

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Саратовский государственный технический университет имени  
Гагарина Ю.А.»

Филиал федерального государственного бюджетного образовательного  
учреждения высшего образования  
«Саратовский государственный технический университет имени  
Гагарина Ю.А.» в г. Петровске

УТВЕРЖДАЮ  
Директор филиала СГТУ  
имени Гагарина Ю.А. в г. Петровске  
Е.А. Бесшапошникова  
«14» июня 2024 г.



## **МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ**

по дисциплине  
ЕН.01 Математика

специальности  
15.02.09 «Аддитивные технологии»

Методические указания рассмотрены  
на заседании предметной (цикловой) комиссии  
общеобразовательных, ОГСЭ и ЕН дисциплин,  
профессиональных модулей специальностей  
социально-экономического профиля  
«14» июня 2024 года, протокол №12

Председатель ПЦК  /О.В. Медведева/

Петровск 2024

## Пояснительная записка

Методические указания по выполнению практических работ разработаны в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика», требованиями ФГОС СПО специальности 15.02.09 «Аддитивные технологии» и соответствующих общих (ОК) и профессиональных компетенций (ПК):

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 08. Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности.

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

ПК 1.1. Применять средства бесконтактной оцифровки для целей компьютерного проектирования, входного и выходного контроля;

ПК 1.2. Создавать и корректировать средствами компьютерного проектирования цифровые трехмерные модели изделий;

ПК 2.1. Организовывать и вести технологический процесс на установках для аддитивного производства;

ПК 2.2. Контролировать правильность функционирования установки, регулировать её элементы, корректировать программируемые параметры;

ПК 2.3. Проводить доводку и финишную обработку изделий, созданных на установках для аддитивного производства;

ПК 2.4. Подбирать параметры аддитивного технологического процесса и разрабатывать оптимальные режимы производства изделий на основе технического задания (компьютерной/цифровой модели);

ПК 3.1. Диагностировать неисправности установок для аддитивного производства;

ПК 3.2. Организовывать и осуществлять техническое обслуживание и текущий ремонт механических элементов установок для аддитивного производства;

ПК 3.3. Заменять неисправные электронные, электронно-оптические, оптические и прочие функциональные элементы установок для аддитивного производства и проводить их регулировку.

Целью освоения учебной дисциплины «Математика» является формирование представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, об идеях и методах математики.

При выполнении практических работ студент должен **уметь**:

- анализировать сложные функции и строить их графики;
- выполнять действия над комплексными числами;
- вычислять значения геометрических величин;
- производить операции над матрицами и определителями;
- решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики;
- решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчисления;
- решать системы линейных уравнений различными методами.

При выполнении практических работ студент должен **знать:**

- основные математические методы решения прикладных задач;
- основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики;
- основы интегрального и дифференциального исчисления;
- роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

Объём практических занятий по дисциплине определяется учебным планом по данной специальности.

Продолжительность практического занятия - 2 академических часа. Перед проведением практического занятия преподавателем организуется инструктаж, а по ее окончании – обсуждение итогов.

Комплект методических указаний по выполнению практических работ дисциплины «Математика» содержит 9 практических занятий.

## **Перечень практических работ по дисциплине «Математика»**

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1.**

Тема: «Построение графиков реальных функций с помощью геометрических преобразований».

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2.**

Тема: «Нахождение пределов функций с помощью замечательных пределов».

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3.**

Тема: «Нахождение неопределенных интегралов различными методами».

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4.**

Тема: «Действия с матрицами».

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5.**

Тема: «Решение систем линейных уравнений различными методами».

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6.**

Тема: «Выполнение операций над множествами».

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7.**

Тема: «Комплексные числа и действия над ними».

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №8.**

Тема: «Решение практических задач на определение вероятности события».

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №9.**

Тема: «Решение задач с реальными дискретными дисциплинами».

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1.

Тема: «Построение графиков реальных функций с помощью геометрических преобразований».

### ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Исследование функции и построение ее графика».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** инструкционно-технологические карты, таблицы производных элементарных функций, микрокалькуляторы.

### ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Ответить на контрольные вопросы:
  - а) Какую точку называют критической (стационарной) точкой функции?
  - б) Сформулируйте признак возрастания (убывания) функции.
  - в) Сформулируйте признак максимума (минимума) функции.
  - г) Опишите схему исследования функции.
2. С помощью обучающей таблицы повторить план исследования функции и изучить образцы решенных примеров.
3. Выполнить задания для самоконтроля (в таблице).
4. Изучить условие заданий для практической работы.
5. Оформить отчет о работе.

### ОБУЧАЮЩАЯ ТАБЛИЦА

Задание. Исследуйте и постройте графики функции:

а)  $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$ ;                      б)  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ .

№ шага	План исследования Функции	Применение плана	
		а) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$	б) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$
1	Находим область определения функции	$D(f) = R$	$x^2 - 1 = 0, x = \pm 1,$ $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup$ $\cup (1; +\infty)$
2	Исследуем функцию на четность, нечетность	$f(-x) = 3x^4 + 4x^3 + 1 \neq \pm f(x)$ $\Rightarrow$ функция ни четная, ни нечетная	$f(-x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} = f(x) \Rightarrow$ функция четная

3	Находим нули (корни) функции и промежутки её знакопостоянства	$3x^4 - 4x^3 + 1 = 0, (3x^4 - 3x^3) - (x^3 - 1) = 0,$ $(x-1)^2(3x^2 + 2x + 1) = 0,$ $x - 1 = 0, x = 1$ - нуль функции	$\frac{x^2}{x^2 - 1} = 0,$ $x = 0$ - нуль функции 
4	Находим производную функции и её критические точки	$f'(x) = (3x^4 - 4x^3 + 1)' = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1),$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, 1$ - критические точки функции	$f'(x) = \left( \frac{x^2}{x^2 - 1} \right)' =$ $= \frac{2x(x^2 - 1) - 2x^3}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ - критическая точка функции
5	Находим промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции	 $y'(-1) < 0, y'(0,5) < 0, y'(2) > 0$ $x=0$ - не является точкой экстремума, $x=1$ - точка минимума, $y_{min} = y(1) = 0$	 $y'(-2) > 0, y'(-0,5) > 0,$ $y'(0,5) < 0, y'(2) < 0,$ $x=0$ - точка максимума, $y_{max} = y(0) = 0$
6	Находим предел функции при $x \rightarrow \pm\infty$	$\lim_{\Delta x \rightarrow \pm\infty} (3x^4 - 4x^3 + 1) = \infty$	$\lim_{\Delta x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1$
7	Строим эскиз графика функции		

**Примеры.** Исследуйте и постройте графики функций:

- 1)  $y = x^2 - 3x + 2$ ; 2)  $y = 2x^2 - x^4 - 1$ ; 3)  $y = 6x - x^2 - 5$ ; 4)  $y = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^2}$ ; 5)  $y = 3x - x^3$ ; 6)  $y = x^3 - 3x^2 + 4$ ; 7)  $y = x^3 - 3x + 1$ ; 8)  $y = \frac{(x-3)^2}{x^2}$ ; 9)  $y = x^2 + \frac{1}{x}$

## ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ.

### Вариант 1.

1. Исследуйте функцию  $f(x) = \frac{x}{2} - x^4$  на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$  и постройте ее график.

### Вариант 2.

1. Исследуйте функцию  $f(x) = x^3 - 3x$  на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию  $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 1,5x^2$  и постройте ее график.

### Вариант 3.

1. Исследуйте функцию  $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5$  на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию  $f(x) = 2x^3 - 3x^2$  и постройте ее график.

### Вариант 4.

1. Исследуйте функцию  $f(x) = 12x - x^3$  на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5$  и постройте ее график.

### Вариант 5.

1. Исследуйте функцию  $f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 4$  на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию  $f(x) = -x^3 + 3x + 2$  и постройте ее график.

### Вариант 6.

1. Исследуйте функцию  $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 1$  на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию  $f(x) = x^3 - 3x$  и постройте ее график.

### Вариант 7.

1. Исследуйте функцию  $f(x) = x^3 - x^4$  на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию  $f(x) = -x^4 + 5x^2 + 4$  и постройте ее график.

### Вариант 8.

1. Исследуйте функцию  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 5$  на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию  $f(x) = x^3 - x^2$  и постройте ее график.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2.

Тема: «Нахождение пределов функций с помощью замечательных пределов».

### ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «**Нахождение пределов функций с помощью замечательных пределов**».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.

### Справочный материал.

#### Основные теоремы о пределах

$$\lim(x + y) = \lim x + \lim y; (1)$$

$$\lim(x - y) = \lim x - \lim y; (1^*), \text{ то из условий } (1) \text{ и } (1^*) \Rightarrow \lim(x \pm y) = \lim x \pm \lim y;$$

$$\lim(xy) = \lim x \lim y; (2) \quad \lim(x^m) = (\lim x)^m (3) \quad \lim \sqrt[m]{x} = \sqrt[m]{\lim x}, (4)$$

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}, \text{ если } \lim y \neq 0 (5) \quad \lim(\log_a x) = \log_a(\lim x) (6)$$

Запомните, что

$$\lim \frac{\sin x}{x} = 1, \text{ при } x \rightarrow 0 \text{ (Первый замечательный предел)}$$

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ , при  $n \rightarrow \infty$  - число  $e$ ;  $e \approx 2,71828$  — основание натуральных логарифмов; (логарифм числа  $x$  по основанию  $e$  называется натуральным

логарифмом и обозначается  **$\ln x$** ).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \quad (\text{второй замечательный предел})$$

При  $x \rightarrow \infty$ ; или при  $\alpha \rightarrow 0$ .

2. Рассмотрите решение следующих примеров:

**Пример 1.** Найти  $\lim (x^4 - 3x^2 + 16x + 1)$ , при  $x \rightarrow -1$



Решение.  $\lim (x^4 - 3x^2 + 16x + 1) = (\lim x^4 - \lim 3x^2 + 16x + 1) = [(\lim x)^4 - 3(\lim x)^2 + 16\lim x + 1] =$

$$= (-1)^4 - 3(-1)^2 + 16(-1) + 1 = -17 \quad \text{Ответ. } -17.$$

Примечание. Для нахождения предела целого или дробного рационального алгебраического выражения, если предел знаменателя не равен нулю, надо переменную  $x$  заменить ее пределом и произвести указанные в выражении действия. Например,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 5}{x^3 + x + 1} = \frac{2 \cdot 2^2 - 2 - 5}{2^3 + 2 + 1} = \frac{1}{11}$$

**Пример 2.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 2x^2}{5x^3 - 3x^2}$

Решение. Применить теорему о пределе дроби (частного) нельзя, т.к. при  $x \rightarrow 0$

$$\lim (5x^3 - 3x^2) = 0$$

До перехода к пределу следует упростить данную дробь:

$$\frac{2x^3 + 2x^2}{5x^3 - 3x^2} = \frac{2x^2(x+1)}{x^2(5x-3)} = \frac{2(x+1)}{5x-3}$$

Предел знаменателя

$$\lim_{x \rightarrow 0} (5x - 3) = \lim_{x \rightarrow 0} (5x) - 3 = 0 - 3 = -3 \neq 0$$

Применяя теперь теорему о пределе дроби (частного), получим:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 2x^2}{5x^3 - 3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2(x+1)}{x^2(5x-3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(x+1)}{5x-3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 2(x+1)}{\lim_{x \rightarrow 0} 5x-3} = \frac{2 \lim_{x \rightarrow 0} (x+1)}{5 \lim_{x \rightarrow 0} (x-3)} = -\frac{2}{3}$$

Ответ.  $-2/3$

**Пример 3:** Найти  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{3x+1}$

$$\text{Решение. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{3x+1} = \frac{5}{\lim_{x \rightarrow \infty} 3x+1} = \frac{5}{3 \lim_{x \rightarrow \infty} x+1} = \frac{5}{\infty} = 0 \quad \text{Ответ. } 0.$$

**Пример 4.** Найти  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+1}{2x^3+1}$

Решение. Числитель и знаменатель дроби превращаются в бесконечность, а их отношение не имеет смысла. Поэтому преобразуем дробь, разделив числитель и знаменатель дроби на наивысшую степень аргумента, т.е. на  $x^3$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{2x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{2 + \frac{1}{x^3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x^3})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (2 + \frac{1}{x^3})} = \frac{1}{2} \quad \text{Ответ. } 1/2.$$

**Пример 5.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$

Решение. Применить теорему о пределе дроби нельзя, т.к. предел знаменателя равен нулю.

Перепишем данное выражение так:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin 4x}{4x} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x}, \quad \text{Применяя формулу } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \text{получим:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 4 * 1 = 4 \quad \text{Ответ. } 4.$$

**Пример 6.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x^2 - x - 20}$

Решение. применить теорему о пределе частного нельзя, т.к. при  $x=5$  числитель и знаменатель обращаются в нуль. Перепишем данную дробь в виде

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x^2 - x - 20} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{(x+4)(x-5)} - \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{5})(\sqrt{x} + \sqrt{5})}{(x+4)(x-5)(\sqrt{x} + \sqrt{5})} = \frac{x-5}{(x+4)(x-5)(\sqrt{x} + \sqrt{5})},$$

Переходя к пределу, получим:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x^2 - x - 20} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x+4)(\sqrt{x} + \sqrt{5})} = \frac{1}{18\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{90}$$

$$\text{Либо: } \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x^2 - x - 20} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{(x+4)(x-5)} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{(x+4)(\sqrt{x} - \sqrt{5})(\sqrt{x} + \sqrt{5})} = \frac{1}{(x+4)(\sqrt{x} + \sqrt{5})}.$$

$$\text{Ответ. } \frac{\sqrt{5}}{90}$$

3. Вычисление пределов и раскрытие неопределенностей вида  $\left[ \frac{0}{0} \right], \left[ \frac{\infty}{\infty} \right], [1^\infty]$ .

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cos 5x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) 3x 5x \cos(5x)}{3x \sin(5x) 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \cos 5x}{5x} = \frac{3}{5}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-1}{5x^2+2x} \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{x^2}}{5 + \frac{2}{x}} = \frac{3}{5}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+5x}{x+10} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{10}{x^3}} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+6}{x^4+10} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^4}}{1 + \frac{10}{x^4}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x+5} \right)^{2x+1} = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{x+5} \right)^{x+5} \right]^{\frac{2x+1}{x+5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{2x+1}{x+5}} = e^2$$

## Содержание работы

### Самостоятельно решить задачи и вычислить пределы:

1. При параллельном соединении двух проводников, имеющих сопротивления  $r$  и  $r'$ , общее сопротивление  $R$ , соответствующей части электрической цепи, вычисляется по формуле

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'}. \quad \text{Считая } r \text{ известным, найти } \lim_{r' \rightarrow \infty} R; \quad \lim_{r' \rightarrow 0} R.$$

Истолкуйте полученные результаты с точки зрения физики.

2. Формула выпуклой линзы имеет вид:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}, \quad d, f - \text{ Расстояния соответственно предмета}$$

и его изображения. — фокусное расстояние линзы ( $\text{const}$ ); найти  $\lim_{d \rightarrow \infty} f$ ;  $\lim_{d \rightarrow F} f$ . (1)  $d < F$ ; 2)  $d > F$ ); полученные результаты объяснить с точки зрения физики.

### 4. Вычислить следующие пределы:

$$1. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x^2-25} = \left[ \frac{0}{0} \right]$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x-7}{(x^2-49)}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{1}{x+5}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x} = \left[ \frac{0}{0} \right]$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 5x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-1}{5x^2+2x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3+3x^2-8}{5x^3-7x+3}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+5x}{x+10} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+15}{x^4+7}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+6}{x^4+10} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$12. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5-5x^4+9}{4x^5+2x^3-7}$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n+5} \right)^{2n} = (1^\infty)$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{4}{n} \right)^n \right]^2$$

$$15. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x+5} \right)^x$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+9}{x} \right)^x$$

**Оформить отчет и сдать на проверку**

**Домашнее задание. Решить (на выбор) любые 2 задачи с последующим объяснением на занятиях**

1. Масса движущегося тела определяется соотношением  $m(\beta) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$  и  $\beta = \frac{v}{c}$  -

отношение скорости тела к скорости света. Покажите, что в предельном переходе при  $\beta \rightarrow 0$  массу можно считать постоянной и равной  $m_0$ .

2. Интервал времени между двумя событиями зависит от скорости движения системы,

где эти события происходят, следующим образом:

$$\Delta t(v) = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \text{ При } v \rightarrow c \text{ найдите предел функции } \Delta t(v) \text{ и сделайте}$$

вывод, считая, например, что  $\Delta t_0$  - продолжение жизни близнеца, оставшегося на Земле, а  $\Delta t$  - продолжительность жизни его брата, отправившегося в космическое путешествие.

3. Значение кинетической энергии тела выражается формулой

$$E_{kin}(\beta) = \frac{m_0 v^2}{1 + \sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \text{ Найдите предел этой функции,}$$

т.е. получите классическую формулу для кинетической энергии, если  $\beta \rightarrow 0$ .

4. Сила давления летчика, совершающего «мертвую петлю», на сиденье в момент достижения верхней точки «мертвой петли» выражается формулой  $F = m(a - g)$ ,

где  $a = v^2/r$  - центростремительное (нормальное) ускорение,  $r$  - радиус петли. Рассматривая данные выражения как функцию центростремительного ускорения, докажите, что при предельном переходе  $a \rightarrow g$  летчик испытывает состояние невесомости.

5. Сила давления летчика на сиденье в нижней точке «мертвой петли» определяется формулой  $Q = m(g + v^2/r)$ ,  $m$  - масса летчика,  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ .

Рассматривая данное выражение как функцию от  $r$ , найдите ее предел при: а)  $r \rightarrow \infty$ ; б)  $r \rightarrow 0$ . Сделайте соответствующие выводы.

6. В падающем с ускорением  $a$  лифте тело давит на пол кабины с силой  $P = m(a - g)$ ,  $g$  - ускорение свободного падения. Рассматривая данный процесс как функцию от  $a$ , найдите ее предел при а)  $a \rightarrow g$ ; б)  $a \rightarrow 0$ .

**Сделайте выводы.**

### Таблица ответов

№ Зада- ния	1 зада- ча	2 задача	3 задача	4 задание						
				1	2	3	4	5	6	7
Макси- мальн- ое колич- ество баллов	3	3	3	1	1	1	2	2	2	2
Набра- нные баллы										
4 задание										
№ Зада- ния	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Сум- ма балл- ов
Макси- мальн- ое колич- ество баллов	2	2	2	2	2	3	3	4	4	44
Набра- нные баллы										

### Таблица перевода баллов в оценку

Набранное количество баллов	Оценка
0 - 15	2 (неудовлетворительно)
16 - 30	3 (удовлетворительно)

31 - 38	4 (хорошо)
39 - 44	5(отлично)

### ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3.

Тема: «Нахождение неопределенных интегралов различными методами»

#### ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Неопределенный интеграл».
2. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)».
3. Закрепить и систематизировать знания по теме.
4. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно-технологические карты, таблицы первообразных некоторых функций, микрокалькуляторы.

Справочный материал:

#### 1. Свойства неопределенного интеграла:

$$1. \left( \int f(x) dx \right)' = (F(x) + C)' = f(x);$$

$$2. d\left( \int f(x) dx \right) = f(x) dx;$$

$$3. \int dF(x) = F(x) + C;$$

$$4. \int (u + v - w) dx = \int u dx + \int v dx - \int w dx; \text{ где } u, v, w - \text{некоторые функции от } x.$$

$$\int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx;$$

#### 2. Таблица основных интегралов.

Интеграл	Значение	Интеграл	Значение
1 $\int \operatorname{tg} x dx$	$+C \mid \cos x \mid - \ln$	9 $\int e^x dx$	$e^x + C$

$$2 \quad \int \operatorname{ctg} x dx \quad + C \mid \sin x \mid \ln \quad 10 \quad \int \cos x dx \quad \sin x + C$$

$$3 \quad \int a^x dx \quad \frac{a^x}{\ln a} + C \quad 11 \quad \int \sin x dx \quad -\cos x + C$$

$$4 \quad \int \frac{dx}{a^2 + x^2} \quad \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad 12 \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx \quad \operatorname{tg} x + C$$

$$5 \quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} \quad \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C \quad 13 \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx \quad -\operatorname{ctg} x + C$$

$$6 \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \quad \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C \quad 14 \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$7 \quad \int x^\alpha dx \quad \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1 \quad 15 \quad \int \frac{1}{\cos x} dx \quad \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

$$8 \quad \int \frac{dx}{x} \quad \ln |x| + C \quad 16 \quad \int \frac{1}{\sin x} dx \quad \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

### 3. Способ подстановки (замены переменных).

**Теорема:** Если требуется найти интеграл  $\int f(x) dx$  (t) и  $\varphi$ , но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены  $x = \varphi(t)$  получается:  $\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

#### Пример 1.

Найти неопределенный интеграл  $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$ .

Сделаем замену  $t = \sin x$ ,  $dt = \cos x dx$ .

$$\int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C.$$

**Пример 2.**  $\int x(x^2 + 1)^{3/2} dx$ .

**Замена**  $t = x^2 + 1$ ;  $dt = 2x dx$ ;  $dx = \frac{dt}{2x}$ ; **Получаем:**

$$\int t^{3/2} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{3/2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2 + 1)^{5/2}}{5} + C;$$

### Содержание работы:

#### Вариант 1

$$1. y = \int x^3 - x^2 + \frac{1}{x^2} dx$$

$$2. y = \int \sqrt[3]{x} dx$$

$$3. y = \int \left(\frac{2+x}{x}\right)^2 dx$$

$$4. y = \int \frac{x^2 + \sqrt{x^3 + 3}}{\sqrt{x}} dx$$

$$5. y = \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$6. y = \int \frac{e^x dx}{1 + e^x}$$

$$7. y = \int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx$$

$$8. y = \int \ln x dx$$

$$9. y = \int x * \sin 2x dx$$

#### Вариант 2

$$1. y = \int 4x^3 + 3x^2 - 3 + \frac{1}{x^4} dx$$

$$2. y = \int 2\sqrt{x^3} dx$$

$$3. y = \int \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$$

$$4. y = \int \frac{3x^5 + 4x^2 - 2}{x^3} dx$$



$$5. y = \int \frac{(6x - 5)dx}{\sqrt{3x^2 - 5x + 6}}$$

$$6. y = \int e^{x^2} x dx$$

$$7. y = \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$$

$$8. y = \int x * e^x dx$$

$$9. y = \int \arcsin x dx$$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4.

Тема: «Действия с матрицами».

### ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Повторить знания по теме: «Матрицы. Действия над матрицами».
2. Организовать деятельность обучающихся по переводу своих знаний от усвоения отдельных фактов и понятий к их обобщению в целостную систему знаний.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** инструкционно -технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

### Справочный материал:

#### 1. Умножение матрицы на число.

Пример:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 12 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 7 & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & -3 \\ 21 & 0 \end{pmatrix}$$

Для того чтобы умножить матрицу на число, нужно **каждый** элемент матрицы умножить на это число.

#### 2. Сумма (разность) матриц.

Для выполнения сложения (вычитания) матриц, необходимо, чтобы они были одинаковыми по размеру.

Для того чтобы сложить матрицы, необходимо сложить их соответствующие элементы:

$$F + G = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 + (-4) & -1 + (-3) \\ -5 + 15 & 0 + 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12 - 4 & -1 - 3 \\ -5 + 15 & 0 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$$

Для разности матриц правило аналогичное, необходимо найти разность соответствующих элементов.

Пример:

Найти разность матриц  $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ ,  $H = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -15 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix}$

$$A - H = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 3 & -15 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - (-4) & 5 - 3 & -17 - (-15) \\ -1 - (-5) & 0 - (-7) & 10 - 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 + 4 & 5 - 3 & -17 + 15 \\ -1 + 5 & 0 + 7 & 10 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

### 3. Умножение матриц.

Чтобы матрицу  $K$  можно было умножить на матрицу  $L$  нужно, чтобы число столбцов матрицы  $K$  равнялось числу строк матрицы  $L$ .

Пример 1:

Умножить матрицу  $K = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$  на матрицу  $L = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Формула умножения для конкретного случая:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 c_1 + b_1 c_2 \\ a_2 c_1 + b_2 c_2 \end{pmatrix}$$

$$KL = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \\ 5 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Пример 2:

Умножить матрицу  $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$  на матрицу  $N = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

Формула:  $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 c_1 + b_1 c_2 & a_1 d_1 + b_1 d_2 \\ a_2 c_1 + b_2 c_2 & a_2 d_1 + b_2 d_2 \end{pmatrix}$

$$MN = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 9 - 3 \cdot 6 & 2 \cdot (-6) - 3 \cdot (-4) \\ 4 \cdot 9 - 6 \cdot 6 & 4 \cdot (-6) - 6 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В результате получена так называемая нулевая матрица.

Пример 3:

Умножить матрицу  $P = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$  на матрицу  $R = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Формула:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 d_1 + b_1 d_2 + c_1 d_3 \\ a_2 d_1 + b_2 d_2 + c_2 d_3 \\ a_3 d_1 + b_3 d_2 + c_3 d_3 \end{pmatrix}$$

$$PR = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 + 8 \cdot (-3) - 4 \cdot 1 \\ 6 \cdot 2 + 9 \cdot (-3) - 5 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 + 7 \cdot (-3) - 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -20 \\ -16 \end{pmatrix}$$

**Содержание работы:**

### **Вариант № 1**

**1. Найти матрицу; 3А-В если**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: 1)} \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 13 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{2)} \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{3)} \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$$

**2. Вычислить произведение матриц:**

$$\text{1)} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: 1)} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{3)} \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

$$\text{2)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 12 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: 1)} \begin{pmatrix} 43 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{2)} \begin{pmatrix} 56 & 2 \\ 49 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{3)} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 14 & 11 \end{pmatrix}$$

### **Вариант № 2.**

**1. Найти матрицу: А+2В, если**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: 1)} \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 13 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{2)} \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{3)} \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$$

**2. Вычислить произведение матриц:**

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: } 1) \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} 2) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} 3) \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: } 1) \begin{pmatrix} 43 & 10 \\ 49 & 11 \end{pmatrix} 2) \begin{pmatrix} 56 & 2 \\ 14 & 11 \end{pmatrix} 3) \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5.

Тема: «Решение систем линейных уравнений различными методами».

### ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Повторить знания по теме: «Решить систему линейных уравнений методом Гаусса».
2. Организовать деятельность обучающихся по переводу своих знаний от усвоения отдельных фактов и понятий к их обобщению в целостную систему знаний.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** инструкционно - технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

### Справочный материал:

Система линейных уравнений может:

- 1) Иметь единственное решение.
- 2) Иметь бесконечно много решений.
- 3) Не иметь решений (быть несовместной).

Метод Гаусса – наиболее мощный и универсальный инструмент для нахождения решения любой системы линейных уравнений. [Правило Крамера и матричный метод](#) непригодны в тех случаях, когда система имеет бесконечно много решений или несовместна.

Пусть дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + y = -7 \end{cases} \text{ решим ее методом Гаусса.}$$

На первом этапе нужно записать расширенную матрицу системы:

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array} \right). \text{ По какому принципу записаны коэффициенты, думаю, всем видно.}$$

Вертикальная черта внутри матрицы не несёт никакого математического смысла – это просто отчеркивание для удобства оформления.

Справка: рекомендую запомнить термины линейной алгебры. Матрица системы – это матрица, составленная только из коэффициентов при неизвестных, в данном

примере матрица системы:  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Расширенная матрица системы – это та же

матрица системы плюс столбец свободных членов, в данном случае:  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{pmatrix}$ .

Любую из матриц можно для краткости называть просто матрицей.

После того, как расширенная матрица системы записана, с ней необходимо выполнить некоторые действия, которые также называются элементарными преобразованиями.

Существуют следующие элементарные преобразования:

1) Строки матрицы можно переставлять местами. Например, в рассматриваемой матрице можно безболезненно переставить первую и вторую

строки:  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

2) Если в матрице есть (или появились) пропорциональные (как частный случай – одинаковые) строки, то следует удалить из матрицы все эти строки кроме одной.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим, например матрицу  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ . В данной матрице последние три строки пропорциональны, поэтому достаточно оставить только одну из

них:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

3) Если в матрице в ходе преобразований появилась нулевая строка, то ее также следует удалить. Рисовать не буду, понятно, нулевая строка – это строка, в которой одни нули.

4) Строку матрицы можно умножить (разделить) на любое число, отличное от

нуля. Рассмотрим, например, матрицу  $\begin{pmatrix} -3 & 9 & 15 \\ 0,5 & 0 & 2,5 \end{pmatrix}$ . Здесь целесообразно первую

строку разделить на  $-3$ , а вторую строку – умножить на 2:  $\begin{pmatrix} -3 & 9 & 15 \\ 0,5 & 0 & 2,5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ . Данное действие очень полезно, поскольку упрощает дальнейшие преобразования матрицы.

5) Это преобразование вызывает наибольшие затруднения, но на самом деле ничего сложного тоже нет. К строке матрицы можно прибавить другую строку,

умноженную на число, отличное от нуля. Рассмотрим нашу матрицу из

практического примера:  $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right)$ . Сначала я распишу преобразование очень

подробно. Умножаем первую строку на  $-2$ :  $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right)$ , и ко второй строке прибавляем первую строку умноженную на  $-$

2:  $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$ . Теперь первую строку можно разделить

«обратно» на  $-2$ :  $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$ . Как видите, строка, которую ПРИБАВЛЯЛИ – не изменилась. Всегда меняется строка, К КОТОРОЙ ПРИБАВЛЯЮТ.

На практике так подробно, конечно, не расписывают, а пишут короче:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Еще раз: ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на  $-2$ .

Умножают строку обычно устно или на черновике, при этом мысленный ход расчётов примерно такой:

«Переписываю матрицу и переписываю первую строку:  $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ * & * & * \end{array}\right)$ »

«Сначала первый столбец. Внизу мне нужно получить ноль. Поэтому единицу вверху умножаю на  $-2$ :  $1 \cdot (-2) = -2$ , и ко второй строке прибавляю первую:  $2 + (-2)$

$= 0$ . Записываю результат во вторую строку:  $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & * & * \end{array}\right)$ »

«Теперь второй столбец. Вверху  $-1$  умножаю на  $-2$ :  $-1 \cdot (-2) = 2$ . Ко второй строке прибавляю первую:  $1 + 2 = 3$ . Записываю результат во вторую

строку:  $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & * \end{array}\right)$ »

«И третий столбец. Вверху  $-5$  умножаю на  $-2$ :  $-5 \cdot (-2) = 10$ . Ко второй строке прибавляю первую:  $-7 + 10 = 3$ . Записываю результат во вторую

строку:  $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$ »

Пожалуйста, тщательно осмыслите этот пример и разберитесь в последовательном алгоритме вычислений, если вы это поняли, то метод Гаусса практически «в кармане». Но, конечно, над этим преобразованием мы еще поработаем.

Элементарные преобразования не меняют решение системы уравнений

**! ВНИМАНИЕ:** рассмотренные манипуляции нельзя использовать, если Вам предложено задание, где матрицы даны «сами по себе». Например, при

«классических» действиях с матрицами что-то переставлять внутри матриц ни в коем случае нельзя!

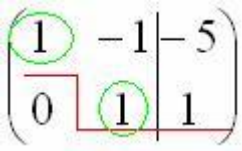
Вернемся к нашей системе  $\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + y = -7 \end{cases}$ . Она практически разобрана по косточкам. Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow{(1)} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{(2)} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

(1) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на  $-2$ . И снова: почему первую строку умножаем именно на  $-2$ ? Для того чтобы внизу получить ноль, а значит, избавиться от одной переменной во второй строке.

(2) Делим вторую строку на 3.

Цель элементарных преобразований – привести матрицу к ступенчатому

виду: . В оформлении задания прямо так и отчеркивают простым карандашом «лестницу», а также обводят кружочками числа, которые располагаются на «ступеньках». Сам термин «ступенчатый вид» не вполне теоретический, в научной и учебной литературе он часто называется трапециевидный вид или треугольный вид.

В результате элементарных преобразований получена эквивалентная исходной система уравнений:

$$\begin{cases} x - y = -5 \\ y = 1 \end{cases}$$

Теперь систему нужно «раскрутить» в обратном направлении – снизу вверх, этот процесс называется обратным ходом метода Гаусса.

В нижнем уравнении у нас уже готовый результат:  $y = 1$ .

Рассмотрим первое уравнение системы  $x - y = -5$  и подставим в него уже известное значение «игрек»:

$$x - 1 = -5$$

$$x = -4$$

Ответ:  $x = -4, y = 1$

Рассмотрим наиболее распространенную ситуацию, когда методом Гаусса требуется решить систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными.

### Пример 1

Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = -1 \\ 2x - y + 3z = 13 \\ x + 2y - z = 9 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

Сейчас я сразу нарисую результат, к которому мы придём в ходе решения:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 2 & -1 & 9 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 4 \end{array}\right)$$

И повторюсь, наша цель – с помощью элементарных преобразований привести матрицу к ступенчатому виду. С чего начать действия?

Сначала смотрим на левое верхнее число:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{3} & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

Почти всегда здесь должна находиться единица. Вообще говоря, устроит и  $-1$  (а иногда и другие числа), но как-то так традиционно сложилось, что туда обычно помещают единицу. Как организовать единицу? Смотрим на первый столбец – готовая единица у нас есть! Преобразование первое: меняем местами первую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Теперь первая строка у нас останется неизменной до конца решения. Уже легче. Единица в левом верхнем углу организована. Теперь нужно получить нули вот на этих местах:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ \textcircled{2} & -1 & 3 & 13 \\ \textcircled{3} & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Нули получаем как раз с помощью «трудного» преобразования. Сначала разбираемся со второй строкой  $(2, -1, 3, 13)$ . Что нужно сделать, чтобы на первой позиции получить ноль? Нужно ко второй строке прибавить первую строку, умноженную на  $-2$ . Мысленно или на черновике умножаем первую строку на  $-2$ :  $(-2, -4, 2, -18)$ . И последовательно проводим (опять же мысленно или на черновике) сложение, ко второй строке прибавляем первую строку, уже



умноженную на  $-2$ :

$$\begin{array}{rrrr} 0 & -5 & 5 & -5 \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ -2 & -4 & 2 & -18 \\ + & + & + & + \\ 2 & -1 & 3 & 13 \end{array}$$

Результат записываем во вторую строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Аналогично разбираемся с третьей строкой  $(3, 2, -5, -1)$ . Чтобы получить на первой позиции ноль, нужно к третьей строке прибавить первую строку, умноженную на  $-3$ . Мысленно или на черновике умножаем первую строку на  $-3$ :  $(-3, -6, 3, -27)$ . И к третьей строке прибавляем первую строку, умноженную на  $-3$ :

$$\begin{array}{rrrr} 0 & -4 & -2 & -28 \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ -3 & -6 & 3 & -27 \\ + & + & + & + \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}$$

Результат записываем в третью строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

На практике эти действия обычно выполняются устно и записываются в один шаг:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

Не нужно считать всё сразу и одновременно. Порядок вычислений и «вписывания» результатов последователен и обычно такой: сначала переписываем первую строку, и пыхтим себе потихонечку –

**ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО и ВНИМАТЕЛЬНО:**

$$\begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ * & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow \\ \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \end{array}$$

А мысленный ход самих расчётов я уже рассмотрел выше.

Далее нужно получить единицу на следующей «ступеньке»:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

В данном примере это сделать легко, вторую строку делим на  $-5$  (поскольку там все числа делятся на 5 без остатка). Заодно делим третью строку на  $-2$ , ведь чем меньше числа, тем проще решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

На заключительном этапе элементарных преобразований нужно получить еще один ноль здесь:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

Для этого к третьей строке прибавляем вторую строку, умноженную на  $-2$ :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Попробуйте разобрать это действие самостоятельно – мысленно умножьте вторую строку на  $-2$  и проведите сложение.

Последнее выполненное действие – причёска результата, делим третью строку на 3.

В результате элементарных преобразований получена эквивалентная исходной система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 9 \\ y - z = 1 \\ z = 4 \end{cases}$$

Круто.

Теперь в действие вступает обратный ход метода Гаусса. Уравнения «раскручиваются» снизу-вверх.

В третьем уравнении у нас уже готовый результат:  $z = 4$

Смотрим на второе уравнение:  $y - z = 1$ . Значение «зет» уже известно, таким образом:

$$y - 4 = 1$$

$$y = 5$$

И, наконец, первое уравнение:  $x + 2y - z = 9$ . «Игрек» и «зет» известны, дело за малым:

$$x + 2 \cdot 5 - 4 = 9$$

$$x + 6 = 9$$

$$x = 3$$

Ответ:  $x = 3, y = 5, z = 4$

Как уже неоднократно отмечалось, для любой системы уравнений можно и нужно сделать проверку найденного решения, благо, это несложно и быстро.

### Пример 2

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - y + 2z = 6 \\ x + y + 5z = -1 \end{cases}$$

Это пример для самостоятельного решения, образец чистового оформления и ответ в конце урока.

Следует отметить, что ваш ход решения может не совпасть с моим ходом решения, и это – особенность метода Гаусса. Но вот ответы обязательно должны получиться одинаковыми!

### Пример 3

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

Смотрим на левую верхнюю «ступеньку». Там у нас должна быть единица. Проблема состоит в том, что в первом столбце единиц нет вообще, поэтому перестановкой строк ничего не решить. В таких случаях единицу нужно организовать с помощью элементарного преобразования. Обычно это можно сделать несколькими способами. Я поступил так:

(1) К первой строке прибавляем вторую строку, умноженную на  $-1$ . То есть, мысленно умножили вторую строку на  $-1$  и выполнили сложение первой и второй строки, при этом вторая строка у нас не изменилась.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(1)} \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

Теперь слева сверху «минус один», что нас вполне устроит. Кто хочет получить +1, может выполнить дополнительное телодвижение: умножить первую строку на -1 (сменить у неё знак).

Дальше алгоритм работает уже по накатанной колее:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на 5. К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на 3.

(3) Первую строку умножили на -1, в принципе, это для красоты. У третьей строки также сменили знак и переставили её на второе место, таким образом, на второй «ступеньке у нас появилась нужная единица.

(4) К третьей строке прибавили вторую строку, умноженную на 2.

(5) Третью строку разделили на 3.

Скверным признаком, который свидетельствует об ошибке в вычислениях (реже – об опечатке), является «плохая» нижняя строка. То есть, если бы у нас внизу

получилось что-нибудь вроде  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 11 & 23 \end{pmatrix}$ , и, соответственно,  $11x_3 = 23 \Rightarrow x_3 = \frac{23}{11}$ , то с большой долей вероятности можно утверждать, что допущена ошибка в ходе элементарных преобразований.

Заряжаем обратный ход, в оформлении примеров часто не переписывают саму систему, а уравнения «берут прямо из приведенной матрицы». Обратный ход, напоминаю, работает, снизу-вверх. Да тут подарок получился:

$$x_3 = 1$$

$$x_2 = 3$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + 3 - 1 = 1 \Rightarrow x_1 = -1$$

Ответ:  $x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = 1$ .

#### Пример 4

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 8x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 18 \\ -7x_1 - 4x_2 - 4x_3 = -11 \\ -6x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -15 \end{cases}$$

Это пример для самостоятельного решения, он несколько сложнее. Ничего страшного, если кто-нибудь запутается. Полное решение и образец оформления в конце урока. Ваше решение может отличаться от моего решения.

В последней части рассмотрим некоторые особенности алгоритма Гаусса.

Первая особенность состоит в том, что иногда в уравнениях системы отсутствуют некоторые переменные, например:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 + 4x_3 + 6 = 0 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Как правильно записать расширенную матрицу системы? В расширенной матрице системы на месте отсутствующих переменных ставим нули:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Кстати, это довольно легкий пример, поскольку в первом столбце уже есть один ноль, и предстоит выполнить меньше элементарных преобразований.

Вторая особенность состоит вот в чём. Во всех рассмотренных примерах на «ступеньки» мы помещали либо  $-1$ , либо  $+1$ . Могут ли там быть другие числа? В

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ 2x + y - 4z = 9 \\ 6x - 5y + 2z = 17 \end{cases}$$

ряде случаев могут. Рассмотрим систему:

Здесь на левой верхней «ступеньке» у нас двойка. Но замечаем тот факт, что все числа в первом столбце делятся на 2 без остатка – и другая двойка и шестерка. И двойка слева вверху нас устроит! На первом шаге нужно выполнить следующие преобразования: ко второй строке прибавить первую строку, умноженную на  $-1$ ; к третьей строке прибавить первую строку, умноженную на  $-3$ . Таким образом, мы получим нужные нули в первом столбце.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 17 \\ 0 & 12 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Или еще такой условный пример: . Здесь тройка на второй «ступеньке» тоже нас устраивает, поскольку 12 (место, где нам нужно получить ноль) делится на 3 без остатка. Необходимо провести следующее преобразование: к третьей строке прибавить вторую строку, умноженную на  $-4$ , в результате чего и будет получен нужный нам ноль.

Метод Гаусса универсален, но есть одно своеобразие. Уверенно научиться решать системы другими методами (методом Крамера, матричным методом) можно буквально с первого раза – там очень жесткий алгоритм. Но вот чтобы уверенно себя чувствовать в методе Гаусса, следует «набить руку», и прорешать хотя бы 5-10 десятков систем. Поэтому поначалу возможны путаница, ошибки в вычислениях, и в этом нет ничего необычного или трагического.

Дождливая осенняя погода за окном.... Поэтому для всех желающих более сложный пример для самостоятельного решения:

Пример 5

Решить методом Гаусса систему 4-х линейных уравнений с четырьмя неизвестными.

$$\begin{cases} 2x + 5y + 4z + t = 20 \\ x + 3y + 2z + t = 11 \\ 2x + 10y + 9z + 7t = 40 \\ 3x + 8y + 9z + 2t = 37 \end{cases}$$

Решения и ответы:

Пример 2: Решение: Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 14 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Выполненные элементарные преобразования:

(1) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на  $-2$ . К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на  $-1$ . Внимание! Здесь может возникнуть соблазн из третьей строки вычесть первую, крайне не рекомендую вычитать – сильно повышается риск ошибки. Только складываем!

(2) У второй строки сменили знак (умножили на  $-1$ ). Вторую и третью строки поменяли местами. Обратите внимание, что на «ступеньках» нас устраивает не только единица, но еще и  $-1$ , что даже удобнее.

(3) К третьей строке прибавили вторую строку, умноженную на  $5$ .

(4) У второй строки сменили знак (умножили на  $-1$ ). Третью строку разделили на  $14$ .

Обратный ход:  $z = -1$

$$y - 2z = 2 \Rightarrow y + 2 = 2 \Rightarrow y = 0$$

$$x + 2y + 3z = 1 \Rightarrow x + 0 - 3 = 1 \Rightarrow x = 4$$

Ответ:  $x = 4, y = 0, z = -1$ .

Пример 4: Решение: Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 8 & 7 & 3 & 18 \\ -7 & -4 & -4 & -11 \\ -6 & 5 & -4 & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 7 \\ -7 & -4 & -4 & -11 \\ -6 & 5 & -4 & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 17 & -11 & 38 \\ 0 & 23 & -10 & 27 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 17 & -11 & 38 \\ 0 & 6 & 1 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & -14 & 71 \\ 0 & 6 & 1 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & -14 & 71 \\ 0 & 0 & -83 & 415 \end{pmatrix} \xrightarrow{(6)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 14 & -71 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Выполненные преобразования:

(1) К первой строке прибавили вторую. Таким образом, организована нужная единица на левой верхней «ступеньке».

(2) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на 7. К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на 6.

Со второй «ступенькой» всё хуже, «кандидаты» на неё – числа 17 и 23, а нам нужна либо единичка, либо  $-1$ . Преобразования (3) и (4) будут направлены на получение нужной единицы

(3) К третьей строке прибавили вторую, умноженную на  $-1$ .

(4) Ко второй строке прибавили третью, умноженную на  $-3$ .

Нужная вещь на второй ступеньке получена.

(5) К третьей строке прибавили вторую, умноженную на 6.

(6) Вторую строку умножили на  $-1$ , третью строку разделили на  $-83$ .

Обратный ход:  $x_3 = -5$

$$x_2 + 14x_3 = -71 \Rightarrow x_2 - 70 = -71 \Rightarrow x_2 = -1$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \Rightarrow x_1 - 3 + 5 = 7 \Rightarrow x_1 = 5$$

Ответ:  $x_1 = 5, x_2 = -1, x_3 = -5$

Пример 5: Решение: Запишем матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 & 20 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 2 & 10 & 9 & 7 & 40 \\ 3 & 8 & 9 & 2 & 37 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 20 \\ 2 & 10 & 9 & 7 & 40 \\ 3 & 8 & 9 & 2 & 37 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 5 & 18 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Выполненные преобразования:

(1) Первую и вторую строки поменяли местами.

(2) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на  $-2$ . К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на  $-2$ . К четвертой строке прибавили первую строку, умноженную на  $-3$ .

(3) К третьей строке прибавили вторую, умноженную на 4. К четвертой строке прибавили вторую, умноженную на  $-1$ .

(4) У второй строки сменили знак. Четвертую строку разделили на 3 и поместили вместо третьей строки.

(5) К четвертой строке прибавили третью строку, умноженную на  $-5$ .

Обратный ход:

$$t = 0$$

$$z = 2$$

$$y + t = 2 \Rightarrow y = 2$$

$$x + 3y + 2z + t = 11 \Rightarrow x + 6 + 4 + 0 = 11 \Rightarrow x = 1$$

Ответ:  $x = 1, y = 2, z = 2, t = 0$

Содержание работы:

Вариант № 1.

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

1.

Ответ: 1.(1,3,2); 2.(1,0,3) 3.(0,0,0).

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$$

2.

Ответ: 1.(1,3,2); 2.(1,0,3) 3.(1,0,0).

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

3.

Ответ: 1.(3,4,8) 2.(1,2,3) 3.(5,8,2).

Вариант № 2.

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 10 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

1.

Ответ: 1.(-1,3,2); 2.(0,0,3) 3.(0,0,0).

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

2.

Ответ: 1.(3,4,8); 2.(1,2,3); 3.(5,8,2).

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

3.

Ответ: 1.(-1,3,2); 2.(0,0,3); 3.(0,0,0).

## **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6.**

Тема: «Выполнение операций над множествами».



## ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Повторить знания по теме: «Выполнение операций над множествами».
2. Организовать деятельность обучающихся по переводу своих знаний от усвоения отдельных фактов и понятий к их обобщению в целостную систему знаний.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** инструкционно -технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

## Содержание работы:

1. Найдите объединение, пересечение, разность множеств  $A$  и  $B$ , если:  
а)  $A = ]-\infty; 7]$ ;  $B = [1; +\infty)$   
б)  $A = [3; 7]$   $B = [0; 9]$ .
2. (Устно) Найдите дополнение в множестве всех треугольников к множеству:  
а) всех равносторонних треугольников;  
б) всех равнобедренных треугольников;  
в) всех прямоугольных треугольников.
3. Пусть  $A = \{2; 3; 4; 5; 7; 10\}$ ,  $B = \{3; 5; 7; 9\}$ ,  $C = \{4; 9; 11\}$ . Найдите множества:  
а)  $A \cup (B \cup C)$ ;                      е)  $A \setminus B$ ;  
б)  $(C \cup B) \cup A$ ;                      ж)  $A \oplus B$ ;  
в)  $A \cap (B \cup C)$ ;                      з)  $B \times C$ .  
г)  $A \cup (B \cap C)$ ;  
д)  $A \cap (B \cap C)$ ;
4. (Устно) Приведите примеры множеств, составленных из объектов следующих видов:  
а) неодушевленных предметов;  
б) животных;  
в) растений;  
г) геометрических фигур;  
д) населенных пунктов;  
е) водоемов;  
ж) политических деятелей.

## Индивидуальное задание.

### 1 вариант

1. Пусть  $A$  – множество корней уравнения  $x^2 = 4$ ,  $B$  – множество корней уравнения  $(x + 1)(x - 2) = 0$ ,  $C$  – множество корней уравнения  $|x| = 1$ .  
Перечислите элементы множеств:  
а)  $A \cup B$ ; б)  $B \cap C$ ; в)  $A \cap C$ ; г)  $C \setminus B$ ; д)  $B \setminus C$ ; е)  $A \cup B \cup C$ .
2. Перечислите элементы каждого из множеств:  
а)  $A = \{x : x \in \mathbb{N}, -2 \leq x \leq 5\}$ ;

$$\text{б) } B = \{x : x \in \mathbf{Z}, |x| < 3\};$$

$$\text{в) } C = \{x : x \in \mathbf{N}, 2x^2 + 5x - 3 = 0\}.$$

3. Даны множества:  $A = \{1, 2, 3\}$  и  $B = \{1, 8, 5\}$ . Найдите  $A \times B$ .

4. Даны два множества:  $A$  – множество стран и  $B$  – множество материков. Задайте соответствие между этими множествами с помощью стрелок.  $A = \{\text{Россия, Ливия, Бразилия, Эфиопия, Канада, США}\}$ ,

$B = \{\text{Африка, Евразия, Северная Америка, Южная Америка}\}$ .

### 2 вариант

1. Пусть  $A$  – множество корней уравнения

$$x^2 = 9, B \text{ – множество корней уравнения}$$

$$(x + 1)(x - 3) = 0, C \text{ – множество корней уравнения } |x| = 1.$$

Перечислите элементы множеств:

$$\text{а) } A \cup B; \text{ б) } B \cap C; \text{ в) } A \cap C; \text{ г) } C \setminus B; \text{ д) } B \setminus C; \text{ е) } A \cup B \cup C.$$

2. Перечислите элементы каждого из множеств:

$$\text{а) } A = \{x : x \in \mathbf{Z}, |x| = 4\};$$

$$\text{б) } B = \{x : x \in \mathbf{N}, -2 < x \leq 5\};$$

$$\text{в) } C = \{x : x \in \mathbf{Q}, x^2 + 3x + 4 = 0\}.$$

3. Даны множества:  $A = \{1, 4, 3\}$  и  $B = \{-1, 6, 0\}$ . Найдите  $A \times B$ .

4. Даны два множества:  $A$  – множество месяцев года и  $B$  – множество времён года. Задайте соответствие между этими множествами с помощью стрелок.

### 3 вариант

1. Пусть  $A$  – множество корней уравнения

$$x^2 = 16, B \text{ – множество корней уравнения}$$

$$(x + 1)(x - 4) = 0, C \text{ – множество корней уравнения } |x| = 1.$$

Перечислите элементы множеств:

$$\text{а) } A \cup B; \text{ б) } B \cap C; \text{ в) } A \cap C; \text{ г) } C \setminus B; \text{ д) } B \setminus C; \text{ е) } A \cup B \cup C.$$

2. Перечислите элементы каждого из множеств:

$$\text{а) } A = \{x : x \in \mathbf{Z}, -2 \leq x \leq 3\};$$

$$\text{б) } B = \{x : x \in \mathbf{N}, (5x + 6)(x - 4) = 0\};$$

$$\text{в) } C = \{x : x \in \mathbf{N}, |x| = 7\}.$$

3. Даны множества:  $A = \{0, -4, 3\}$  и  $B = \{1, 7, 2\}$ . Найдите  $A \times B$ .

4. Даны два множества:  $A$  – множество стран и  $B$  – множество материков. Задайте соответствие между этими множествами с помощью стрелок.  $A = \{\text{Россия, Ливия, Бразилия, Эфиопия, Канада, США}\}$ ,

$B = \{\text{Африка, Евразия, Северная Америка, Южная Америка}\}$ .

### 4 вариант

1. Пусть  $A$  – множество корней уравнения

$x^2 = 25$ ,  $B$  – множество корней уравнения

$(x + 1)(x - 5) = 0$ ,  $C$  – множество корней уравнения  $|x| = 1$ .

Перечислите элементы множеств:

а)  $A \cup B$ ; б)  $B \cap C$ ; в)  $A \cap C$ ; г)  $C \setminus B$ ; д)  $B \setminus C$ ; е)  $A \cup B \cup C$ .

2. Перечислите элементы каждого из множеств:

а)  $A = \{x : x \in \mathbf{N}, x \leq 4\}$ ;

б)  $B = \{x : x \in \mathbf{Z}, (x + 1)(-x - 3) = 0\}$ ;

в)  $C = \{x : x \in \mathbf{N}, |x| = 5\}$ .

3. Даны множества:  $A = \{-2, 2, 0\}$  и  $B = \{1, -6, 4\}$ . Найдите  $A \times B$ .

4. Даны два множества:  $A$  – множество месяцев года и  $B$  – множество времён года. Задайте соответствие между этими множествами с помощью стрелок.

### Контрольные вопросы:

1. Назовите элементы, принадлежащие множеству:

а) студентов вашей группы;

б) предметов, изучаемых в I семестре вашей специальности;

в) всех частей света;

г) субъектов федерации, входящих в Российскую Федерацию.

2. Пусть  $A$  – множество многоугольников. Принадлежат ли этому множеству:

а) восьмиугольник;

б) параллелограмм;

в) отрезок;

г) параллелепипед;

д) круг;

е) полукруг?

3. Запишите перечислением элементов следующие множества:

а)  $A$  – множество нечетных чисел на отрезке  $[1; 15]$ ;

б)  $B$  – множество натуральных чисел, меньших 8;

в)  $C$  – множество натуральных чисел, больших 10, но меньших 12;

г)  $D$  – множество двузначных чисел, делящихся на 10;

д)  $E$  – множество натуральных делителей числа 18;

е)  $F$  – множество чисел, модуль которых равен  $\frac{2}{3}$ .

4. На факультете филологии и журналистики учатся студенты, получающие стипендию, и студенты, не получающие стипендию. Пусть  $A$  – множество всех студентов факультета;  $B$  – множество студентов факультета, получающих стипендию.

Укажите, что собой

представляет **объединение**, **пересечение** и **разность** множеств  $A$  и  $B$ .

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7.

Тема: «Комплексные числа и действия над ним».

### ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Повторить знания по теме: «Действия над комплексными числами в показательной форме».
2. Организовать деятельность обучающихся по переводу своих знаний от усвоения отдельных фактов и понятий к их обобщению в целостную систему знаний.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** инструкционно -технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

### Справочный материал:

1. Показательная и тригонометрические функции в области комплексных чисел связаны между собой формулой

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

которая носит название формулы Эйлера.

Пусть комплексное число  $z$  в тригонометрической форме имеет вид  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . На основании формулы Эйлера выражение в скобках можно заменить на показательное выражение. В результате получим

$$z = r e^{i\varphi}.$$

Эта запись называется показательной формой комплексного числа.

Так же, как и в тригонометрической форме, здесь  $r = |z|$ ,  $\varphi = \arg z$ .

2. Действия над комплексными числами в показательной форме:
  - 2.1. Произведением двух комплексных чисел называется такое комплексное число, модуль которого равен произведению модулей сомножителей, а аргумент – сумме аргументов сомножителей.

Это определение совершенно очевидно, если использовать показательную форму комплексного числа:

$$z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}, \quad z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \cdot \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1 \cdot \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

- 2.2. Модуль частного равен частному модулей делимого и делителя, а аргумент частного равен разности аргументов делимого и делителя.

$$z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}, \quad z_1 \div z_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

**Пример 1:** Пусть  $z = -1 + i$ . Напишите показательную форму числа  $z$ .

**Решение.** Находим модуль и аргумент числа:

$$r = |z| = \sqrt{2}, \quad \varphi = \arg z = \frac{3\pi}{4}.$$

Следовательно, показательная форма комплексного числа такова:

$$z = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}.$$

**Пример 2:** Комплексное число записано в показательной форме

$$z = 2e^{\frac{\pi}{6}i}.$$

Найдите его алгебраическую форму.

**Решение.** По формуле Эйлера

$$z = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} + i.$$

$$z = \sqrt{3} + i$$

Итак, алгебраическая форма числа: .

### Содержание работы:

1. Представьте в алгебраической и тригонометрической формах числа:

- 1)  $3e^{i(2\pi/3)}$ ;
- 2)  $4e^{-i(\pi/4)}$ ;
- 3)  $e^i$ ;
- 4)  $e^{0 \cdot i}$ ;
- 5)  $2e^{i(\pi/2)}$ .

2. Выполните действия. Результат запишите в показательной, тригонометрической и алгебраической формах:

- 1)  $2e^{i(7\pi/18)} \cdot 3e^{i(11\pi/18)}$ ;
- 2)  $e^{i(\pi/6)} \cdot 4e^{i(\pi/12)}$ ;
- 3)  $6e^i : (3e^{-i})$ .

3. Представив числа  $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$  и  $z_2 = \sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2$  в показательной форме, вычислите:

- 1)  $z_1 \cdot z_2$ ;
- 2)  $z_1 / z_2$ ;
- 3)  $z_2 / z_1$ .

4. Выполните действия, используя показательную формулу комплексного числа:

$$\frac{(-1 + i\sqrt{3})^{15}}{(1 - i)^{20}}$$

1. Представьте в алгебраической и тригонометрической формах числа:

- 1)  $5e^{-i(\pi/2)}$ ;

- 2)  $\sqrt{2}e^{i\pi}$ ;
- 3)  $3e^{i2\pi}$ ;
- 4)  $6e^{1,5i}$ ;
- 5)  $14e^{-i(17\pi/90)}$ .

2. Выполните действия. Результат запишите в показательной, тригонометрической и алгебраической формах:

- 1)  $4e^{i(5\pi/9)} : (\sqrt{2}e^{i(\pi/9)})$ ;
- 2)  $(\sqrt{2}e^{i(2\pi/9)})^3$ ;
- 3)  $(2e^{i(7\pi/9)})^{10}$ .

3. Представив числа  $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$  и  $z_2 = \sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2$  в показательной форме, вычислите:

- 1)  $z_1^6$ ;
- 2)  $z_2^4$ ;
- 3)  $z_1^{-3}$ .

4. Выполните действия, используя показательную формулу комплексного числа:

$$\frac{(-1 - i\sqrt{3})^{15}}{(1 + i)^{20}}$$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №8.

Тема: «Решение практических задач на определение вероятности события».

### ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Элементы комбинаторики и теории вероятностей».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.

### Содержание работы:

#### Вариант 1.

1. Сколькими способами можно составить расписание одного учебного дня из 5 различных уроков?  
1) 30      2) 100      3) 120      4) 5
2. В 9«Б» классе 32 учащихся. Сколькими способами можно сформировать команду из 4 человек для участия в математической олимпиаде?  
1) 128      2) 35960      3) 36      4) 46788
3. Сколько существует различных двузначных чисел, в записи которых можно использовать цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры в числе должны быть различными?  
1) 10      2) 60      3) 20      4) 30
4. Вычислить:  $6! - 5!$

- 1) 600      2) 300      3) 1      4) 1000

5. В ящике находится 45 шариков, из которых 17 белых. Потеряли 2 не белых шарика. Какова вероятность того, что выбранный наугад шарик будет белым?

- 1)  $\frac{17}{45}$       2)  $\frac{17}{43}$       3)  $\frac{43}{45}$       4)  $\frac{17}{45}$

6. Бросают три монеты. Какова вероятность того, что выпадут два орла и одна решка?

- 1)  $\frac{3}{2}$       2) 0,5      3) 0,125      4)  $\frac{1}{3}$

7. В денежно-вещевой лотерее на 1000000 билетов разыгрывается 1200 вещевых и 800 денежных выигрышей. Какова вероятность выигрыша?

- 1) 0,02      2) 0,00012      3) 0,0008      4) 0,002

## Вариант 2.

1. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

- 1) 100      2) 30      3) 5      4) 120

2. Имеются помидоры, огурцы, лук. Сколько различных салатов можно приготовить, если в каждый салат должно входить 2 различных вида овощей?

- 1) 3      2) 6      3) 2      4) 1

3. Сколькими способами из 9 учебных предметов можно составить расписание учебного дня из 6 различных уроков.

- 1) 10000      2) 60480      3) 56      4) 39450

4. Вычислите:  $\frac{8!}{6!}$

- 1) 2      2) 56      3) 30      4)  $\frac{4}{3}$

5. В игральной колоде 36 карт. Наугад выбирается одна карта. Какова вероятность, что эта карта – туз?

- 1)  $\frac{1}{36}$       2)  $\frac{1}{35}$       3)  $\frac{1}{9}$       4)  $\frac{36}{4}$

6. Бросают два игральные кубика. Какова вероятность того, что выпадут две четные цифры?

- 1) 0,25      2)  $\frac{2}{6}$       3) 0,5      4) 0,125

7. В корзине лежат грибы, среди которых 10% белых и 40% рыжих. Какова вероятность того, что выбранный гриб белый или рыжий?

- 1) 0,5      2) 0,4      3) 0,04      4) 0,8

## Вариант 3.

1. Сколькими способами можно расставить 4 различные книги на книжной полке?

- 1) 24      2) 4      3) 16      4) 20

2. Сколько диагоналей имеет выпуклый семиугольник?

- 1) 30    2) 21    3) 14    4) 7

3. В футбольной команде 11 человек. Необходимо выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

- 1) 22    2) 11    3) 150    4) 110

4. Сократите дробь:  $\frac{n!}{(n+1)!}$

- 1) 1    2)  $\frac{n}{n+1}$     3)  $\frac{1}{n+1}$     4)  $\frac{2}{n+1}$

5. Какова вероятность, что при одном броске игрального кубика выпадает число очков, равное четному числу?

- 1)  $\frac{1}{6}$     2) 0,5    3)  $\frac{1}{3}$     4) 0,25

6. Катя и Аня пишут диктант. Вероятность того, что Катя допустит ошибку, составляет 60%, а вероятность ошибки у Ани составляет 40%. Найти вероятность того, что обе девочки напишут диктант без ошибок.

- 1) 0,25    2) 0,4    3) 0,48    4) 0,2

7. Завод выпускает 15% продукции высшего сорта, 25% - первого сорта, 40% - второго сорта, а все остальное – брак. Найти вероятность того, что выбранное изделие не будет бракованным.

- 1) 0,8    2) 0,1    3) 0,015    4) 0,35

#### Вариант 4

1. Сколькими способами могут встать в очередь в билетную кассу 5 человек?

- 1) 5    2) 120    3) 25    4) 100

2. Сколькими способами из 25 учеников класса можно выбрать четырех для участия в праздничном концерте?

- 1) 12650    2) 100    3) 75    4) 10000

3. Сколько существует трехзначных чисел, все цифры. Которых нечетные и различные.

- 1) 120    2) 30    3) 50    4) 60

4. Упростите выражение:  $\frac{(n+1)!}{(n-2)!}$

- 1) 0,5    2)  $\frac{n+1}{n-2}$     3)  $n^3-n$     4)  $n^2-1$

5. Какова вероятность, что ребенок родится 7 числа?

- 1)  $\frac{7}{30}$     2)  $\frac{7}{12}$     3)  $\frac{7}{31}$     4)  $\frac{7}{365}$



6. Каждый из трех стрелков стреляет в мишень по одному разу, причем попадания первого стрелка составляет 90%, второго – 80%, третьего – 70%. Найдите вероятность того, что все три стрелка попадут в мишень?

- 1) 0,504      2) 0,006      3) 0,5      4) 0,3

7. Из 30 учеников спорткласса, 11 занимается футболом, 6 – волейболом, 8 – бегом, а остальные прыжками в длину. Какова вероятность того, что один произвольно выбранный ученик класса занимается игровым видом спорта?

- 1)  $\frac{17}{30}$       2) 0,5      3)  $\frac{28}{30}$       4)  $\frac{14}{30}$

### Вариант 5

1. Сколько существует вариантов рассаживания 6 гостей на 6 стульях?

- 1) 36      2) 180      3) 720      4) 300

2. Аня решила сварить компот из фруктов 2-ух видов. Сколько различных вариантов (по сочетанию фруктов) компотов может сварить Аня, если у нее имеется 7 видов фруктов?

- 1) 14      2) 10      3) 21      4) 30

3. Сколько существует обыкновенных дробей, числитель и знаменатель которых – простые различные числа не больше 20?

- 1) 80      2) 56      3) 20      4) 60

4. Упростите выражение:  $\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}$ .

- 1)  $\frac{(n+1)!}{(n+2)!}$       2)  $\frac{n+1}{(n+2)!}$       3)  $\frac{1}{(n+2)!(n+1)!}$       4) 0

5. Какова вероятность того, что выбранное двузначное число делится на 12?

- 1)  $\frac{12}{90}$       2)  $\frac{4}{45}$       3)  $\frac{12}{45}$       4)  $\frac{90}{8}$

6. Николай и Леонид выполняют контрольную работу. Вероятность ошибки при вычислениях у Николая составляет 70%, а у Леонида – 30%. Найдите вероятность того, что Леонид допустит ошибку, а Николай нет.

- 1) 0,21      2) 0,49      3) 0,5      4) 0,09

7. Музыкальная школа проводит набор учащихся. Вероятность быть не зачисленным во время проверки музыкального слуха составляет 40%, а чувство ритма – 10%. Какова вероятность положительного тестирования?

- 1) 0,5      2) 0,4      3) 0,6      4) 0,04

### Вариант 6

1. Сколькими способами можно с помощью букв К, А, В, С обозначить вершины четырехугольника?

- 1) 12      2) 20      3) 24      4) 4

2. На полке стоят 12 книг. Наде надо взять 5 книг. Сколькими способами она может это сделать?

- 1) 792    2) 17    3) 60    4) 300

3. В 12 – ти этажном доме на 1 этаже в лифт садятся 9 человек. Известно, что они выйдут группами в 2, 3 и 4 человека на разных этажах. Сколькими способами они могут это сделать, если на 2 – Ом этаже лифт не останавливается?

- 1) 100    2) 720    3) 300    4) 60

4. Упростите выражение:  $\frac{n!}{(n+1)!} - \frac{(n-1)!}{n!}$ .

- 1)  $\frac{-1}{(n+1)!n!}$     2)  $\frac{n!-(n-1)!}{(n+1)!n!}$     3)  $\frac{-1}{n^2+1}$     4) 0

5. В ящике лежат карточки с буквами, из которых можно составить слово «электрификация». Какова вероятность того, что наугад выбранная буква окажется буквой к?

- 1)  $\frac{1}{7}$     2) 7    3)  $\frac{1}{14}$     4)  $\frac{2}{33}$

6. Каждый из трех стрелков стреляет в мишень по одному разу, причем вероятность попадания 1 стрелка составляет 80%, второго – 70%, третьего – 60%. Найдите вероятность того, что двое из трех стрелков попадет в мишень.

- 1) 0,336    2) 0,452    3) 0,224    4) 0,144

7. В корзине лежат фрукты, среди которых 30% бананов и 60% яблок. Какова вероятность того, что выбранный наугад фрукт будет бананом или яблоком?

- 1) 0,9    2) 0,5    3) 0,34    4) 0,18

## Вариант 7

1. В корзине лежит: яблоко, апельсин, грейпфрут и манго. Сколькими способами 4 девочки могут поделить фрукты? (одной девочке один фрукт)

- 1) 4    2) 24    3) 20    4) 16

2. На плоскости расположены 25 точек так, что три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

- 1) 75    2) 100    3) 2300    4) 3000

3. В теннисном турнире участвуют 10 спортсменов. Сколькими способами теннисисты могут завоевать золото, серебро и бронзу?

- 1) 600    2) 100    3) 300    4) 720

4. Вычислите:  $\frac{P_4}{P_8} \cdot A_8^4$

- 1) 1    2) 13    3) 12    4) 32

5. Случайным образом открывается учебник литературы и находится второе слово на странице. Какова вероятность того, что это слово начинается на букву л?

- 1)  $\frac{1}{33}$     2)  $\frac{1}{31}$     3)  $\frac{10}{33}$     4)  $\frac{10}{31}$

6. Вступительный экзамен в лицей состоит из трех туров. Вероятность отсева в 1 туре составляет 60%, во втором - 40%, в третьем – 30%. Какова вероятность поступления в лицей?

- 1) 0,24      2) 0,12      3) 0,18      4) 0,072

7. В коробке лежат 4 голубых, 3 красных, 9 зеленых, 6 желтых шариков. Какова вероятность того, что выбранный шарик будет не зеленым?

- 1)  $\frac{13}{22}$       2) 0,5      3)  $\frac{10}{22}$       4)  $\frac{15}{22}$

### Вариант 8

1. Разложите на простые множители число 30. Сколькими способами можно записать в виде произведения простых множителей число 30?

- 1) 6      2) 12      3) 30      4) 3

2. Сколько можно составить из простых делителей числа 2730 составных чисел, имеющих только два простых делителя?

- 1) 300      2) 10      3) 150      4) 15

3. На плоскости даны 8 точек, причем три из них не лежат на одной прямой.

Сколько существует векторов с началом и концом в любых двух из данных точек?

- 1) 18      2) 28      3) 64      4) 56

4. Вычислите:  $C_8^6 \cdot P_2$

- 1) 48      2) 94      3) 56      4) 96

5. Катя забыла последнюю цифру семизначного номера телефона знакомой девочки. Какова вероятность того, что Катя набрала телефон знакомой девочки?

- 1) 0,5      2) 0,1      3)  $\frac{1}{7}$       4) 0,

6. Три выключателя соединены параллельно. Вероятность выхода из строя первого выключателя равна 3%, второго – 4%, третьего – 1%. Какова вероятность того, что цепь будет разомкнута?

- 1) 12      2) 0,5      3) 0,12      4)  $12 \cdot 10^{-6}$

7. На экзамене по математике для усиления контроля класс из 35 учащихся рассадили в три аудитории. В первую посадили 10 человек, во вторую – 12, в третью – остальных. Какова вероятность того, что два друга окажутся в одной аудитории?

- 1)  $\frac{189}{595}$       2) 0,5      3)  $\frac{157}{595}$       4)  $\frac{188}{595}$

### Вариант 9

1. Сколькими способами можно закрасить 6 клеток так, чтобы 2 клетки были окрашены красным цветом, а 4 другие – белым, черным, зеленым и синим? (каждый своим цветом).

- 1) 120      2) 360      3) 180      4) 500

2. Сколькими способами можно группу из 17 учащихся разделить на 2 группы так, чтобы в одной группе было 5 человек, а в другой – 12 человек.

- 1) 60      2) 85      3) 6188      4) 6000

3. На плоскости даны 10 точек, причем три из них не лежат на одной прямой.

Сколько существует лучей с началом в любой из данных точек, проходящих через любую другую из данных точек?

- 1) 720    2) 360    3) 500    4) 100

4. Решите уравнение:  $A^2_{x+1} = 20$

- 1) 4; -5    2) 4    3) -5    4) 9

5. В лотерее 1000 билетов, среди которых 20 выигрышных. Приобретается один билет. Какова вероятность того, что этот билет невыигрышный?

- 1)  $\frac{1}{50}$     2) 0,2    3)  $\frac{49}{50}$     4) 0,5

6. Отдел технического контроля типографии «Фаворит» проверил книжную продукцию на наличие брака. Вероятность того, что книга не бракованная равна 0,9. Найти вероятность того, что из двух проверенных книг только одна бракованная.

- 1) 0,18    2) 0,81    3) 0,5    4) 0,01

7. 25 выпускников мединститута направили работать в три села. В

Хацепеевку попало 7 молодых специалистов, в Хачапуровку – 12, В

Красные Огурейцы – остальные. Какова вероятность того, что три друга будут сеять разумное, доброе, вечное в одном селе?

- 1)  $\frac{17}{25}$     2)  $\frac{17}{50}$     3) 0,5    4) 0,35

## Вариант 10

1. Сколькими способами можно закрасить 6 клеток таким образом, чтобы 3 клетки были красными, а 3 оставшиеся были закрашены (каждая своим цветом) былым, черным и зеленым?

- 1) 180    2) 300    3) 120    4) 240

2. Сколькими способами из 10 игроков волейбольной команды можно выбрать стартовую шестерку?

- 1) 210    2) 60    3) 30    4) 240

3. На соревнованиях по легкой атлетике приехала команда из 12 спортсменов.

Сколькими способами тренер может определить, кто из них победит в эстафете 4 по 100 на первом, втором, третьем и четвертом этапах?

- 1) 1200    2) 88000    3) 11880    4) 3000

4. Решите уравнение:  $C_x^{x-1} \cdot (x-1) = 30$

- 1) 6    2) -5; 6    3) -5    4) 30

5. На карточках выписаны числа от 1 до 10 (на одной карточке – одно число).

Карточки положили на стол и перемешали. Какова вероятность того, что на вытащенной карточке окажется число 3?

- 1)  $\frac{3}{10}$     2) 0,1    3)  $\frac{1}{3}$     4) 0,4

6. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие, окажется высшего сорта равна 0,8. Найдите вероятность того, что из трех проверенных изделий только два высшего сорта.

- 1) 0,384    2) 0,5    3) 0,3    4) 0,4

7. На соревнованиях по стрельбе стрелок попадает в десятку с вероятностью 0,04, в девятку 0,1, в восьмерку – 0,2. Какова вероятность того, что одним выстрелом стрелок наберет не менее восьми очков.

- 1) 0,5    2) 0,35    3) 0,04    4) 0,34

## Ответы к тестам

### Вариант 1

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	3	2	4	1	2	3	4

### Вариант 2

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	4	1	2	2	3	1	1

### Вариант 3

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	1	2	4	3	2	4	1

### Вариант 4

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	2	1	4	3	2	1	1

### Вариант 5

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	3	3	2	2	2	4	1

### Вариант 6

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	3	1	2	3	1	2	1

### Вариант 7

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	2	3	4	1	2	3	1

### Вариант 8

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	1	2	4	3	2	4	1

### Вариант 9

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	2	3	1	2	3	1	2

### Вариант 10

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	3	1	3	1	2	1	4

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №9.

Тема: «Решение задач с реальными дискретными случайными величинами».

### ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Элементы комбинаторики и теории вероятностей».
3. Закрепить и систематизировать знания по теме.
4. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.

### Справочный материал:

**Случайная величина** – величина, численное значение которой может меняться в зависимости от результата стохастического эксперимента.

**Дискретной** назовём случайную величину, возможные значения которой образуют конечное множество.

**Законом распределения дискретной случайной величины** называется правило, по которому каждому возможному значению  $x_i$  ставится в соответствие вероятность  $p_i$ , с которой случайная величина может принять это значение,

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

причём

**Пример.** Абитуриент сдаёт два вступительных экзамена: по математике и физике. Составить закон распределения случайной величины  $x$ , числа полученных пятёрок, если вероятность получения пятёрки по математике равна 0,8, а по физике – 0,6.

К важнейшим числовым характеристикам случайной величины относятся математическое ожидание и дисперсия.

**Математическим ожиданием** дискретной случайной величины  $x$  называется произведение всех её возможных значений на их вероятности:

$$M(x) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

### Свойства математического ожидания:

- математическое ожидание постоянной равно самой постоянной:

$$M(C)=C$$

- постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(Cx)=C*M(x)$$

- математическое ожидание суммы случайных величины равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n M(x_i)$$

- математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:

$$M(x_1 * x_2 * \dots * x_n) = M(x_1) * M(x_2) * \dots * M(x_n)$$

**Дисперсией** случайной величины  $x$  называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания:

$$D(x) = M((x - M(x))^2) \text{ или } D(x) = M(x^2) - (M(x))^2$$

**Среднеквадратическое отклонение:**  $\sigma = \sqrt{D(x)}$

**Свойства дисперсии:**

- дисперсия постоянной равно нулю:

$$D(C)=0$$

- постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат:

$$D(Cx)=C^2*D(x)$$

- дисперсия суммы (разности) случайных величины равно сумме дисперсий слагаемых:

$$D\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n D(x_i)$$

**Свойства среднеквадратического отклонения:**

$$\sigma(C) = 0$$

$$\sigma(Cx) = C * \sigma(x)$$

**Пример** Закон распределения случайной величины задан таблично. Найти  $p(x < 2)$ ,  $p(x > 4)$ ,  $p(2 \leq x \leq 4)$ , математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

$x_i$	1	2	3	4	5
$p_i$	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

**Пример** Фермер считает, что, принимая во внимание различные потери и колебания цен, он сможет выручить не более 60 центов за десяток яиц и потерять не более 20-ти центов за десяток и что вероятности возможных выигрышей и потерь таковы:

цена за 10 яиц	0,6	0,4	0,2	0	-0,2
P	0,2	0,5	0,2	0,06	0,04

Как оценить ожидаемую прибыль от продажи десятка яиц; от ожидаемых им в этом году 100000 яиц?

**Задание.** Составить закон распределения случайной величины  $X$ . Найти числовые характеристики случайной величины  $x$  ( $x$  – выигрыш владельца одного лотерейного билета).

- В лотерее разыгрываются  $N$  билетов;
- $m$  из них выигрывают по  $A$  рублей;
- $k$  из них выигрывают по  $B$  рублей;
- $r$  из них выигрывают по  $C$  рублей.

Задание 3. Найти числовые характеристики случайной величины “ $x$ ”. Варианты:  
Контроль знаний обучающихся:

- проверить практическую работу;

## **Информационное обеспечение обучения**

### **Печатные и электронные издания**

#### **Основные учебные издания:**

1. Алексеев, Г. В. Высшая математика. Теория и практика : учебное пособие для СПО / Г. В. Алексеев, И. И. Холявин. — Саратов : Профобразование, Ай Пи Эр Медиа, 2019. — 236 с. — ISBN 978-5-4486-0755-4, 978-5-4488-0253-9. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/81274>

2. Гончаренко, В.М. Элементы высшей математики : учебник / Гончаренко В.М., Липагина Л.В., Рылов А.А. — Москва : КноРус, 2021. — 363 с. — ISBN 978- 5-406-08264-5. — URL: <https://book.ru/book/939287>

3. Гулиян, Б.Ш. Элементы высшей математики : учебное пособие / Гулиян Б.Ш., Гулиян Г.Б. — Москва : КноРус, 2021. — 436 с. — ISBN 978-5-406-06303-3. — URL: <https://book.ru/book/939826>

4. Фоминых, Е. И. Математика. Практикум : учебное пособие / Е. И. Фоминых. — 2-е изд. — Минск : Республиканский институт профессионального образования (РИПО), 2019. — 440 с. — ISBN 978-985-503-936-6. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/94307>

#### **Дополнительные учебные издания:**

5. Алпатов, А. В. Математика : учебное пособие для СПО / А. В. Алпатов. — 2-е изд. — Саратов : Профобразование, Ай Пи Эр Медиа, 2019. — 162 с. — ISBN 978-5-4486-0403-4, 978-5-4488-0215-7. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/80328>

6. Абдуллина, К. Р. Математика : учебник для СПО / К. Р. Абдуллина, Р. Г. Мухаметдинова. — Саратов : Профобразование, 2021. — 288 с. — ISBN 978-5-4488-0941-5. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/99917>

7. Аналитическая геометрия: практикум для СПО / О. Н. Казакова, О. Н. Конюченко, Т. А. Фомина, С. В. Харитоновна. — Саратов : Профобразование, 2020. — 116 с. — ISBN 978-5-4488-0577-6. — Текст : электронный // Электронный



ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/92122>

8. Бахтина, Е.В. Комплект контрольно-измерительных материалов составлен для текущего контроля по дисциплине «Математика : монография / Бахтина Е.В., Корякина М.Л., Киселева И.И., Шулятьева Н.Н. — Москва : Русайнс, 2019. — 77 с. — ISBN 978-5-4365-3744-3. — URL: <https://book.ru/book/934593>

9. Новак, Е. В. Высшая математика. Алгебра : учебное пособие для СПО / Е. В. Новак, Т. В. Рязанова, И. В. Новак ; под редакцией Т. В. Рязановой. — 2-е изд. — Саратов, Екатеринбург : Профобразование, Уральский федеральный университет, 2019. — 115 с. — ISBN 978-5-4488-0484-7, 978-5-7996-2821-5. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/87795>

10. Основы математического анализа. Неопределенный интеграл : учебное пособие для СПО / И. К. Зубова, О. В. Острая, Л. М. Анциферова, Е. Н. Рассоха. — Саратов : Профобразование, 2020. — 119 с. — ISBN 978-5-4488-0547-9. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/92135>

11. Основы математического анализа. Определенный интеграл и несобственные интегралы : учебное пособие для СПО / И. К. Зубова, О. В. Острая, Л. М. Анциферова, Е. Н. Рассоха. — Саратов : Профобразование, 2020. — 129 с. — ISBN 978-5-4488-0548-6. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/92136>

12. Седых, И.Ю. Дискретная математика : учебное пособие / Седых И.Ю., Гребенщиков Ю.Б. — Москва : КноРус, 2020. — 329 с. — ISBN 978-5-406-01303-8. — URL: <https://book.ru/book/936135>

13. Сикорская, Г. А. Алгебра и теория чисел : учебное пособие для СПО / Г. А. Сикорская. — Саратов : Профобразование, 2020. — 303 с. — ISBN 978-5-4488-0612-4. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/91847>

#### **Интернет-ресурсы:**

14. [www.fipi.ru](http://www.fipi.ru)
15. <http://www.exponenta.ru/>
16. <http://www.mathege.ru>
17. <http://uztest.ru>

#### **Электронно-библиотечная система:**

18. ЭБС «IPRbooks», ООО «Ай Пи Ар Медиа»
19. ЭБС «Znanium»
20. ЭБС «PROФобразование»
21. ЭБС «Book.ru»