяющее начальному условию. Такая постановка вопроса также называется *задачей Коши*.

Сначала находим общее решение.

$$\frac{dy}{dx} = -2y$$

$$\frac{dy}{y} = -2dx$$

Интегрируем уравнение:

$$\int \frac{dy}{y} = -2 \int dx$$

$$\ln |y| = -2x + C^*$$

$$y = e^{-2x + C^*}$$

$$y = e^{C^*} \cdot e^{-2x}$$

Итак, общее решение:  $y = Ce^{-2x}$ , где  $C = const$ . На завершающем этапе нужно найти частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию  $y(0) = 2$ .

Необходимо подобрать **такое** значение константы  $C$ , чтобы выполнялось заданное начальное условие  $y(0) = 2$ .

В общее решение вместо «икса» подставляем ноль, а вместо «игрека» двойку:

$$y(0) = Ce^{-2 \cdot 0} = Ce^0 = C = 2$$

В общее решение  $y = Ce^{-2x}$  подставляем найденное значение константы  $C = 2$ :

$y = 2e^{-2x}$  – это и есть нужное нам частное решение.

### Пример 3

Решить дифференциальное уравнение  $y' + (2y + 1)\operatorname{ctgx} = 0$

**Решение:** Переписываем производную в нужном нам виде:

$$\frac{dy}{dx} + (2y + 1)\operatorname{ctgx} = 0$$

Переносим второе слагаемое в правую часть со сменой знака:

$$\frac{dy}{dx} = -(2y + 1)\operatorname{ctgx}$$

$$\frac{dy}{2y + 1} = -\operatorname{ctgx} dx$$

Переменные разделены, интегрируем обе части:

$$\int \frac{dy}{2y + 1} = -\int \operatorname{ctgx} dx$$

$$\int \frac{dy}{2y + 1} = -\int \frac{\cos x dx}{\sin x}$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{d(2y + 1)}{2y + 1} = -\int \frac{d(\sin x)}{\sin x}$$

$$\frac{1}{2} \ln |2y + 1| = -\ln |\sin x| + \ln |C|$$

Решение распишем очень подробно:

$$\ln |2y + 1|^{\frac{1}{2}} = \ln |\sin x|^{-1} + \ln |C|$$

$$\ln \sqrt{2y + 1} = \ln \frac{1}{|\sin x|} + \ln |C|$$

$$\ln \sqrt{2y + 1} = \ln \left| \frac{C}{\sin x} \right|$$

$$\sqrt{2y + 1} = \frac{C}{\sin x}$$

**Ответ:** общий интеграл:  $\sqrt{2y + 1} \cdot \sin x = C$ , где  $C = \text{const}$

**Примечание:** общий интеграл любого уравнения можно записать не единственным способом. Таким образом, если у вас не совпал результат с заранее известным ответом, то это еще не значит, что вы неправильно решили уравнение.

#### Пример 4

Найти частное решение дифференциального уравнения  $e^{y-x^2} dy - 2x dx = 0$ , удовлетворяющее начальному условию  $y(0) = \ln 2$ . Выполнить проверку.

**Решение:** Сначала найдем общее решение. Данное уравнение уже содержит готовые дифференциалы  $dy$  и  $dx$ , а значит, решение упрощается. Разделяем переменные:

$$e^y \cdot e^{-x^2} dy - 2x dx = 0$$

$$e^y \cdot e^{-x^2} dy = 2x dx$$

$$e^y dy = \frac{2x dx}{e^{-x^2}}$$

$$e^y dy = 2x e^{x^2} dx$$

Интегрируем уравнение:

$$\int e^y dy = 2 \int x e^{x^2} dx$$

$$\int e^y dy = \int e^{x^2} d(x^2)$$

$$e^y = e^{x^2} + C$$

$$\ln e^y = \ln(e^{x^2} + C)$$

$$y = \ln(e^{x^2} + C)$$

общее решение:

$$y = \ln(e^{x^2} + C), \text{ где } C = \text{const}$$

Найдем частное решение, соответствующее заданному начальному условию  $y(0) = \ln 2$

$$\ln 2 = \ln(e^0 + C)$$

$$\ln 2 = \ln(1 + C) \Rightarrow C = 1$$

$$y(0) = \ln(e^0 + C) = \ln(1 + C) = \ln 2 \Rightarrow C = 1$$

Подставляем найденное значение константы  $C = 1$  в общее решение.

**Ответ:** частное решение:  $y = \ln(e^{x^2} + 1)$

## 2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

В теории и практике различают два типа таких уравнений – **однородное уравнение** и **неоднородное уравнение**.

**Однородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами** имеет следующий вид:

$$y'' + py' + qy = 0, \text{ где } p \text{ и } q \text{ – константы (числа), а в правой части – строго ноль.}$$

**Неоднородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами** имеет вид:

$y'' + py' + qy = f(x)$ , где  $p$  и  $q$  – константы, а  $f(x)$  – функция, зависящая *только от «икс»*. В простейшем случае функция  $f(x)$  может быть числом, *отличным от нуля*.

Какая мысль приходит в голову после беглого взгляда? Неоднородное уравнение кажется сложнее. На этот раз первое впечатление не подводит!

Кроме того, чтобы научиться решать неоднородные уравнения **необходимо** уметь решать однородные уравнения. По этой причине сначала рассмотрим алгоритм решения линейного однородного уравнения второго порядка:

$$y'' + py' + qy = 0$$

Для того чтобы решить данное ДУ, нужно составить так называемое *характеристическое уравнение*:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

По какому принципу составлено характеристическое уравнение, отчётливо видно:

вместо второй производной записываем  $\lambda^2$ ;

вместо первой производной записываем просто «лямбду»;

вместо функции  $y$  ничего не записываем.

$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  – это **обычное квадратное уравнение**, которое предстоит решить.

Существуют три варианта развития событий.

Они доказаны в курсе математического анализа, и на практике мы будем использовать готовые формулы.

**Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня**

Если характеристическое уравнение  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  имеет

два **различных** действительных корня  $\lambda_1, \lambda_2$  (т.е., если дискриминант  $D > 0$ ), то общее решение однородного уравнения выглядит так:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \text{ где } C_1, C_2 - \text{константы.}$$

В случае если один из корней равен нулю, решение очевидным образом

упрощается; пусть, например,  $\lambda_1 = 0$ , тогда общее

решение:  $y = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = C_1 + C_2 e^{\lambda_2 x}$

### Пример 5

Решить дифференциальное уравнение  $y'' + y' - 2y = 0$

**Решение:** составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9, \sqrt{D} = 3$$

$$\lambda_1 = \frac{-1-3}{2} = -2, \quad \lambda_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

**Ответ:** общее решение:  $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$ , где  $C_1, C_2 - \text{const}$

**Характеристическое уравнение имеет два кратных действительных корня**

Если характеристическое уравнение  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  имеет

два **кратных** (совпавших) действительных корня  $\lambda_1 = \lambda_2$  (дискриминант  $D = 0$ ), то общее решение однородного уравнения принимает вид:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}, \text{ где } C_1, C_2 - \text{константы.}$$

Вместо  $\lambda_1$  в формуле можно было нарисовать  $\lambda_2$ , корни всё равно одинаковы.

Если оба корня равны нулю  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , то общее решение опять же

упрощается:  $y = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 x e^{0 \cdot x} = C_1 + C_2 x$ . Кстати,  $y = C_1 + C_2 x$  является общим

решением того самого примитивного уравнения  $y'' = 0$ , о котором я упоминал в

начале урока. Почему? Составим характеристическое уравнение:  $\lambda^2 = 0$  —

действительно, данное уравнение как раз и имеет совпавшие нулевые

корни  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .

### Пример 6

Решить дифференциальное уравнение  $y'' - 6y' + 9y = 0$

**Решение:** составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

Здесь можно вычислить дискриминант, получить ноль и найти кратные корни. Но можно невозбранно применить известную школьную формулу сокращенного умножения:

$$(\lambda - 3)^2 = 0$$

Получены два кратных действительных корня  $\lambda_{1,2} = 3$

**Ответ:** общее решение:  $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$ , где  $C_1, C_2 - \text{const}$

### Характеристическое уравнение имеет сопряженные комплексные корни

Если характеристическое уравнение  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

имеет **сопряженные** комплексные корни  $\lambda_1 = \alpha - \beta i$ ,  $\lambda_2 = \alpha + \beta i$

(дискриминант  $D < 0$ ), то общее решение однородного уравнения принимает вид:

$y = e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ , где  $C_1, C_2$  – константы.

*Примечание: Сопряженные комплексные корни почти всегда записывают кратко следующим образом:  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$*

Если получаются *чисто мнимые* сопряженные комплексные корни:  $\lambda_{1,2} = \pm \beta i$ , то общее решение упрощается:

$$y = e^{0 \cdot x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$$

### Пример 7

Решить однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' - 2y' + 10y = 0$$

**Решение:** Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$$

$$D = 4 - 40 = -36$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i \quad \text{– получены сопряженные комплексные корни}$$

**Ответ:** общее решение:  $y = e^x (C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x)$ , где  $C_1, C_2 - const$

### Пример 8

Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее

начальным условиям  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$

$$y'' - 4y = 0$$

**Решение:** составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 4 = 0$$

$$(\lambda + 2)(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2$$

Получены два различных действительных корня, поэтому общее решение:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}, \text{ где } C_1, C_2 - const$$

Алгоритм нахождения частного решения следующий:

Сначала используем начальное условие  $y(0) = 1$ :

$$y(0) = C_1 e^{-2 \cdot 0} + C_2 e^{2 \cdot 0} = C_1 + C_2$$

Согласно начальному условию, получаем первое уравнение:  $y(0) = C_1 + C_2 = 1$  или просто  $C_1 + C_2 = 1$

Далее берём наше общее решение  $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$  и находим производную:

$$y' = (C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x})' = -2C_1 e^{-2x} + 2C_2 e^{2x}$$

Используем второе начальное условие  $y'(0) = 2$ :

$$y'(0) = -2C_1 e^{-2 \cdot 0} + 2C_2 e^{2 \cdot 0} = -2C_1 + 2C_2$$

Согласно второму начальному условию, получаем второе

уравнение:  $y'(0) = -2C_1 + 2C_2 = 2$  или просто  $-2C_1 + 2C_2 = 2$

Составим и решим систему из двух найденных уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -2C_1 + 2C_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -2C_1 + 2C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 + C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 2C_2 = 2 \\ C_2 = 1, C_1 = 0$$

Подставим найденные значения констант  $C_1 = 0$ ;  $C_2 = 1$  в общее

решение  $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$ :

$$y = 0 \cdot e^{-2x} + 1 \cdot e^{2x} = e^{2x}$$

**Ответ:** частное решение:  $y = e^{2x}$

## Порядок выполнения работы

### Вариант 1

1. Найти общее решение дифференциального уравнения к разделяющимися переменными.

$$xy' - y = 0$$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

$$\operatorname{tg} x * y' = 1 + y, \quad \text{если}$$

$$x = \frac{\pi}{6}; y = -\frac{1}{2}$$

3. Найти решение однородного дифференциального уравнения первого порядка.

$$yy' = 2y - x$$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения 2-го порядка.

$$y'' - 4y' + 13y = 0$$

5. Найти частное решение дифференциального уравнения 2-го порядка.

$$y'' + y' - 2y = 0$$

$$\text{если } x = 0; y = 1; y' = 3$$

### **Вариант 2**

1. Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

$$xy' + y = 0$$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

$$(1 - x^2) \frac{dx}{dy} + xy = 0, \text{ если } x = 0, y = 4$$

3. Найти решение однородного дифференциального уравнения первого порядка.

$$x^2 + y^2 - 2xy * y' = 0$$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения 2-го порядка.

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

5. Найти частное решение дифференциального уравнения 2-го порядка.

$$y'' + 4y' - 5y = 0$$

$$\text{если } x = 0; y = 4; y' = 2$$

### **Вариант 3**

1. Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

$$yy' + x = 0$$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

$$dy + y \, dy \, x \, dx = 0, \text{ если } x = 0, y = 1$$

3. Найти решение однородного дифференциального уравнения первого порядка.

$$x^2 y' = y^2 + xy$$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения 2-го порядка.

$$y'' - 4y = 0$$

5. Найти частное решение дифференциального уравнения 2-го порядка.

$$y'' - 4y' = 0, x = 0; y = 2; y' = 8$$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 13

### Тема: «Множества. Отношения»

**Цель:** научиться решать задачи с использованием множеств, отношений.

**Оборудование:** таблицы первообразных некоторых функций, микрокалькуляторы.

### Справочный материал

#### Теория множеств

**Множеством**  $S$  называется объединение в одно целое объектов, хорошо различимых нашей мыслью или интуицией. Эти объекты называется **элементами** множества  $S$ . Такое интуитивное определение дал немецкий математик Г. Кантор.

В данном определении важны следующие два момента:

1. Множество- это нечто, состоящее из хорошо различимых объектов.
2. Это нечто мыслится как единое целое.

Множества бывают конечными и бесконечными, Количество элементов в конечном множестве называется **мощностью** множества. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым множеством** и

обозначается  $\emptyset$ . Множество, включающее в себя все рассматриваемые множества, называется универсальным множеством или **универсумом** и обозначается  $U$ . Символом  $\in$  обозначается отношение принадлежности. Запись  $x \in X$  означает, что элемент  $x$  принадлежит множеству  $X$ . Если элемент  $x$  не принадлежит множеству  $X$ , то пишут  $x \notin X$ .

Множества могут быть заданы следующими способами:

1. перечислением (списком своих элементов);
2. описанием свойств, которыми должны обладать его элементы;
3. порождающей процедурой.

### ПРИМЕР

Множество экзаменационных оценок может быть задано:

1. перечислением  $A = \{2; 3; 4; 5\}$
2. описанием свойств:  $A = \{a \mid a - \text{экзаменационная оценка}\}$
3. порождающей процедурой:  $A = \{a \mid a = 2 + i, i = \overline{0,3}\}$

**Подмножеством** множества  $A$  называется множество  $B$ , если любой элемент множества  $B$  принадлежит множеству  $A$ :

$$A \subseteq B \mid a \in A \text{ и } a \in B \quad (1)$$

Символом  $\subseteq$  обозначается отношение включения. Запись  $A \subseteq B$  означает множество  $A$  является подмножеством множества  $B$ .

Не следует смешивать отношение принадлежности  $\in$  и отношение включения  $\subseteq$ . Отношение принадлежности применяется к элементам множества, а отношение включения к множествам. Хотя  $1 \in \{1\}, \{1\} \in \{\{1\}\}$ , не верно, что  $1 \in \{\{1\}\}$ , так как единственным элементом множества  $\{\{1\}\}$  является  $\{1\}$ .

Если  $A \subseteq B$  и  $A \neq B$ , то  $A \subset B$ , то есть множество  $A$  строго включено в множество  $B$ . Символ  $\subset$  называется строгим включением.

### Свойства подмножеств

1. **Рефлексивность.** Множество  $A$  является подмножеством множества  $A$ :

$$A \subseteq A. \quad (2)$$

2. **Транзитивность.** Если множество  $A$  является подмножеством множества  $B$ , а множество  $B$  является подмножеством множества  $C$ , то множество  $A$  является подмножеством множества  $C$ :

$$A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C \quad (3)$$

3. **Принцип объемности.** Если множество  $A$  является подмножеством множества  $B$ , а множество  $B$  является подмножеством множества  $A$ , то множество  $A$  равно множеству  $B$ :

$$A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A = B \quad (4)$$

### Операции над множествами

1. **Объединением** множеств  $A$  и  $B$  называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств  $A$  или  $B$ :

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ или } x \in B\} \quad (5)$$

2. **Пересечением** множеств  $A$  и  $B$  называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству  $A$  и множеству  $B$ :

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\} \quad (6)$$

3. **Разностью** множества  $A$  и  $B$  называется множество всех тех элементов, которые принадлежат множеству  $A$  и не принадлежат множеству  $B$ :

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ и } x \notin B\} \quad (7)$$

4. **Симметричной разностью** множеств  $A$  и  $B$  называется множество, состоящее из элементов множества  $A$ , не принадлежащих множеству  $B$ , и элементов множества  $B$ , не принадлежащих множеству  $A$ :

$$A \Delta B = \{x | (x \in A \text{ и } x \notin B) \text{ и } (x \in B \text{ и } x \notin A)\} \quad (8)$$

5. **Дополнением** множества  $A$  называется множество всех тех элементов, которые не принадлежат множеству  $A$ :

$$\overline{A} = \{x | x \notin A\} \quad (9)$$

Для наглядного представления операций над множествами используют **диаграммы Эйлера-Венна**.

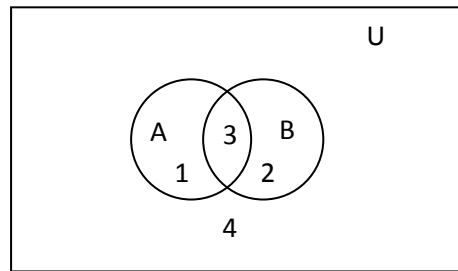


Рис 1. Диаграмма Эйлера-Венна

где  $A \cup B$  - это области 1,2,3

$A \cap B$  - это область 3;

$A \setminus B$  - это область 1;

$A \Delta B$  - это область 1,3

$\overline{A}$  - это области 2,4.

### Алгебра теории множеств

Для любых множеств  $A$ ,  $B$  и  $C$  выполнимы следующие тождества:

1. Коммутативный закон

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A \qquad (9)$$

2. Ассоциативный закон

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \qquad (10)$$

3. Дистрибутивный закон

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (11)$$

4. Закон поглощения

$$A \cup (A \cap B) = A \qquad A \cap (A \cup B) = A \qquad (12)$$

5. Закон идемпотентности

$$A \cup A = A \qquad A \cap A = A \qquad (13)$$

6. Закон де Моргана

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad (14)$$

7. Закон исключенного третьего

$$A \cup \bar{A} = U \quad (15)$$

8. Закон противоречия

$$A \cap \bar{A} = \emptyset \quad (16)$$

9. Операции с универсумом:

$$A \cup U = U \quad A \cap U = A \quad (17)$$

10. Операции с пустым множеством:

$$A \cup \emptyset = A \quad A \cap \emptyset = \emptyset \quad (18)$$

$$11. \bar{\bar{U}} = \emptyset \quad \bar{\emptyset} = U \quad (19)$$

12. Закон двойного дополнения

$$\bar{\bar{A}} = A \quad (20)$$

$$13. A \setminus B = A \cap \bar{B} \quad (21)$$

$$14. A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) \quad (22)$$

При преобразованиях выражений над множествами по законам алгебры логики существуют следующие приоритеты: самой приоритетной операцией является дополнение, затем пересечение и в последнюю очередь объединение.

### Прямое (декартово) произведение множество

**Прямым (декартовым) произведением** множества  $A$  и множества  $B$  называется множество пар таких, что:

$$A \times B = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A, y \in B \}, \quad (29)$$

ПРИМЕР.

Пусть заданы  $X$  и  $Y$ :  $X = \{x \mid x \leq 2\}$ ,  $Y = \{y \mid y \leq 2\}$ . Тогда прямое (декартово) произведение этих множеств может быть представлено графически:  $X = \{x \mid x \leq 2\}$

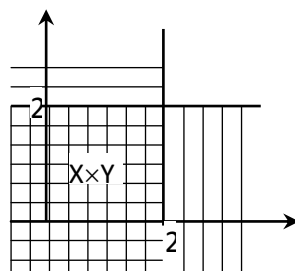


Рис. 2. График прямого произведения множеств  $X$  и  $Y$ :

Пусть заданы  $X$  и  $Y$ :  $X = \{a; b; c; d; e; f; g; h\}$ ,  $Y = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ . Тогда прямое (декартовое) произведение этих множеств представляет шахматную доску.

## Отношения

**Отношением** называется пара вида  $\varphi = \langle \Phi, M \rangle$  такая, что  $\Phi \subseteq M^2$  ( $M^2 = M \times M$ ), где  $\Phi$  - график отношения,  $M$  - это множество, между элементами которого существует данное отношение.

### ПРИМЕР.

Пусть дано  $\varphi = \langle \Phi, M \rangle$ , где  $M = \{x \mid x \in N\}$ , а график отношения определяется как  $\Phi = \{ \langle x, y \rangle \mid x > y \}$ . Это отношение "X больше Y" на множестве натуральных чисел. Данное отношение задано описанием свойств. Перечислением данное отношение может быть задано следующим образом:

$$\varphi = \langle \Phi, N \rangle,$$

$$\text{где } \Phi = \{ \langle 2, 1 \rangle; \langle 3, 1 \rangle; \langle 3, 2 \rangle; \dots \langle 4, 1 \rangle; \langle 4, 2 \rangle; \dots \}$$

Отношение называется **полным**, если  $\Phi = M^2$ .

Отношение называется **отношением равенства**, если  $\Phi = \Delta M = \{ \langle x, x \rangle; \langle y, y \rangle; \dots \}$ .

Отношение называется **отношением неравенства**, если  $\Phi = M^2 \setminus \Delta M$ .

Запись  $x \varphi y$  означает, что между  $x$  и  $y$  существует отношение  $\varphi$ .

## Операции над отношениями

Пусть даны два отношения  $\varphi = \langle \Phi, M \rangle$  и  $r = \langle R, M \rangle$ . Над данными отношениями могут быть выполнены следующие операции:

1. объединение  $\varphi \cup r = \langle \Phi \cup R, M \rangle$ .
2. пересечение  $\varphi \cap r = \langle \Phi \cap R, M \rangle$ .
3. дополнение  $\bar{\varphi} = \{ M^2 \setminus \Delta M \}$
4. разность  $\varphi \setminus r = \langle \Phi \setminus R, M \rangle$ .

5. композиция  $\varphi \circ r = \langle \Phi \circ R, M \rangle$ .

6. инверсия  $\varphi^{-1} = \langle \Phi^{-1}, M \rangle$ .

## Основные свойства отношений

### 1. Рефлексивность.

Отношение называется **рефлексивным**, если для всех  $x$  выполняется условие:  $x\varphi x$  или  $\Delta M \subseteq \Phi$ .

### 2. Антирефлексивность.

Отношение называется **антирефлексивным**, если для всех  $x$  выполняется условие:  $\neg x\varphi x$  (символ “ $\neg$ ” означает “не выполняется”) или  $\Delta M \cap \Phi = \emptyset$ .

### 3. Симметричность.

Отношение называется **симметричным**, если для всех  $x$  выполняется условие:  $x\varphi y \Rightarrow y\varphi x$  или  $\Phi = \Phi^{-1}$ .

### 4. Антисимметричность.

Отношение называется **антисимметричным**, если для всех  $x$  выполняется условие:  $x\varphi y$  и  $x \neq y \Rightarrow \neg y\varphi x$  или  $\Phi \cap \Phi^{-1} \subseteq \Delta M$ .

### 5. Асимметричность.

Отношение называется **асимметричным**, если для всех  $x$  выполняется условие:  $x\varphi y \Rightarrow \neg y\varphi x$  или  $\Phi \cap \Phi^{-1} = \emptyset$ .

### 6. Связность (полнота).

Отношение называется **связным (полным)**, если для всех  $x$  выполняется условие:  $x \neq y \Rightarrow x\varphi y$  или  $y\varphi x$  или  $M^2 \setminus \Delta M \subseteq \Phi \cup \Phi^{-1}$ .

### 7. Транзитивность.

Отношение называется **транзитивным**, если для всех  $x$  выполняется условие:  $x\varphi y$  и  $y\varphi z \Rightarrow x\varphi z$  или  $\Phi \circ \Phi \subseteq \Phi$ .

## ПРИМЕР

Какими свойствами обладает отношение  $\varphi = \langle \Phi, X \rangle$ , где  $X = \{1; 2; a\}$ ,

$\Phi = \{ \langle 1, 1 \rangle; \langle a, a \rangle; \langle a, 2 \rangle; \langle 2, 2 \rangle \}$ .

Определим  $\Phi^{-1}$ ,  $\Delta X$ :

$$\Phi^{-1} = \{ \langle 1, 1 \rangle; \langle a, a \rangle; \langle 2, a \rangle; \langle 2, 2 \rangle \}$$

$$\Delta X = \{ \langle 1, 1 \rangle; \langle 2, 2 \rangle; \langle a, a \rangle \}.$$

Отношение является:

- рефлексивным, так как  $\Delta X \subseteq \Phi$ ;
- антисимметричным, так как  $\Phi \cap \Phi^{-1} \subseteq \Delta X$ ;
- транзитивным, так как  $\Phi \circ \Phi = \{ \langle 1, 1 \rangle; \langle a, a \rangle; \langle a, 2 \rangle; \langle 2, 2 \rangle \} \subseteq \Phi$ ;
- несвязное, так как  $X^2 \setminus \Delta X = \{ \langle 1, 2 \rangle; \langle 1, a \rangle; \langle 2, 1 \rangle; \langle 2, a \rangle; \langle a, 1 \rangle; \langle a, 2 \rangle \} \not\subseteq \Phi \cup \Phi^{-1} = \{ \langle 1, 1 \rangle; \langle a, a \rangle; \langle a, 2 \rangle; \langle 2, 2 \rangle; \langle 2, a \rangle \}.$

Отношение называется **отношением эквивалентности**, если оно рефлексивное, симметричное и транзитивное.

Отношение называется **отношением нестрогого (частичного) порядка** ( $\preceq$ ), если оно рефлексивное, антисимметричное и транзитивное.

Отношение называется **совершенно нестрого порядка** ( $\preceq$ ), если оно рефлексивное, антисимметричное, транзитивное и связное.

Отношение называется **строго порядка** ( $<$ ), если оно антирефлексивное, антисимметричное и транзитивное.

Отношение называется **совершенно строго порядка** ( $<$ ), если оно антирефлексивное, транзитивное и связное.

## Порядок выполнения работы

1. Выполнить над множествами  $A$  и  $B$  операции:  $|A|$ ,  $|B|$ ,  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$ ,  $A \oplus B$ ,  $A \times B$ :
  - а)  $A = \{a, 1, b, 2, c\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ;
  - б)  $A = \{a, b, c, y, z\}$ ,  $B = \{a, b, c, d\}$ .
2. Выполнить над множествами  $A$  и  $B$  операции:  $|A|$ ,  $|B|$ ,  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$ ,  $A \oplus B$ ,  $A \times B$ :
  - а)  $A = \{a, b, 1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 2, c, d\}$ ;
  - б)  $A = \{x, y, z, t\}$ ,  $B = \{x, y, 1, 2\}$ .

3. В группе 25 учащихся. Каждый из них пользуется хотя бы одним из видов городского транспорта: трамваем, автобусом или троллейбусом. Трамваем пользуются 16 человек, автобусом – 13 человек, троллейбусом – 10 человек. Всеми тремя видами транспорта пользуются 5 человек, трамваем и автобусом – 10 человек, трамваем и троллейбусом – 8 человек, троллейбусом и автобусом – 9 человек. Сколько учащихся не пользуются ни одним видом транспорта?
4. В олимпиаде по математике для абитуриентов приняло участие 50 учащихся. Им было предложено решить одну задачу по алгебре, одну по геометрии и одну по тригонометрии. По алгебре решили задачу 25 человек, по геометрии – 20 человек, по тригонометрии – 19 человек. По алгебре и геометрии решили 9 человек, по алгебре и тригонометрии – 10 человек, по геометрии и тригонометрии – 3 человека. Все три задачи решили 2 человека. Сколько учащихся не решили ни одной задачи?

## **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 14**

### **Тема: «Элементы теории вероятностей»**

**Цель:** научиться решать задачи по разделам Элементы комбинаторики и теория вероятностей.

**Оборудование:** справочные пособия, микрокалькуляторы.

### **Справочный материал**

**Комбинаторика** – это раздел математики, в котором изучается, сколько различных комбинаций, подчинённых тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

Основными понятиями комбинаторики являются размещения, перестановки и сочетания.

1. **Размещением из  $n$  элементов по  $m$**  называется любое упорядоченное подмножество, состоящее из  $m$  различных элементов данного множества.

а) Число размещений (без повторений) из  $n$  элементов по  $m$  элементам равно

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

*Пример 1.* Сколькими способами можно выбрать председателя, заместителя и профорга из 9 человек?

*Решение.*  $n = 9$ ,  $m = 3$ .

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = \frac{9 * 8 * 7 * 6!}{6!} = 504$$

б) Число размещений (с повторением) из  $n$  элементов по  $m$  равно  $\bar{A}_n^m = n^m$ .

*Пример 2.* Сколькими способами можно рассадить 7 человек по 9 вагонам?

*Решение.* Так как в один вагон могут сесть несколько человек, и рассадка зависит от того кто в каком вагоне находится, то используем формулу размещения с повторениями:  $\bar{A}_9^7 = 9^7$

2. **Перестановкой из  $n$  элементов** называется размещение из  $n$  элементов по  $n$  элементам.

а) Число перестановок  $n$  различных элементов (без повторений) равно  $P_n = n!$

*Пример 3.* В соревнованиях по фигурному катанию принимали участие россияне, итальянцы, украинцы, немцы, китайцы и французы. Сколькими способами могут распределиться места по окончании соревнований?

*Решение.* Используем формулу перестановки без повторения для  $n = 6$ :

$$P_6 = 6! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 = 720$$

б) Число перестановок (с повторениями) равно  $\bar{P}_k = \frac{k!}{i_1! i_2! \dots i_n!}$

*Пример 4.* Сколько перестановок можно получить из букв слова КОЛОКОЛА?

*Решение.* Так как буквы в слове повторяются, то используем формулу перестановок с повторениями.

$$i_1 = 2 \text{ (количество букв «к»)}$$

$$i_2 = 3 \text{ (количество букв «о»)}$$

$$i_3 = 2 \text{ (количество букв «л»)}$$

$$i_4 = 1 \text{ (количество букв «а»)}$$

$$k = i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 2 + 3 + 2 + 1 = 8$$

$$\overline{P}_8 = \frac{8!}{2!3!2!1!} = \frac{8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}{2 * 1 * 3 * 2 * 1 * 2 * 1} = 8 * 7 * 5 * 3 * 2 = 1680$$

3. **Сочетанием из  $n$  элементов по  $m$**  называется любое подмножество, состоящее из  $m$  различных элементов данного множества

а) Число сочетаний из  $n$  элементов по  $m$  (без повторений) равно  $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

*Пример 5.* Из учащихся 25 человек нужно выбрать троих дежурных. Сколькими способами это можно сделать?

*Решение.*  $n = 25$ ,  $m = 3$ .

$$C_{25}^3 = \frac{25!}{3!(25-3)!} = \frac{25!}{3!22!} = \frac{25 * 24 * 23 * 22!}{3 * 2 * 1 * 22!} = 25 * 4 * 23 = 2300$$

б) Число сочетаний с повторениями равно  $\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$

*Пример 6.* Сколькими способами можно купить 6 пирожных, если имеются 2 сорта пирожных по 5 в каждом?

*Решение.* Поскольку при покупке пирожных порядок их расположения не важен, то используем для подсчета формулу сочетаний с повторениями, при этом  $n = 5 + 5 = 10$ ,  $m = 6$ .

$$\bar{C}_{10}^6 = C_{10+6-1}^6 = C_{15}^6 = \frac{15!}{6!(15-6)!} = \frac{15!}{6!9!} = \frac{15 * 14 * 13 * 12 * 11 * 10 * 9!}{6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 * 9!} = 5005$$

Согласно классическому определению вероятности **вероятностью события  $A$**  называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу. Вероятность события  $A$  определяется формулой:

$$P(A) = m/n,$$

где  $m$  – число элементарных исходов, благоприятствующих  $A$ ;

$n$  – число всех возможных элементарных исходов испытания.

*Пример 1.* В ящике имеется 10 красных и 8 синих шаров. Наудачу вынимают один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется синим.

*Решение.*

Дано:	Решение
$m = 8$	$A$ – извлеченный шар синего цвета
$n = 10 + 8 = 18$	$P(A) = m/n = 8/18 = 0,44$
$P(A) - ?$	Ответ: $P(A) = 0,44$ .

*Пример 2.* Бросаются два игральных кубика. Какова вероятность, что сумма выпавших очков равна 5.

*Решение.*

Дано:	Решение
$k = 6$ – количество граней кубика.	$A$ – сумма выпавших очков на двух кубиках равна 5.
	$P(A) = m/n$
	Событию $A$ благоприятствуют следующие исходы: (1,4), (4,1), (2,3), (3,2)
	→
	$m = 4$

	Каждый из кубиков можно бросить шестью способами. Тогда два кубика по правилу умножения могут упасть $6 \cdot 6 = 36$ способами $\rightarrow n = 36$
	$P(A) = 4/36 = 1/9 = 0,11 = 11\%$
$P(A) - ?$	Ответ: $P(A) = 11\%$

**Формула полной вероятности** позволяет определить вероятность события  $A$ , которое может наступить при условии появления одного из несовместных событий  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , образующих полную группу.

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$$

Чтобы оценить вероятности гипотез  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , после того как стал известен результат испытания, используется формула Байеса.

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)}$$

*Пример 1.* В первом ящике содержится 20 деталей, из них 15 стандартных; во втором 30 деталей, из них 24 стандартных; в третьем – 10 деталей, из них 6 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящика – стандартная.

*Решение*

1. Обозначим через  $A$  – событие «взятая наудачу деталь стандартна»

Событие  $B_1$  – деталь извлечена из первого ящика;

Событие  $B_2$  – деталь извлечена из второго ящика

Событие  $B_3$  – деталь извлечена из третьего ящика

2. Определим вероятности событий  $B_1, B_2$  и  $B_3$ .

Вероятность того, что деталь взята из первого ящика  $P(B_1) = 1/3$

Вероятность того, что деталь взята из второго ящика  $P(B_2) = 1/3$

Вероятность того, что деталь взята из третьего ящика  $P(B_3) = 1/3$

3. Определим условные вероятности.

Условная вероятность того, что из 1 ящика была извлечена стандартная деталь:

$$P_{B_1}(A) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

Условная вероятность того, что из 2 ящика была извлечена стандартная деталь:

$$P_{B2}(A) = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$$

Условная вероятность того, что из 3 ящика была извлечена стандартная деталь:

$$P_{B3}(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

4. По формуле полной вероятности определим вероятность события А:

$$P(A) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{4}{15} + \frac{1}{5} = \frac{43}{60} = 0,72. \text{ Ответ: } P(A) = 0,72$$

*Пример 2.* На заводе, изготавлиющем болты, первая машина производит 25%, вторая - 35%, третья - 40% всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5, 4 и 2%. Случайно выбранный из продукции болт оказался дефектным. Какова вероятность того, что он был произведен первой машиной?

*Решение*

1. Обозначим через А – событие «выбран болт с дефектом»

$B_1$  – болт произведен 1 машиной;  $B_2$  – болт произведен 2 машиной;  $B_3$  – болт произведен 3 машиной

2. По условию задачи имеем:

$$P(B_1) = 0,25$$

$$P(B_2) = 0,35$$

$$P(B_3) = 0,4$$

$$P_{B1}(A) = 0,05$$

$$P_{B2}(A) = 0,04$$

$$P_{B3}(A) = 0,02$$

По формуле Байеса определим вероятность гипотезы В, при условии что выбран болт с дефектом:

$$P_A(B_1) = \frac{0,25 \cdot 0,05}{0,25 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,04 + 0,4 \cdot 0,02} = \frac{0,0125}{0,0345} = 0,36 = 36\%$$

Ответ:  $P_A(B_1) = 36\%$

**Формула Бернулли** позволяет рассчитать вероятность того, что при  $n$  испытаниях событие  $A$  осуществится ровно  $k$  раз. Формулой Бернулли удобно пользоваться, когда  $n$  и  $k < 10$ .

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

*Пример 3.* В классе 10 компьютеров. Для каждого компьютера вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность, что в данный момент: а) включено 4 компьютера; б) включены все компьютеры; в) включено менее 3 компьютеров; г) включено не менее 3 компьютеров.

*Решение*

а)  $n = 10; k = 4; p = 0,8; q = 0,2$

По формуле Бернулли:  $P_{10}(4) = \frac{10!}{4!6!} 0,8^4 \cdot 0,2^6 = 210 \cdot 0,4096 \cdot 0,000064 = 0,0055 = 0,55\%$

б)  $n = 10; k = 10; p = 0,8; q = 0,2$

По формуле Бернулли:  $P_{10}(10) = \frac{10!}{10!0!} 0,8^{10} \cdot 0,2^0 = 1 \cdot 0,1074 \cdot 1 = 0,1074 = 10,7\%$

в)  $P_{10}(k < 3) = P_{10}(0) + P_{10}(1) + P_{10}(2)$

$$P_{10}(0) = \frac{10!}{0!10!} 0,8^0 \cdot 0,2^{10} = 0,0000001024 = 0,00001\%$$

$$P_{10}(1) = \frac{10!}{1!9!} 0,8^1 \cdot 0,2^9 = 10 \cdot 0,8 \cdot 0,000000512 = 0,000004 = 0,0004\%$$

$$P_{10}(2) = \frac{10!}{2!8!} 0,8^2 \cdot 0,2^8 = 45 \cdot 0,64 \cdot 0,00000256 = 0,000074 = 0,0074\%$$

$$P_{10}(<3) = 0,00001\% + 0,0004\% + 0,0074\% = 0,0078\%$$

г) Т.к. события «включено менее 3 компьютеров» и «включено не менее трех компьютеров» являются противоположными, то

$$P_{10}(k \geq 3) = 1 - P_{10}(<3) = 1 - 0,000078 = 0,9999 = 99,99\%$$

Ответ:  $P_{10}(4) = 0,55\%; P_{10}(10) = 10,7\%; P_{10}(k < 3) = 0,0078\%; P_{10}(k \geq 3) = 99,99\%$ .

## Порядок выполнения работы

### Вариант 1

1. Сколькими способами можно составить расписание одного учебного дня из 5 различных уроков?  
1) 30                      2) 100                      3) 120                      4) 5
2. В 9«Б» классе 32 учащихся. Сколькими способами можно сформировать команду из 4 человек для участия в математической олимпиаде?  
1) 128                      2) 35960                      3) 36                      4) 46788
3. Сколько существует различных двузначных чисел, в записи которых можно использовать цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры в числе должны быть различными?  
1) 10                      2) 60                      3) 20                      4) 30
4. Вычислить:  $6! - 5!$   
1) 600                      2) 300                      3) 1                      4) 1000
5. В ящике находится 45 шариков, из которых 17 белых. Потеряли 2 не белых шарика. Какова вероятность того, что выбранный наугад шарик будет белым?  
1)  $\frac{17}{45}$                       2)  $\frac{17}{43}$                       3)  $\frac{43}{45}$                       4)  $\frac{17}{45}$
6. Бросают три монеты. Какова вероятность того, что выпадут два орла и одна решка?  
1)  $\frac{3}{2}$                       2) 0,5                      3) 0,125                      4)  $\frac{1}{3}$
7. В денежно-вещевой лотерее на 1000000 билетов разыгрывается 1200 вещевых и 800 денежных выигрышей. Какова вероятность выигрыша?  
1) 0,02                      2) 0,00012                      3) 0,0008                      4) 0,002

### Вариант 2

1. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?  
1) 100                      2) 30                      3) 5                      4) 120
2. Имеются помидоры, огурцы, лук. Сколько различных салатов можно приготовить, если в каждый салат должно входить 2 различных вида овощей?

- 1) 3                      2) 6                      3) 2                      4) 1

3. Сколькими способами из 9 учебных предметов можно составить расписание учебного дня из 6 различных уроков.

- 1) 10000                      2) 60480                      3) 56                      4) 39450

4. Вычислите:  $\frac{8!}{6!}$

- 1) 2                      2) 56                      3) 30                      4)  $\frac{4}{3}$

5. В игральной колоде 36 карт. Наугад выбирается одна карта. Какова вероятность, что эта карта – туз?

- 1)  $\frac{1}{36}$                       2)  $\frac{1}{35}$                       3)  $\frac{1}{9}$                       4)  $\frac{36}{4}$

6. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что выпадут две четные цифры?

- 1) 0,25                      2)  $\frac{2}{6}$                       3) 0,5                      4) 0,125

7. В корзине лежат грибы, среди которых 10% белых и 40% рыжих. Какова вероятность того, что выбранный гриб белый или рыжий?

- 1) 0,5                      2) 0,4                      3) 0,04                      4) 0,8

### Вариант 3

1. Сколькими способами можно расставить 4 различные книги на книжной полке?

- 1) 24                      2) 4                      3) 16                      4) 20

2. Сколько диагоналей имеет выпуклый семиугольник?

- 1) 30                      2) 21                      3) 14                      4) 7

3. В футбольной команде 11 человек. Необходимо выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

- 1) 22                      2) 11                      3) 150                      4) 110

4. Сократите дробь:  $\frac{n!}{(n+1)!}$

- 1) 1                      2)  $\frac{n}{n+1}$                       3)  $\frac{1}{n+1}$                       4)  $\frac{2}{n+1}$

5. Какова вероятность, что при одном броске игрального кубика выпадает число очков, равное четному числу?

- 1)  $\frac{1}{6}$                       2) 0,5                      3)  $\frac{1}{3}$                       4) 0,25

6. Катя и Аня пишут диктант. Вероятность того, что Катя допустит ошибку, составляет 60%, а вероятность ошибки у Ани составляет 40%. Найти вероятность того, что обе девочки напишут диктант без ошибок.

- 1) 0,25                      2) 0,4                      3) 0,48                      4) 0,2

7. Завод выпускает 15% продукции высшего сорта, 25% - первого сорта, 40% - второго сорта, а все остальное – брак. Найти вероятность того, что выбранное изделие не будет бракованным.

- 1) 0,8                      2) 0,1                      3) 0,015                      4) 0,35

#### Вариант 4

1. Сколькими способами могут встать в очередь в билетную кассу 5 человек?

- 1) 5                      2) 120                      3) 25                      4) 100

2. Сколькими способами из 25 учеников класса можно выбрать четырех для участия в праздничном концерте?

- 1) 12650                      2) 100                      3) 75                      4) 10000

3. Сколько существует трехзначных чисел, все цифры. Которых нечетные и различные.

- 1) 120                      2) 30                      3) 50                      4) 60

4. Упростите выражение:  $\frac{(n+1)!}{(n-2)!}$

- 1) 0,5                      2)  $\frac{n+1}{n-2}$                       3)  $n^3 - n$                       4)  $n^2 - 1$

5. Какова вероятность, что ребенок родится 7 числа?

- 1)  $\frac{7}{30}$                       2)  $\frac{7}{12}$                       3)  $\frac{7}{31}$                       4)  $\frac{7}{365}$

6. Каждый из трех стрелков стреляет в мишень по одному разу, причем попадания первого стрелка составляет 90%, второго – 80%, третьего – 70%. Найдите вероятность того, что все три стрелка попадут в мишень?

- 1) 0,504                      2) 0,006                      3) 0,5                      4) 0,3

7. Из 30 учеников спорткласса, 11 занимается футболом, 6 – волейболом, 8 – бегом, а остальные прыжками в длину. Какова вероятность того, что один произвольно выбранный ученик класса занимается игровым видом спорта?

- 1)  $\frac{17}{30}$                       2) 0,5                      3)  $\frac{28}{30}$                       4)  $\frac{14}{30}$

### Ответы к тестам

#### Вариант 1

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	3	2	4	1	2	3	4

#### Вариант 2

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	4	1	2	2	3	1	1

### Вариант 3

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	1	2	4	3	2	4	1

### Вариант 4

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	2	1	4	3	2	1	1

## Информационное обеспечение обучения

### Печатные издания

#### Основные учебные издания:

1. Алексеев, Г. В. Высшая математика. Теория и практика : учебное пособие для СПО / Г. В. Алексеев, И. И. Холявин. — Саратов : Профобразование, Ай Пи Эр Медиа, 2019. — 236 с. — ISBN 978-5-4486-0755-4, 978-5-4488-0253-9. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/81274>

2. Гончаренко, В.М. Элементы высшей математики : учебник / Гончаренко В.М., Липагина Л.В., Рылов А.А. — Москва : КноРус, 2021. — 363 с. — ISBN 978-5-406-08264-5. — URL: <https://book.ru/book/939287>

3. Гулиян, Б.Ш. Элементы высшей математики : учебное пособие / Гулиян Б.Ш., Гулиян Г.Б. — Москва : КноРус, 2021. — 436 с. — ISBN 978-5-406-06303-3. — URL: <https://book.ru/book/939826>

4. Фоминых, Е. И. Математика. Практикум : учебное пособие / Е. И. Фоминых. — 2-е изд. — Минск : Республиканский институт профессионального образования (РИПО), 2019. — 440 с. — ISBN 978-985-503-936-6. — Текст : электронный //

Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/94307>

#### **Дополнительные учебные издания:**

5. Алпатов, А. В. Математика : учебное пособие для СПО / А. В. Алпатов. — 2-е изд. — Саратов : Профобразование, Ай Пи Эр Медиа, 2019. — 162 с. — ISBN 978-5-4486-0403-4, 978-5-4488-0215-7. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/80328>

6. Абдуллина, К. Р. Математика : учебник для СПО / К. Р. Абдуллина, Р. Г. Мухаметдинова. — Саратов : Профобразование, 2021. — 288 с. — ISBN 978-5-4488-0941-5. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/99917>

7. Аналитическая геометрия: практикум для СПО / О. Н. Казакова, О. Н. Конюченко, Т. А. Фомина, С. В. Харитоновна. — Саратов : Профобразование, 2020. — 116 с. — ISBN 978-5-4488-0577-6. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/92122>

8. Бахтина, Е.В. Комплект контрольно-измерительных материалов составлен для текущего контроля по дисциплине «Математика : монография / Бахтина Е.В., Корякина М.Л., Киселева И.И., Шулятьева Н.Н. — Москва : Русайнс, 2019. — 77 с. — ISBN 978-5-4365-3744-3. — URL: <https://book.ru/book/934593>

9. Новак, Е. В. Высшая математика. Алгебра : учебное пособие для СПО / Е. В. Новак, Т. В. Рязанова, И. В. Новак ; под редакцией Т. В. Рязановой. — 2-е изд. — Саратов, Екатеринбург : Профобразование, Уральский федеральный университет, 2019. — 115 с. — ISBN 978-5-4488-0484-7, 978-5-7996-2821-5. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/87795>

10. Основы математического анализа. Неопределенный интеграл : учебное пособие для СПО / И. К. Зубова, О. В. Острая, Л. М. Анциферова, Е. Н. Рассоха. — Саратов : Профобразование, 2020. — 119 с. — ISBN 978-5-4488-0547-9. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/92135>

11. Основы математического анализа. Определенный интеграл и несобственные интегралы : учебное пособие для СПО / И. К. Зубова, О. В. Острая, Л. М. Анциферова, Е. Н. Рассоха. — Саратов : Профобразование, 2020. — 129 с. — ISBN 978-5-4488-0548-6. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/92136>

12. Седых, И.Ю. Дискретная математика : учебное пособие / Седых И.Ю., Гребенщиков Ю.Б. — Москва : КноРус, 2020. — 329 с. — ISBN 978-5-406-01303-8. — URL: <https://book.ru/book/936135>

13. Сикорская, Г. А. Алгебра и теория чисел : учебное пособие для СПО / Г. А. Сикорская. — Саратов : Профобразование, 2020. — 303 с. — ISBN 978-5-4488-0612-4. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/91847>