

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Саратовский государственный технический университет имени
Гагарина Ю.А.»

Филиал федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
«Саратовский государственный технический университет имени
Гагарина Ю.А.» в г. Петровске

УТВЕРЖДАЮ
Директор филиала СГТУ
имени Гагарина Ю.А. в г. Петровске
Е.А. Бесшапошникова
«14» июня 2024 г.



**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО ОЦЕНКЕ КАЧЕСТВА
ОСВОЕНИЯ СТУДЕНТАМИ
ПРОГРАММ ПОДГОТОВКИ СПЕЦИАЛИСТОВ СРЕДНЕГО ЗВЕНА**

по дисциплине
ЕН.01 Математика

специальности
15.02.09 «Аддитивные технологии»

Фонд оценочных средств рассмотрен
на заседании предметной (цикловой) комиссии
общеобразовательных, ОГСЭ и ЕН дисциплин,
профессиональных модулей специальностей
социально-экономического профиля
«14» июня 2024 года, протокол №12

Председатель ПЦК Медведева /О.В. Медведева/

Петровск 2024

Пояснительная записка

Фонд оценочных средств разработан на основе рабочей программы **ЕН.01 Математика** в соответствии с требованиями ФГОС СПО по специальности 15.02.09 «Аддитивные технологии», утверждённого приказом Министерства образования и науки РФ от 22.12.2015г., №1506 (ред. от 01.09.2022).

1. Паспорт фонда оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости

1.1. Цели и задачи контроля

Целью текущего контроля успеваемости обучающихся является обеспечение систематического контроля и оценки уровня освоения предметных результатов, уровня сформированности общих компетенций ЕН.01 Математика.

Главной задачей текущего контроля успеваемости является повышение мотивации обучающихся к регулярной учебной и самостоятельной работе, закрепление, углубление знаний, закрепление и совершенствование умений, обеспечение соответствия результатов обучения задачам будущей профессиональной деятельности посредством внедрения эффективной системы оценки в образовательный процесс.

Предметные результаты:

- формирование представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, об идеях и методах математики;
- развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, для продолжения образования и самообразования;
- овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для изучения смежных естественнонаучных дисциплин на базовом уровне и дисциплин профессионального цикла, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки;
- воспитание средствами математики культуры личности, понимания значимости математики для научно-технического прогресса, отношения к математике как к части общечеловеческой культуры через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей.

Общие компетенции, включающие в себя способность:

Изучение дисциплины направлено на формирование общих и профессиональных компетенций:

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 08. Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности.

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

Профессиональные компетенции, включающие в себя способность:

ПК 1.1. Применять средства бесконтактной оцифровки для целей компьютерного проектирования, входного и выходного контроля;

ПК 1.2. Создавать и корректировать средствами компьютерного проектирования цифровые трехмерные модели изделий;

ПК 2.1. Организовывать и вести технологический процесс на установках для аддитивного производства;

ПК 2.2. Контролировать правильность функционирования установки, регулировать её элементы, корректировать программируемые параметры;

ПК 2.3. Проводить доводку и финишную обработку изделий, созданных на установках для аддитивного производства;

ПК 2.4. Подбирать параметры аддитивного технологического процесса и разрабатывать оптимальные режимы производства изделий на основе технического задания (компьютерной/цифровой модели);

ПК 3.1. Диагностировать неисправности установок для аддитивного производства;

ПК 3.2. Организовывать и осуществлять техническое обслуживание и текущий ремонт механических элементов установок для аддитивного производства;

ПК 3.3. Заменять неисправные электронные, электронно-оптические, оптические и прочие функциональные элементы установок для аддитивного производства и проводить их регулировку.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен **знать**:

- основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры и геометрии;
- основы аналитической геометрии в пространстве;
- основы дифференциального и интегрального исчисления;
- основы теории вероятностей и математической статистики;
- возможности математических методов в построении моделей реальных процессов и ситуаций, в описании свойств предметов и их взаимного расположения;
- универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость в различных областях человеческой деятельности.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен **уметь**:

- производить практические расчеты по формулам, включая формулы, содержащие степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции, используя при необходимости справочные материалы и простейшие вычислительные устройства;
- описывать с помощью функций различные зависимости, представлять их графически;
- анализировать сложные функции, строить и интерпретировать их графики;
- строить и исследовать простейшие математические модели;
- исследовать (моделировать) несложные практические ситуации на основе изученных формул и свойств фигур;
- проводить вычисление объемов и площадей поверхностей пространственных тел при решении практических задач, используя при необходимости справочники и вычислительные устройства.

1.2. Структура фонда оценочных средств

Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля включает в себя комплекты контрольно-оценочных средств, предназначенные для проведения текущего контроля в виде:

- оперативного контроля;
- рубежного контроля.

Оперативный контроль проводится в форме:

- опрос (устный);
- выполнение письменной работы (решение задач);

- выполнение практической работы.

Рубежный контроль проводится в форме:

- выполнение практической работы.

1.3. Система оценивания результатов выполнения заданий

Оценивание результатов выполнения заданий текущего контроля осуществляется на основе следующих принципов:

достоверности оценки – оценивается уровень сформированности знаний, умений, практического опыта, общих и профессиональных компетенций, продемонстрированных обучающимися в ходе выполнения задания;

адекватности оценки – оценка выполнения заданий должна проводиться в отношении тех компетенций, которые необходимы для эффективного выполнения задания;

надежности оценки – система оценивания выполнения заданий должна обладать высокой степенью устойчивости при неоднократных оценках уровня сформированности знаний, умений, практического опыта, общих и профессиональных компетенций обучающихся;

комплексности оценки – система оценивания выполнения заданий должна позволять интегративно оценивать общие и профессиональные компетенции обучающихся;

объективности оценки – оценка выполнения конкурсных заданий должна быть независимой от особенностей профессиональной ориентации или предпочтений преподавателей, осуществляющих контроль или аттестацию.

При выполнении процедур оценки заданий используются следующие основные методы:

- метод экспертной оценки;
- метод расчета первичных баллов;
- метод расчета сводных баллов;
- метод агрегирования результатов участников Олимпиады (если задание состоит из нескольких задач, то необходимо сделать общий вывод об уровне освоения).

Результаты выполнения заданий оцениваются в соответствии с разработанными критериями оценки.

Используются следующие шкалы для оценивания результатов обучения:

- пяти бальная шкала оценки;
- сто бальная шкала оценки.

Перевод сто бальной шкалы учета результатов в пяти бальную оценочную шкалу:

Оценка	Количество баллов, набранных за выполнение теоретического и практического задания
Оценка 5 «отлично»	90-100
Оценка 4 «хорошо»	76-89
Оценка 3 «удовлетворительно»	50-75
Оценка 2 «неудовлетворительно»	≤ 49

Перевод пяти бальной шкалы учета результатов в пяти бальную оценочную шкалу:

Оценка	Количество баллов, набранных за выполнение теоретического и практического задания, средний балл по итогам аттестации
Оценка 5 «отлично»	4,6-5
Оценка 4 «хорошо»	3,6-4,5
Оценка 3 «удовлетворительно»	3-3,5
Оценка 2 «неудовлетворительно»	≤ 2,9

1.4. Материально-техническое обеспечение для проведения контроля

Контроль проводится в учебном кабинете «Математика».

Описание материально-технического обеспечения проведения практических работ дается в паспорте контроля.

1.5. Учебно-методическое и информационное обеспечение для проведения контроля

Печатные и электронные издания

Основные учебные издания:

1. Алексеев, Г. В. Высшая математика. Теория и практика : учебное пособие для СПО / Г. В. Алексеев, И. И. Холявин. — Саратов : Профобразование, Ай Пи Эр Медиа, 2019. — 236 с. — ISBN 978-5-4486-0755-4, 978-5-4488-0253-9. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/81274>
2. Гончаренко, В.М. Элементы высшей математики : учебник / Гончаренко В.М., Липагина Л.В., Рылов А.А. — Москва : КноРус, 2021. — 363 с. — ISBN 978- 5-406-08264-5. — URL: <https://book.ru/book/939287>
3. Гулиян, Б.Ш. Элементы высшей математики : учебное пособие / Гулиян Б.Ш., Гулиян Г.Б. — Москва : КноРус, 2021. — 436 с. — ISBN 978-5-406-06303-3. — URL: <https://book.ru/book/939826>
4. Фоминых, Е. И. Математика. Практикум : учебное пособие / Е. И. Фоминых. — 2-е изд. — Минск : Республиканский институт профессионального образования (РИПО), 2019. — 440 с. — ISBN 978-985-503-936-6. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/94307>

Дополнительные учебные издания:

5. Алпатов, А. В. Математика : учебное пособие для СПО / А. В. Алпатов. — 2-е изд. — Саратов : Профобразование, Ай Пи Эр Медиа, 2019. — 162 с. — ISBN 978-5-4486-0403-4, 978-5-4488-0215-7. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/80328>
6. Абдуллина, К. Р. Математика : учебник для СПО / К. Р. Абдуллина, Р. Г. Мухаметдинова. — Саратов : Профобразование, 2021. — 288 с. — ISBN 978-5- 4488-0941-5. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/99917>
7. Аналитическая геометрия: практикум для СПО / О. Н. Казакова, О. Н. Конюченко, Т. А. Фомина, С. В. Харитоновна. — Саратов : Профобразование, 2020. — 116 с. — ISBN 978-5-4488-0577-6. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/92122>
8. Бахтина, Е.В. Комплект контрольно-измерительных материалов составлен для текущего контроля по дисциплине «Математика : монография / Бахтина Е.В., Корякина М.Л., Киселева И.И., Шулятьева Н.Н. — Москва : Русайнс, 2019. — 77 с. — ISBN 978-5-4365-3744-3. — URL: <https://book.ru/book/934593>
9. Новак, Е. В. Высшая математика. Алгебра : учебное пособие для СПО / Е. В. Новак, Т. В. Рязанова, И. В. Новак ; под редакцией Т. В. Рязановой. — 2-е изд. — Саратов, Екатеринбург : Профобразование, Уральский федеральный университет, 2019. — 115 с. — ISBN 978-5-4488-0484-7, 978-5-7996-2821-5. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/87795>
10. Основы математического анализа. Неопределенный интеграл : учебное пособие для СПО / И. К. Зубова, О. В. Острая, Л. М. Анциферова, Е. Н. Рассоха. — Саратов : Профобразование, 2020. — 119 с. — ISBN 978-5-4488-0547-9. — Текст : электронный //

Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/92135>

11. Основы математического анализа. Определенный интеграл и несобственные интегралы : учебное пособие для СПО / И. К. Зубова, О. В. Острая, Л. М. Анциферова, Е. Н. Рассоха. — Саратов : Профобразование, 2020. — 129 с. — ISBN 978-5-4488-0548-6. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/92136>

12. Седых, И.Ю. Дискретная математика : учебное пособие / Седых И.Ю., Гребенщиков Ю.Б. — Москва : КноРус, 2020. — 329 с. — ISBN 978-5-406-01303-8. — URL: <https://book.ru/book/936135>

13. Сикорская, Г. А. Алгебра и теория чисел : учебное пособие для СПО / Г. А. Сикорская. — Саратов : Профобразование, 2020. — 303 с. — ISBN 978-5-4488-0612-4. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/91847>

Интернет-ресурсы:

14. www.fipi.ru

15. <http://www.exponenta.ru/>

16. <http://www.mathege.ru>

17. <http://uztest.ru>

Электронно-библиотечная система:

18. ЭБС «IPRbooks», ООО «Ай Пи Ар Медиа»

19. ЭБС «Znanium»

20. ЭБС «PROФобразование»

21. ЭБС «Book.ru»

2. Контрольно-оценочные средства

2.1. Задания для оперативного контроля

Теоретическое занятие

Тема: Введение.

Форма контроля: опрос устный (фронтальный).

Задание: ответить на вопросы.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";
- 2) обучающиеся устно отвечают на вопросы;
- 3) время, отводимое на опрос - 10 мин;
- 4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Вопросы:

1. Что изучает математика?
2. Где можно применить математические знания?
3. Какие знания по математике можно применить в практической деятельности?
4. Каково значение математики в профессиональной деятельности?

Теоретическое занятие

Тема: Функция одной независимой переменной и её характеристики

Форма контроля: опрос устный (фронтальный).

Задание: ответить на вопросы.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";
- 2) обучающиеся устно отвечают на вопросы;
- 3) время, отводимое на опрос - 10 мин;
- 4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Вопросы:

1. Функция одной независимой переменной и способы ее задания.
2. Характеристики функции. Основные элементарные функции, их свойства и графики.
3. Сложные и обратные функции.
4. Построение графиков реальных функций с помощью геометрических преобразований».

Практическое занятие 1

Тема: «Построение графиков реальных функций с помощью геометрических преобразований»

Форма контроля: выполнение практической работы.

Задание: решить задачи.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";
- 2) работа выполняется в рабочих тетрадях;
- 3) время, отводимое на выполнение задания - 2 часа;
- 4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Задания:

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1.

Тема: «Построение графиков реальных функций с помощью геометрических преобразований».

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Исследование функции и построение ее графика».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.

3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно-технологические карты, таблицы производных элементарных функций, микрокалькуляторы.

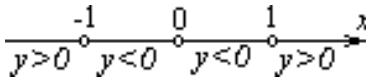
ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

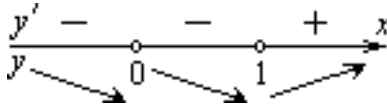
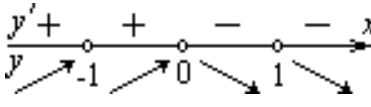
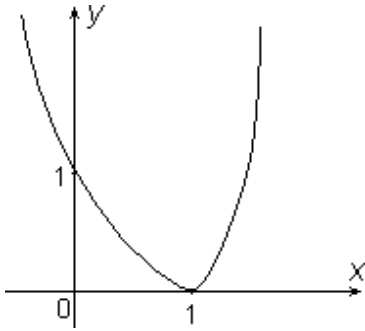
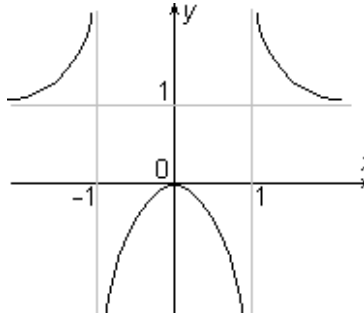
1. Ответить на контрольные вопросы:
 - а) Какую точку называют критической (стационарной) точкой функции?
 - б) Сформулируйте признак возрастания (убывания) функции.
 - в) Сформулируйте признак максимума (минимума) функции.
 - г) Опишите схему исследования функции.
2. С помощью обучающей таблицы повторить план исследования функции и изучить образцы решенных примеров.
3. Выполнить задания для самоконтроля (в таблице).
4. Изучить условие заданий для практической работы.
5. Оформить отчет о работе.

ОБУЧАЮЩАЯ ТАБЛИЦА

Задание. Исследуйте и постройте графики функции:

а) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$; б) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$.

№ шага	План исследования Функции	Применение плана	
		а) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$	б) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$
1	Находим область определения функции	$D(f) = R$	$x^2 - 1 = 0, x = \pm 1,$ $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup$ $\cup (1; +\infty)$
2	Исследуем функцию на четность, нечетность	$f(-x) = 3x^4 + 4x^3 + 1 \neq \pm f(x)$ \Rightarrow функция ни четная, ни нечетная ()	$f(-x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} = f(x) \Rightarrow$ функция четная
3	Находим нули (корни) функции и промежутки её знакопостоянства	$3x^4 - 4x^3 + 1 = 0, 3x^4 - 3x^3 - (x^3 - 1) = 0,$ $(x - 1)^2 (3x^2 + 2x + 1) = 0,$ $x - 1 = 0, x = 1$ - нуль функции	$\frac{x^2}{x^2 - 1} = 0,$ $x = 0$ - нуль функции 
4	Находим производную функции и её критические точки	$f'(x) = (3x^4 - 4x^3 + 1)' = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x - 1),$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, 1$ - критические точки функции	$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x^2 - 1} \right)' =$ $= \frac{2x(x^2 - 1) - 2x^3}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ - критическая точка функции

5	Находим промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции	 <p> $y'(-1) < 0, y'(0,5) < 0, y'(2) > 0$ $x=0$ – не является точкой экстремума, $x=1$ – точка минимума, $y_{\min} = y(1) = 0$ </p>	 <p> $y'(-2) > 0, y'(-0,5) > 0,$ $y'(0,5) < 0, y'(2) < 0,$ $x=0$ – точка максимума, $y_{\max} = y(0) = 0$ </p>
6	Находим предел функции при $x \rightarrow \pm\infty$	$\lim_{\Delta x \rightarrow \pm\infty} (3x^4 - 4x^3 + 1) = \infty$	$\lim_{\Delta x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1$
7	Строим эскиз графика функции		

Примеры. Исследуйте и постройте графики функций:

- 1) $y = x^2 - 3x + 2$; 2) $y = 2x^2 - x^4 - 1$; 3) $y = 6x - x^2 - 5$; 4) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^2}$; 5) $y = 3x - x^3$;
6) $y = x^3 - 3x^2 + 4$; 7) $y = x^3 - 3x + 1$; 8) $y = \frac{(x-3)^2}{x^2}$; 9) $y = x^2 + \frac{1}{x}$.

ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ.

Вариант 1.

- Исследуйте функцию $f(x) = \frac{x}{2} - x^4$ на максимум и минимум.
- Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$ и постройте ее график.

Вариант 2.

- Исследуйте функцию $f(x) = x^3 - 3x$ на максимум и минимум.
- Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 1,5x^2$ и постройте ее график.

Вариант 3.

- Исследуйте функцию $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5$ на максимум и минимум.
- Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ и постройте ее график.

Вариант 4.

- Исследуйте функцию $f(x) = 12x - x^3$ на максимум и минимум.

2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5$ и постройте ее график.

Вариант 5.

1. Исследуйте функцию $f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 4$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = -x^3 + 3x + 2$ и постройте ее график.

Вариант 6.

1. Исследуйте функцию $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 1$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = x^3 - 3x$ и постройте ее график.

Вариант 7.

1. Исследуйте функцию $f(x) = x^3 - x^4$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = -x^4 + 5x^2 + 4$ и постройте ее график.

Вариант 8.

1. Исследуйте функцию $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 5$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = x^3 - x^2$ и постройте ее график.

Теоретическое занятие

Тема: Предел функции. Непрерывность функции

Форма контроля: опрос устный (фронтальный).

Задание: ответить на вопросы.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";
- 2) обучающиеся устно отвечают на вопросы;
- 3) время, отводимое на опрос - 10 мин;
- 4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Вопросы:

1. Содержание учебного материала
2. Определение предела функции.
3. Основные теоремы о пределах.
4. Замечательные пределы.
5. Непрерывность функции.
6. Исследование функции на непрерывность.

Практическое занятие 2

Тема: Нахождение пределов функций с помощью замечательных пределов

Форма контроля: выполнение практической работы.

Задание: решить задачи.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";
- 2) работа выполняется в рабочих тетрадях;
- 3) время, отводимое на выполнение задания - 2 часа;
- 4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2.

Тема: «Нахождение пределов функций с помощью замечательных пределов».

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Нахождение пределов функций с помощью замечательных пределов».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.

Справочный материал.

Основные теоремы о пределах

$$\lim(x + y) = \lim x + \lim y; (1)$$

$$\lim(x - y) = \lim x - \lim y; (1^*), \text{ то из условий } (1) \text{ и } (1^*) \Rightarrow \lim(x \pm y) = \lim x \pm \lim y;$$

$$\lim(xy) = \lim x \lim y; (2) \quad \lim(x^m) = (\lim x)^m (3) \quad \lim \sqrt[m]{x} = \sqrt[m]{\lim x}, (4)$$

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}, \text{ если } \lim y \neq 0 (5) \quad \lim(\log_a x) = \log_a(\lim x) (6)$$

Запомните, что

$$\lim \frac{\sin x}{x} = 1, \text{ при } x \rightarrow 0 \text{ (Первый замечательный предел)}$$

$\lim (1 + \frac{1}{n})^n = e$, при $n \rightarrow \infty$ - число e ; $e \approx 2,71828$ — основание натуральных логарифмов; (логарифм числа x по основанию e называется натуральным логарифмом и обозначается $\ln x$).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \quad (\text{второй замечательный предел})$$

При $x \rightarrow \infty$; или при $\alpha \rightarrow 0$.

2. Рассмотрите решение следующих примеров:

Пример 1. Найти $\lim (x^4 - 3x^2 + 16x + 1)$, при $x \rightarrow -1$

Решение. $\lim (x^4 - 3x^2 + 16x + 1) = (\lim x^4 - \lim 3x^2 + 16\lim x + 1) = [(\lim x)^4 - 3(\lim x)^2 + 16\lim x + 1] =$
 $= (-1)^4 - 3(-1)^2 + 16(-1) + 1 = -17 \quad \text{Ответ. - 17.}$

Примечание. Для нахождения предела целого или дробного рационального алгебраического выражения, если предел знаменателя не равен нулю, надо переменную x заменить ее пределом и произвести указанные в выражении действия. Например,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 5}{x^3 + x + 1} = \frac{2 \cdot 2^2 - 2 - 5}{2^3 + 2 + 1} = \frac{1}{11}$$

Пример 2. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 2x^2}{5x^3 - 3x^2}$

Решение. Применить теорему о пределе дроби (частного) нельзя, т.к. при $x \rightarrow 0$

$$\lim (5x^3 - 3x^2) = 0$$

До перехода к пределу следует упростить данную дробь:

$$\frac{2x^3 + 2x^2}{5x^3 - 3x^2} = \frac{2x^2(x+1)}{x^2(5x-3)} = \frac{2(x+1)}{5x-3}$$

Предел знаменателя

$$\lim_{x \rightarrow 0} (5x - 3) = \lim_{x \rightarrow 0} (5x) - 3 = 0 - 3 = -3 \quad -3 \neq 0$$

Применяя теперь теорему о пределе дроби (частного), получим:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 2x^2}{5x^3 - 3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2(x+1)}{x^2(5x-3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(x+1)}{5x-3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 2(x+1)}{\lim_{x \rightarrow 0} 5x-3} = \frac{2 \lim_{x \rightarrow 0} (x+1)}{5 \lim_{x \rightarrow 0} (x-3)} = -\frac{2}{3}$$

Ответ. $-2/3$

Пример 3. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{3x+1}$

Решение. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{3x+1} = \frac{5}{\lim_{x \rightarrow \infty} 3x+1} = \frac{5}{3 \lim_{x \rightarrow \infty} x+1} = \frac{5}{\infty} = 0$ Ответ. 0.

Пример 4. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+1}{2x^3+1}$

Решение. Числитель и знаменатель дроби превращаются в бесконечность, а их отношение не имеет смысла. Поэтому преобразуем дробь, разделив числитель и знаменатель дроби на наивысшую степень аргумента, т.е. на x^3 .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+1}{2x^3+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{1}{x^3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{x^3})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (2+\frac{1}{x^3})} = \frac{1}{2} \quad \text{Ответ. } 1/2.$$

Пример 5. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$

Решение. Применить теорему о пределе дроби нельзя, т.к. предел знаменателя равен нулю.

Перепишем данное выражение так:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin 4x}{4x} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x}, \quad \text{Применяя формулу } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \text{ получим:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 4 * 1 = 4 \quad \text{Ответ. } 4.$$

Пример 6. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x^2 - x - 20}$

Решение. применить теорему о пределе частного нельзя, т.. при $x=5$ числитель и знаменатель обращаются в нуль. Перепишем данную дробь в виде

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x^2-x-20} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{(x+4)(x-5)} - \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{(x+4)(x-5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})} = \frac{x-5}{(x+4)(x-5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})},$$

Переходя к пределу, получим:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x^2-x-20} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x+4)(\sqrt{x}+\sqrt{5})} = \frac{1}{18\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{90}$$

$$\text{Либо: } \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x^2-x-20} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{(x+4)(x-5)} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{(x+4)(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})} = \frac{1}{(x+4)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}.$$

$$\text{Ответ. } \frac{\sqrt{5}}{90}$$

3. Вычисление пределов и раскрытие неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0} \right], \left[\frac{\infty}{\infty} \right], [1^\infty]$.

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cos 5x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) 3x 5x \cos(5x)}{3x \sin(5x) 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \cos 5x}{5x} = \frac{3}{5}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-1}{5x^2+2x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{x^2}}{5 + \frac{2}{x}} = \frac{3}{5}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+5x}{x+10} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^2} + \frac{5x}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{10}{x^3}} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+6}{x^4+10} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^4}}{1 + \frac{10}{x^4}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+5} \right)^{2x+1} = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x+5} \right)^{x+5} \right]^{\frac{2x+1}{x+5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{2x+1}{x+5}} = e^2$$

Содержание работы

Самостоятельно решить задачи и вычислить пределы:

- При параллельном соединении двух проводников, имеющих сопротивления r и r' , общее сопротивление R , соответствующей части электрической цепи, вычисляется по формуле

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'}. \quad \text{Считая } r \text{ известным, найти } \lim_{r' \rightarrow \infty} R; \quad \lim_{r' \rightarrow 0} R.$$

Истолкуйте полученные результаты с точки зрения физики.

2. Формула выпуклой линзы имеет вид:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}, \quad d, f - \text{Расстояния} \quad \text{соответственно} \quad \text{предмета}$$

и его изображения. – фокусное расстояние линзы (const); найти $\lim_{d \rightarrow \infty} f$; $\lim_{d \rightarrow F} f$. (1) $d < F$; (2) $d > F$; полученные результаты объяснить с точки зрения физики.

4. Вычислить следующие пределы:

$$1. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x^2-25} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x-7}{(x^2-49)^{3x}}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{1}{x+5}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\frac{\lg 5x}{3x^2-1}} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x^3 + 3x^2 - 8}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 2x}{5x^2 + 2x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x + 3}{5x^3 - 7x + 3}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 5x}{x + 10} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 15}{x^4 + 7} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 5x}{x^2 + 6} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$12. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 5x^4 + 9}{4x^5 + 2x^3 - 7} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+5} \right)^{2n} = (1^\infty)$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{4}{n} \right)^n \right]^2 = (1^\infty)$$

$$15. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+5} \right)^x = (1^\infty)$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+9}{x} \right)^x = (1^\infty)$$

Оформить отчет и сдать на проверку

Домашнее задание. Решить (на выбор) любые 2 задачи с последующим объяснением на занятиях

1. Масса движущегося тела определяется соотношением $m(\beta) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ и $\beta = \frac{v}{c}$ - отношение

скорости тела к скорости света. Покажите, что в предельном переходе при $\beta \rightarrow 0$ массу можно считать постоянной и равной m_0 .

2. Интервал времени между двумя событиями зависит от скорости движения системы,

где эти события происходят, следующим образом:

$$\Delta t(v) = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \text{При } v \rightarrow c \text{ найдите предел функции } \Delta t(v) \text{ и сделайте вывод, считая,}$$

например, что Δt_0 - продолжение жизни близнеца, оставшегося на Земле, а Δt - продолжительность жизни его брата, отправившегося в космическое путешествие.

3. Значение кинетической энергии тела выражается формулой

$$E_{kin}(\beta) = \frac{m_0^2 c^2}{1 + \sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad \text{Найдите предел этой функции,}$$

т.е. получите классическую формулу для кинетической энергии, если $\beta \rightarrow 0$.

4. Сила давления летчика, совершающего «мертвую петлю», на сиденье в момент достижения верхней точки «мертвой петли» выражается формулой $F = m(a - g)$, где $a = v^2/r$ - центростремительное (нормальное) ускорение, r - радиус петли. Рассматривая данные выражения как функцию центростремительного ускорения, докажите, что при предельном переходе $a \rightarrow g$ летчик испытывает состояние невесомости.

5. Сила давления летчика на сиденье в нижней точке «мертвой петли» определяется формулой $Q = m(g + v^2/r)$, m - масса летчика, $g = 9,8 \text{ м/с}^2$.

Рассматривая данное выражение как функцию от r , найдите ее предел при: а) $r \rightarrow \infty$; б) $r \rightarrow 0$. Сделайте соответствующие выводы.

6. В падающем с ускорением a лифте тело давит на пол кабины с силой $P = m(a - g)$, g - ускорение свободного падения. Рассматривая данный процесс как функцию от a , найдите ее предел при а) $a \rightarrow g$; б) $a \rightarrow 0$.

Сделайте выводы.

Таблица ответов

№ Зада-ния	1 зада-ча	2 задача	3 задача	4 задание						
				1	2	3	4	5	6	7
Максимальное количество баллов	3	3	3	1	1	1	2	2	2	2
Набранные баллы										
4 задание										
№ Зада-ния	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Сумма баллов
Максимальное количество баллов	2	2	2	2	2	3	3	4	4	44
Набранные баллы										

Таблица перевода баллов в оценку

Набранное количество баллов	Оценка
0 - 15	2 (неудовлетворительно)
16 - 30	3 (удовлетворительно)
31 - 38	4 (хорошо)
39 - 44	5 (отлично)

Теоретическое занятие

Тема: Дифференциальное и интегральное исчисления

Форма контроля: опрос устный (фронтальный).

Задание: ответить на вопросы.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";
- 2) обучающиеся устно отвечают на вопросы;
- 3) время, отводимое на опрос - 10 мин;
- 4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Вопросы:

1. Дифференциальное и интегральное исчисления.
2. Нахождение неопределенных интегралов различными методами.
3. Вычисление определенных интегралов.
4. Применение определенного интеграла в практических задачах.

Теоретическое занятие

Тема: Дифференциальное и интегральное исчисления

Форма контроля: работа письменная.

Задание: выполнить задания.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";
- 2) обучающиеся выполняют задания в рабочих тетрадях;
- 3) время, отводимое на выполнение - 15 мин;
- 4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Задания:

Найдите производные функций:

- a) $y = \sqrt{x} \cdot (2x^2 - x)$;
- б) $y = (2x - 7)^8$;
- в) $y = x + 2\cos x$.

Теоретическое занятие

Тема: Дифференциальное и интегральное исчисления

Форма контроля: работа письменная.

Задание: выполнить задания.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";
- 2) обучающиеся выполняют задания в рабочих тетрадях;
- 3) время, отводимое на выполнение - 20 мин;
- 4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Задания:

Найти производные функций:

- 1) $y = (x + 9)^4$;
- 2) $y = (7x + 15)^2$;
- 3) $y = (x^3 - x^{-4} + 12)^3$;
- 4) $y = \sqrt{x^2 + 5}$;

$$5) y = \sqrt{x^8 - 5x};$$

Теоретическое занятие

Тема: Дифференциальное и интегральное исчисления

Форма контроля: работа письменная.

Задание: выполнить задания.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";
- 2) обучающиеся выполняют задания в рабочих тетрадях;
- 3) время, отводимое на выполнение - 20 мин;
- 4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Задания:

Вычислить неопределенные интегралы:

$$1) \int (1 - 3x)^6 dx$$

$$2) \int (2x - 1)^5 dx$$

$$3) \int \frac{1}{(x - 3)^2} dx$$

$$4) \int \sqrt{2 - \frac{x}{3}} dx$$

$$5) \int \sqrt{2 - \frac{x}{2}} dx$$

Теоретическое занятие

Тема: Дифференциальное и интегральное исчисления

Форма контроля: работа письменная.

Задание: выполнить задания.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";
- 2) обучающиеся выполняют задания в рабочих тетрадях;
- 3) время, отводимое на выполнение - 20 мин;
- 4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Задания:

Вычислить неопределенные интегралы:

$$1) \int_0^2 (2x - 1)^5 dx$$

$$2) \int_0^2 \frac{1}{(x - 3)^2} dx$$

$$3) \int_{-18}^3 \sqrt{2 - \frac{x}{3}} dx$$

$$4) \int_{-4}^2 \sqrt{2 - \frac{x}{2}} dx$$

$$5) \int_1^8 (2x - \frac{\sqrt[3]{x}}{x}) dx$$

Теоретическое занятие

Тема: Дифференциальное и интегральное исчисления

Форма контроля: работа письменная.

Задание: выполнить задания.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";
- 2) обучающиеся выполняют задания в рабочих тетрадях;
- 3) время, отводимое на выполнение - 20 мин;
- 4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Задания:

Вариант 1

1. Вычислите интегралы: а) $\int_{-1}^2 x^2 dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{12}} (1 + \cos 2x) dx$.
2. Докажите справедливость равенства: $\int_0^1 (2x + 1) dx = \int_0^2 (x^3 - 1) dx$.

Вариант 2

1. Вычислите интегралы: а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} -2 \sin x dx$; б) $\int_{-2}^2 \sqrt{2x + 5} dx$.
2. Докажите справедливость равенства: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \int_0^{\sqrt[3]{3}} x^2 dx$.

Теоретическое занятие

Тема: Дифференциальное и интегральное исчисления

Форма контроля: работа письменная.

Задание: выполнить задания.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";
- 2) обучающиеся выполняют задания в рабочих тетрадях;
- 3) время, отводимое на выполнение - 20 мин;
- 4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Задания:

Вариант 3

1. Вычислите интегралы: а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$; б) $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)^2}$.
2. Докажите справедливость равенства: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = \int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Вариант 4

1. Вычислите интегралы: а) $\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 \left(\frac{2x}{9} \right)}$.
2. Докажите справедливость равенства: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_0^1 dx$.

Вариант 5

1. Вычислите интегралы: а) $\int_{-1}^2 -x^3 dx$; б) $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin \left(\frac{\pi}{3} - 3x \right) dx$.
2. Верно ли неравенство: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x} < \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^2}$?

Вариант 6

1. Вычислите интегралы: а) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} -\frac{dx}{\sin^2 x}$; б) $\int_0^2 (1+3x)^4 dx$.
3. Верно ли неравенство: $\int_1^1 x^4 dx < \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$?

Вариант 7

1. Вычислите интегралы: а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos x dx$; б) $\int_2^7 \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$.
2. Верно ли неравенство: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} > \int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$?

Вариант 8

1. Вычислите интегралы: а) $\int_1^5 x^4 dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$.
2. Верно ли неравенство: $\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx > \int_2^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{x^2}$?

Практическое занятие 1

Тема: Нахождение неопределенных интегралов различными методами

Форма контроля: выполнение практической работы.

Задание: решить задачи.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";
- 2) работа выполняется в рабочих тетрадях;
- 3) время, отводимое на выполнение задания - 2 часа;
- 4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3.

Тема: «Нахождение неопределенных интегралов различными методами»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Неопределенный интеграл. 2. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)».
3. Закрепить и систематизировать знания по теме.
4. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно-технологические карты, таблицы первообразных некоторых функций, микрокалькуляторы.

Справочный материал:

1. Свойства неопределенного интеграла:

$$1. \left(\int f(x) dx \right)' = (F(x) + C)' = f(x);$$

$$2. d \left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx;$$

$$3. \int dF(x) = F(x) + C;$$

$$4. \int (u + v - w) dx = \int u dx + \int v dx - \int w dx; \text{ где } u, v, w - \text{некоторые функции от } x.$$

$$\int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx;$$

2. Таблица основных интегралов.

Интеграл	Значение	Интеграл	Значение
1 $\int \operatorname{tg} x dx$	$+C \mid \cos x \mid - \ln$	9 $\int e^x dx$	$e^x + C$
2 $\int \operatorname{ctg} x dx$	$+ C \mid \sin x \mid \ln$	10 $\int \cos x dx$	$\sin x + C$
3 $\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	11 $\int \sin x dx$	$-\cos x + C$
4		12	$\operatorname{tg} x + C$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} \quad \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$5 \quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} \quad \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C \quad 13 \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx \quad -\operatorname{ctg} x + C$$

$$6 \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \quad \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C \quad 14 \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$7 \quad \int x^\alpha dx \quad \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1 \quad 15 \quad \int \frac{1}{\cos x} dx \quad \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

$$8 \quad \int \frac{dx}{x} \quad \ln|x| + C \quad 16 \quad \int \frac{1}{\sin x} dx \quad \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

3. Способ подстановки (замены переменных).

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x) dx$ (t) и φ , но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены $x = \varphi(t)$ получается:
 $\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$

Пример 1.

Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$.

Сделаем замену $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$.

$$\int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C.$$

Пример 2. $\int x(x^2 + 1)^{3/2} dx$.

Замена $t = x^2 + 1$; $dt = 2x dx$; $dx = \frac{dt}{2x}$; Получаем:

$$\int t^{3/2} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{3/2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2 + 1)^{5/2}}{5} + C;$$

Содержание работы:

Вариант 1

$$1. y = \int x^3 - x^2 + \frac{1}{x^2} dx$$

$$2. y = \int \sqrt[3]{x} dx$$

$$3. y = \int \left(\frac{2+x}{x} \right)^2 dx$$

$$4. y = \int \frac{x^2 + \sqrt{x^3 + 3}}{\sqrt{x}} dx$$

$$5. y = \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$6. y = \int \frac{e^x dx}{1 + e^x}$$

$$7. y = \int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx$$

$$8. y = \int \ln x dx$$

$$9. y = \int x * \sin 2x dx$$

Вариант 2

$$1. y = \int 4x^3 + 3x^2 - 3 + \frac{1}{x^4} dx$$

$$2. y = \int 2\sqrt[2]{x^3} dx$$

$$3. y = \int \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx$$

$$4. y = \int \frac{3x^5 + 4x^2 - 2}{x^3} dx$$

$$5. y = \int \frac{(6x - 5) dx}{\sqrt{3x^2 - 5x + 6}}$$

$$6. y = \int e^{x^2} x dx$$

$$7. y = \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$$

$$8. y = \int x * e^x dx$$

$$9. y = \int \arcsin x dx$$

Теоретическое занятие

Тема: Матрицы и определители

Форма контроля: работа письменная (фронтальная форма организации работы).

Задание: выполнить задания.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";
- 2) обучающиеся выполняют задания в рабочих тетрадях;
- 3) время, отводимое на выполнение - 30 мин;
- 4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Задания:

1. Найти матрицу $3A-B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: } 1) \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 13 & 0 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$$

2. Найти матрицу $A+2B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: } 1) \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 13 & 0 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$$

3. Вычислить произведение матриц:

$$1) \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: } 1) \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 12 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: } 1) \begin{pmatrix} 43 & 10 \\ & \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 56 & 2 \\ 49 & 11 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 14 & 11 \end{pmatrix}$$

Теоретическое занятие

Тема: Матрицы и определители

Форма контроля: работа письменная (фронтальная форма организации работы).

Задание: выполнить задания.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";
- 2) обучающиеся выполняют задания в рабочих тетрадях;
- 3) время, отводимое на выполнение - 30 мин;
- 4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Задания:

Вычислить произведение матриц:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: } 1) \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: } 1) \begin{pmatrix} 43 & 10 \\ 49 & 11 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 56 & 2 \\ 14 & 11 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Теоретическое занятие

Тема: Матрицы и определители**Форма контроля:** работа письменная (фронтальная форма организации работы).**Задание:** выполнить задания.**Условия выполнения задания:**

- 1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";
- 2) обучающиеся выполняют задания в рабочих тетрадях;
- 3) время, отводимое на выполнение - 30 мин;
- 4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Задания:

Вычислить произведение матриц:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: } 1) \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} 2) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} 3) \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: } 1) \begin{pmatrix} 43 & 10 \\ 49 & 11 \end{pmatrix} 2) \begin{pmatrix} 56 & 2 \\ 14 & 11 \end{pmatrix} 3) \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Теоретическое занятие**Тема: Матрицы и определители****Форма контроля:** работа письменная (фронтальная форма организации работы).**Задание:** выполнить задания.**Условия выполнения задания:**

- 1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";
- 2) обучающиеся выполняют задания в рабочих тетрадях;
- 3) время, отводимое на выполнение - 30 мин;
- 4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Задания:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & -6 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -4 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

$$2) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$3) \begin{vmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$4) \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Теоретическое занятие

Тема: Матрицы и определители

Форма контроля: опрос устный (фронтальный).

Задание: ответить на вопросы.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";
- 2) обучающиеся устно отвечают на вопросы;
- 3) время, отводимое на опрос - 10 мин;
- 4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Вопросы:

Матрицы, их виды.

Действия над матрицами.

Умножение матриц, обратная матрица.

Определители n-го порядка, их свойства и вычисление.

Миноры и алгебраические дополнения.

Разложение определителей в сумму алгебраических дополнений.

Практическое занятие

Тема: Действия с матрицами.

Форма контроля: выполнение практической работы.

Задание: решить задачи.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";
- 2) работа выполняется в рабочих тетрадях;
- 3) время, отводимое на выполнение задания - 2 часа;
- 4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Задания:

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4.

Тема: «Действия с матрицами».

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Повторить знания по теме: «Матрицы. Действия над матрицами».
2. Организовать деятельность обучающихся по переводу своих знаний от усвоения отдельных фактов и понятий к их обобщению в целостную систему знаний.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно -технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Справочный материал:

1. Умножение матрицы на число.

Пример:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 12 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 7 & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & -3 \\ 21 & 0 \end{pmatrix}$$

Для того чтобы умножить матрицу на число, нужно **каждый** элемент матрицы умножить на это число.

2. Сумма (разность) матриц.

Для выполнения сложения (вычитания) матриц, необходимо, чтобы они были одинаковыми по размеру.

Для того чтобы сложить матрицы, необходимо сложить их соответствующие элементы:

$$F + G = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 + (-4) & -1 + (-3) \\ -5 + 15 & 0 + 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12 - 4 & -1 - 3 \\ -5 + 15 & 0 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$$

Для разности матриц правило аналогичное, необходимо найти разность соответствующих элементов.

Пример:

Найти разность матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -15 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix}$

$$A - H = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 3 & -15 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - (-4) & 5 - 3 & -17 - (-15) \\ -1 - (-5) & 0 - (-7) & 10 - 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 + 4 & 5 - 3 & -17 + 15 \\ -1 + 5 & 0 + 7 & 10 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

3. Умножение матриц.

Чтобы матрицу K можно было умножить на матрицу L нужно, чтобы число столбцов матрицы K равнялось числу строк матрицы L .

Пример 1:

Умножить матрицу $K = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ на матрицу $L = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Формула умножения для конкретного случая:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 c_1 + b_1 c_2 \\ a_2 c_1 + b_2 c_2 \end{pmatrix}$$

$$KL = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \\ 5 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Пример 2:

Умножить матрицу $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ на матрицу $N = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

Формула: $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 c_1 + b_1 c_2 & a_1 d_1 + b_1 d_2 \\ a_2 c_1 + b_2 c_2 & a_2 d_1 + b_2 d_2 \end{pmatrix}$

$$MN = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 9 - 3 \cdot 6 & 2 \cdot (-6) - 3 \cdot (-4) \\ 4 \cdot 9 - 6 \cdot 6 & 4 \cdot (-6) - 6 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В результате получена так называемая нулевая матрица.

Пример 3:

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Умножить матрицу на матрицу

Формула:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 d_1 + b_1 d_2 + c_1 d_3 \\ a_2 d_1 + b_2 d_2 + c_2 d_3 \\ a_3 d_1 + b_3 d_2 + c_3 d_3 \end{pmatrix}$$

$$PR = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 + 8 \cdot (-3) - 4 \cdot 1 \\ 6 \cdot 2 + 9 \cdot (-3) - 5 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 + 7 \cdot (-3) - 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -20 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Содержание работы:

Вариант № 1

1. Найти матрицу; 3А-В если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: 1) } \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 13 & 0 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$$

2. Вычислить произведение матриц:

$$1) \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: 1) } \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 12 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: 1) } \begin{pmatrix} 43 & 10 \\ & \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 56 & 2 \\ 49 & 11 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 14 & 11 \end{pmatrix}$$

Вариант № 2.

1. Найти матрицу: А+2В, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ответ: 1) $\begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 13 & 0 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$

2. Вычислить произведение матриц:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ответ: 1) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Ответ: 1) $\begin{pmatrix} 43 & 10 \\ 49 & 11 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 56 & 2 \\ 14 & 11 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$

Теоретическое занятие

Тема: Системы линейных уравнений

Форма контроля: работа письменная (по вариантам).

Задание: выполнить задания согласно своему варианту.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";
- 2) обучающиеся выполняют задания в рабочих тетрадях;
- 3) время, отводимое на выполнение - 15 мин;
- 4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Задания:

Вариант 1

1. Решить систему уравнений методом подстановки и методом Крамера:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - 4y = -5 \end{cases}$$

Вариант 2

1. Решить систему уравнений методом подстановки и методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ x + 4y = 7 \end{cases}$$

Теоретическое занятие

Тема: Системы линейных уравнений

Форма контроля: работа письменная (по вариантам).

Задание: выполнить задания согласно своему варианту.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";
- 2) обучающиеся выполняют задания в рабочих тетрадях;
- 3) время, отводимое на выполнение - 15 мин;
- 4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Задания:

Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

1.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y - 4z = 20 \\ 3x - 2y - 5z = 6 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x^1 + x^2 - x^3 = 0 \\ 4x^1 - x^2 + 5x^3 = 3 \end{cases}$$

Теоретическое занятие**Тема: Системы линейных уравнений**

Форма контроля: работа письменная (по вариантам).

Задание: выполнить задания согласно своему варианту.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";
- 2) обучающиеся выполняют задания в рабочих тетрадях;
- 3) время, отводимое на выполнение - 15 мин;
- 4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

1.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x^1 + x^2 - x^3 = 0 \\ 4x^1 - x^2 + 5x^3 = 3 \end{cases}$$

Ответ: 1.(1,3,2); 2.(1,0,3) 3.(0,0,0).

2.

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$$

Ответ: 1.(1,3,2); 2.(1,0,3) 3.(1,0,0).

3.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 3x^1 + 2x^2 + x^3 = 10 \\ 4x^1 + 3x^2 - 2x^3 = 4 \end{cases}$$

Ответ: 1.(3,4,8) 2.(1,2,3) 3.(5,8,2).

Дополнительное задание:

Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

$$1. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 10 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

Ответ: 1.(-1,3,2); 2.(0,0,3) 3.(0,0,0).

$$2. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Ответ: 1.(3,4,8); 2.(1,2,3); 3.(5,8,2).

$$3. \begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Ответ: 1.(-1,3,2); 2.(0,0,3); 3.(0,0,0).

Теоретическое занятие

Тема: Системы линейных уравнений

Форма контроля: работа письменная (по вариантам).

Задание: выполнить задания согласно своему варианту.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";
- 2) обучающиеся выполняют задания в рабочих тетрадях;
- 3) время, отводимое на выполнение - 15 мин;
- 4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Задания:

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса и Крамера:

Это изображение

$$1) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 11, \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 = 9 \end{cases}$$

3).

$$\begin{cases} x + y = 12, \\ 1,7x + 1,4y = 18 \end{cases}$$

4).

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

Теоретическое занятие

Тема: Системы линейных уравнений

Форма контроля: работа письменная (по вариантам).

Задание: выполнить задания согласно своему варианту.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";
- 2) обучающиеся выполняют задания в рабочих тетрадях;
- 3) время, отводимое на выполнение - 15 мин;

4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Задача 1. Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y - z = 7 \\ 3x - y + 4z = 12 \end{cases}$$

Задача 2. Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 3 \\ 3x - 4y + 2z = -5 \\ 2x + 7y - 5z = 13 \end{cases}$$

Задача 3. Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 2x - 7y + 5z = 9 \\ x + 5y - 5z = -2 \\ 4x - 2y + 7z = 24 \end{cases}$$

Задача 4. Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 2y + 4z = 9 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

Задача 3. Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \\ -2 & 5 & 5 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}^2$$

Задача 5. Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 17 \\ 2x - 3y + 5z = 16 \\ 3x + 4y - z = 7 \end{cases}$$

Задача 3. Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}^2 - 2 \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}^2$$

Задача 6. Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 2x + 2y - 4z = 6 \\ x + 3y - 5z = 6 \\ 3x - 2y + 6z = 6 \end{cases}$$

Задача 3. Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Задача 7. Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 22 \\ x - 3y - 6z = -9 \\ 2x + 4y - 4z = 10 \end{cases}$$

Задача 3. Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 - 2 \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2$$

Задача 8. Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$$

Задача 9. Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 2x - y - z = 14 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$$

Задача 10. Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 3x - y + z = 12 \\ x + 2y + 4z = 6 \\ 5x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

Задача 11. Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -4 \\ x + 3y - z = 11 \\ x - 2y + 2z = -7 \end{cases}$$

Задача 12. Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 7 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + 2y + z = 6 \end{cases}$$

Задача 13. Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 12 \\ 3x + 4y - 2z = 6 \\ 2x - y - z = -9 \end{cases}$$

Задача 14 Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 3 \\ x + y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -3 \end{cases}$$

Задача 15. Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 31 \\ 5x + y + 2z = 29 \\ 3x - y - z = 10 \end{cases}$$

Задача 16. Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$$

Задача 17. Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2 \\ 4x - 5y + 2z = 1 \\ 5x - 6y + 4z = 3 \end{cases}$$

Задача 18. Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 8 \\ 2x + 4y - 5z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

Задача 19. Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = 15 \\ 3x - y + z = 8 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases}$$

Задача 20. Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = -5 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$$

Практическое занятие

Тема: Решение систем линейных уравнений различными методами.

Форма контроля: выполнение практической работы.

Задание: решить задачи.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";
- 2) работа выполняется в рабочих тетрадях;
- 3) время, отводимое на выполнение задания - 2 часа;
- 4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5.

Тема: «Решение систем линейных уравнений различными методами».

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Повторить знания по теме: «Решить систему линейных уравнений методом Гаусса».
2. Организовать деятельность обучающихся по переводу своих знаний от усвоения отдельных фактов и понятий к их обобщению в целостную систему знаний.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно - технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Справочный материал:

Система линейных уравнений может:

- 1) Иметь единственное решение.
- 2) Иметь бесконечно много решений.
- 3) Не иметь решений (быть несовместной).

Метод Гаусса – наиболее мощный и универсальный инструмент для нахождения решения любой системы линейных уравнений. [Правило Крамера и матричный метод](#) непригодны в тех случаях, когда система имеет бесконечно много решений или несовместна.

Пусть дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + y = -7 \end{cases} \text{ решим ее методом Гаусса.}$$

На первом этапе нужно записать расширенную матрицу системы:

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array} \right)$. По какому принципу записаны коэффициенты, думаю, всем видно. Вертикальная черта внутри матрицы не несёт никакого математического смысла – это просто отчеркивание для удобства оформления.

Справка: рекомендую запомнить термины линейной алгебры. Матрица системы – это матрица, составленная только из коэффициентов при неизвестных, в данном примере матрица

системы: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Расширенная матрица системы – это та же матрица системы плюс столбец

свободных членов, в данном случае: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array} \right)$. Любую из матриц можно для краткости называть просто матрицей.

После того, как расширенная матрица системы записана, с ней необходимо выполнить некоторые действия, которые также называются элементарными преобразованиями.

Существуют следующие элементарные преобразования:

- 1) Строки матрицы можно переставлять местами. Например, в рассматриваемой матрице можно

безболезненно переставить первую и вторую строки: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & -5 \end{array} \right)$

2) Если в матрице есть (или появились) пропорциональные (как частный случай – одинаковые) строки, то следует удалить из матрицы все эти строки кроме одной. Рассмотрим, например

матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4|5 \\ 0 & 1 & -1 & 2|3 \\ 0 & 1 & -1 & 2|3 \\ 0 & 2 & -2 & 4|6 \end{pmatrix}$. В данной матрице последние три строки пропорциональны, поэтому

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4|5 \\ 0 & 1 & -1 & 2|3 \\ 0 & 1 & -1 & 2|3 \\ 0 & 2 & -2 & 4|6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4|5 \\ 0 & 1 & -1 & 2|3 \\ 0 & 1 & -1 & 2|3 \end{pmatrix}$$

достаточно оставить только одну из них:

3) Если в матрице в ходе преобразований появилась нулевая строка, то ее также следует удалить. Рисовать не буду, понятно, нулевая строка – это строка, в которой одни нули.

4) Строку матрицы можно умножить (разделить) на любое число, отличное от нуля. Рассмотрим,

например, матрицу $\begin{pmatrix} -3 & 9|15 \\ 0,5 & 0|2,5 \end{pmatrix}$. Здесь целесообразно первую строку разделить на -3 , а вторую

строку – умножить на 2: $\begin{pmatrix} -3 & 9|15 \\ 0,5 & 0|2,5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3|-5 \\ 1 & 0|5 \end{pmatrix}$. Данное действие очень полезно, поскольку упрощает дальнейшие преобразования матрицы.

5) Это преобразование вызывает наибольшие затруднения, но на самом деле ничего сложного тоже нет. К строке матрицы можно прибавить другую строку, умноженную на число, отличное от

нуля. Рассмотрим нашу матрицу из практического примера: $\begin{pmatrix} 1 & -1|-5 \\ 2 & 1|-7 \end{pmatrix}$. Сначала я распишу

преобразование очень подробно. Умножаем первую строку на -2 : $\begin{pmatrix} 1 & -1|-5 \\ 2 & 1|-7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2|10 \\ 2 & 1|-7 \end{pmatrix}$, и ко второй строке прибавляем первую строку умноженную на $-$

2: $\begin{pmatrix} 1 & -1|-5 \\ 2 & 1|-7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2|10 \\ 2 & 1|-7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2|10 \\ 0 & 3|3 \end{pmatrix}$. Теперь первую строку можно разделить «обратно»

на -2 : $\begin{pmatrix} 1 & -1|-5 \\ 2 & 1|-7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2|10 \\ 2 & 1|-7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2|10 \\ 0 & 3|3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1|-5 \\ 0 & 3|3 \end{pmatrix}$. Как видите, строка, которую ПРИБАВЛЯЛИ – не изменилась. Всегда меняется строка, К КОТОРОЙ ПРИБАВЛЯЮТ.

На практике так подробно, конечно, не расписывают, а пишут короче:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1|-5 \\ 2 & 1|-7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1|-5 \\ 0 & 3|3 \end{pmatrix}$$

Еще раз: ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на -2 . Умножают строку обычно устно или на черновике, при этом мысленный ход расчетов примерно такой:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1|-5 \\ 2 & 1|-7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1|-5 \\ * & *|* \end{pmatrix}$$

«Переписываю матрицу и переписываю первую строку:

«Сначала первый столбец. Внизу мне нужно получить ноль. Поэтому единицу сверху умножаю на -2 : $1 \cdot (-2) = -2$, и ко второй строке прибавляю первую: $2 + (-2) = 0$. Записываю результат во

вторую строку: $\begin{pmatrix} 1 & -1|-5 \\ 2 & 1|-7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1|-5 \\ 0 & *|* \end{pmatrix}$ »

«Теперь второй столбец. Вверху -1 умножаю на -2 : $-1 \cdot (-2) = 2$. Ко второй строке прибавляю

первую: $1 + 2 = 3$. Записываю результат во вторую строку: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$ »

«И третий столбец. Вверху -5 умножаю на -2 : $-5 \cdot (-2) = 10$. Ко второй строке прибавляю

первую: $-7 + 10 = 3$. Записываю результат во вторую строку: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$ »

Пожалуйста, тщательно осмыслите этот пример и разберитесь в последовательном алгоритме вычислений, если вы это поняли, то метод Гаусса практически «в кармане». Но, конечно, над этим преобразованием мы еще поработаем.

Элементарные преобразования не меняют решение системы уравнений

! ВНИМАНИЕ: рассмотренные манипуляции нельзя использовать, если Вам предложено задание, где матрицы даны «сами по себе». Например, при «классических» [действиях с матрицами](#) что-то переставлять внутри матриц ни в коем случае нельзя!

Вернемся к нашей системе $\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + y = -7 \end{cases}$. Она практически разобрана по косточкам.

Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

(1) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на -2 . И снова: почему первую строку умножаем именно на -2 ? Для того чтобы внизу получить ноль, а значит, избавиться от одной переменной во второй строке.

(2) Делим вторую строку на 3.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Цель элементарных преобразований – привести матрицу к ступенчатому виду:

В оформлении задания прямо так и подчеркивают простым карандашом «лестницу», а также обводят кружочками числа, которые располагаются на «ступеньках». Сам термин «ступенчатый вид» не вполне теоретический, в научной и учебной литературе он часто называется трапециевидный вид или треугольный вид.

В результате элементарных преобразований получена эквивалентная исходной система уравнений:

$$\begin{cases} x - y = -5 \\ y = 1 \end{cases}$$

Теперь систему нужно «раскрутить» в обратном направлении – снизу вверх, этот процесс называется обратным ходом метода Гаусса.

В нижнем уравнении у нас уже готовый результат: $y = 1$.

Рассмотрим первое уравнение системы $x - y = -5$ и подставим в него уже известное значение «игрек»:

$$\begin{aligned} x - 1 &= -5 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Ответ: $x = -4, y = 1$

Рассмотрим наиболее распространенную ситуацию, когда методом Гаусса требуется решить систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными.

Пример 1

Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = -1 \\ 2x - y + 3z = 13 \\ x + 2y - z = 9 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array} \right)$$

Сейчас я сразу нарисую результат, к которому мы придём в ходе решения:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 2 & -1 & 9 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 4 \end{array} \right)$$

И повторюсь, наша цель – с помощью элементарных преобразований привести матрицу к ступенчатому виду. С чего начать действия?

Сначала смотрим на левое верхнее число:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{3} & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array} \right)$$

Почти всегда здесь должна находиться единица. Вообще говоря, устроит и -1 (а иногда и другие числа), но как-то так традиционно сложилось, что туда обычно помещают единицу. Как организовать единицу? Смотрим на первый столбец – готовая единица у нас есть! Преобразование первое: меняю местами первую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array} \right)$$

Теперь первая строка у нас останется неизменной до конца решения. Уже легче.

Единица в левом верхнем углу организована. Теперь нужно получить нули вот на этих местах:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ \textcircled{2} & -1 & 3 & 13 \\ \textcircled{3} & 2 & -5 & -1 \end{array} \right)$$

Нули получаем как раз с помощью «трудного» преобразования. Сначала разбираемся со второй строкой $(2, -1, 3, 13)$. Что нужно сделать, чтобы на первой позиции получить ноль? Нужно ко второй строке прибавить первую строку, умноженную на -2 . Мысленно или на черновике умножаем первую строку на -2 : $(-2, -4, 2, -18)$. И последовательно проводим (опять же мысленно

или на черновике) сложение, ко второй строке прибавляем первую строку, уже умноженную на -2 :

$$\begin{array}{rrrr} 0 & -5 & 5 & -5 \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ -2 & -4 & 2 & -18 \\ + & + & + & + \\ 2 & -1 & 3 & 13 \end{array}$$

Результат записываем во вторую строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Аналогично разбираемся с третьей строкой $(3, 2, -5, -1)$. Чтобы получить на первой позиции ноль, нужно к третьей строке прибавить первую строку, умноженную на -3 . Мысленно или на черновике умножаем первую строку на -3 : $(-3, -6, 3, -27)$. И к третьей строке прибавляем первую строку, умноженную на -3 :

$$\begin{array}{rrrr} 0 & -4 & -2 & -28 \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ -3 & -6 & 3 & -27 \\ + & + & + & + \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}$$

Результат записываем в третью строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

На практике эти действия обычно выполняются устно и записываются в один шаг:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

Не нужно считать всё сразу и одновременно. Порядок вычислений и «вписывания» результатов последователен и обычно такой: сначала переписываем первую строку, и пыхтим себе потихонечку – ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО и ВНИМАТЕЛЬНО:

$$\begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ * & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow \\ \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \end{array}$$

А мысленный ход самих расчётов я уже рассмотрел выше.

Далее нужно получить единицу на следующей «ступеньке»:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

В данном примере это сделать легко, вторую строку делим на -5 (поскольку там все числа делятся на 5 без остатка). Заодно делим третью строку на -2 , ведь чем меньше числа, тем проще решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

На заключительном этапе элементарных преобразований нужно получить еще один ноль здесь:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \textcircled{2} & 1 & 14 \end{array}\right)$$

Для этого к третьей строке прибавляем вторую строку, умноженную на -2 :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Попробуйте разобрать это действие самостоятельно – мысленно умножьте вторую строку на -2 и проведите сложение.

Последнее выполненное действие – причёска результата, делим третью строку на 3.

В результате элементарных преобразований получена эквивалентная исходной система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 9 \\ y - z = 1 \\ z = 4 \end{cases}$$

Круто.

Теперь в действие вступает обратный ход метода Гаусса. Уравнения «раскручиваются» снизу-вверх.

В третьем уравнении у нас уже готовый результат: $z = 4$

Смотрим на второе уравнение: $y - z = 1$. Значение «зет» уже известно, таким образом:

$$y - 4 = 1$$

$$y = 5$$

И, наконец, первое уравнение: $x + 2y - z = 9$. «Игрек» и «зет» известны, дело за малым:

$$x + 2 \cdot 5 - 4 = 9$$

$$x + 6 = 9$$

$$x = 3$$

Ответ: $x = 3, y = 5, z = 4$

Как уже неоднократно отмечалось, для любой системы уравнений можно и нужно сделать проверку найденного решения, благо, это несложно и быстро.

Пример 2

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - y + 2z = 6 \\ x + y + 5z = -1 \end{cases}$$

Это пример для самостоятельного решения, образец чистового оформления и ответ в конце урока. Следует отметить, что ваш ход решения может не совпасть с моим ходом решения, и это – особенность метода Гаусса. Но вот ответы обязательно должны получиться одинаковыми!

Пример 3

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

Смотрим на левую верхнюю «ступеньку». Там у нас должна быть единица. Проблема состоит в том, что в первом столбце единиц нет вообще, поэтому перестановкой строк ничего не решить. В таких случаях единицу нужно организовать с помощью элементарного преобразования. Обычно это можно сделать несколькими способами. Я поступил так:

(1) К первой строке прибавляем вторую строку, умноженную на -1 . То есть, мысленно умножили вторую строку на -1 и выполнили сложение первой и второй строки, при этом вторая строка у нас не изменилась.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

Теперь слева сверху «минус один», что нас вполне устроит. Кто хочет получить $+1$, может выполнить дополнительное телодвижение: умножить первую строку на -1 (сменить у неё знак).

Дальше алгоритм работает уже по накатанной колее:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{(4)} \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{(5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

(2) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на 5. К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на 3.

(3) Первую строку умножили на -1 , в принципе, это для красоты. У третьей строки также сменили знак и переставили её на второе место, таким образом, на второй «ступеньке» у нас появилась нужная единица.

(4) К третьей строке прибавили вторую строку, умноженную на 2.

(5) Третью строку разделили на 3.

Скверным признаком, который свидетельствует об ошибке в вычислениях (реже – об опечатке), является «плохая» нижняя строка. То есть, если бы у нас внизу получилось что-нибудь

вроде $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 11 & 23 \end{array} \right)$, и, соответственно, $11x_3 = 23 \Rightarrow x_3 = \frac{23}{11}$, то с большой долей вероятности можно утверждать, что допущена ошибка в ходе элементарных преобразований.

Заряжаем обратный ход, в оформлении примеров часто не переписывают саму систему, а уравнения «берут прямо из приведенной матрицы». Обратный ход, напоминая, работает, снизу-вверх. Да тут подарок получился:

$$x_3 = 1$$

$$x_2 = 3$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + 3 - 1 = 1 \Rightarrow x_1 = -1$$

Ответ: $x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = 1$.

Пример 4

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 8x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 18 \\ -7x_1 - 4x_2 - 4x_3 = -11 \\ -6x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -15 \end{cases}$$

Это пример для самостоятельного решения, он несколько сложнее. Ничего страшного, если кто-нибудь запутается. Полное решение и образец оформления в конце урока. Ваше решение может отличаться от моего решения.

В последней части рассмотрим некоторые особенности алгоритма Гаусса.

Первая особенность состоит в том, что иногда в уравнениях системы отсутствуют некоторые переменные, например:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 + 4x_3 + 6 = 0 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Как правильно записать расширенную матрицу системы? В расширенной матрице системы на месте отсутствующих переменных ставим нули:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Кстати, это довольно легкий пример, поскольку в первом столбце уже есть один ноль, и предстоит выполнить меньше элементарных преобразований.

Вторая особенность состоит вот в чём. Во всех рассмотренных примерах на «ступеньки» мы помещали либо -1 , либо $+1$. Могут ли там быть другие числа? В ряде случаев могут. Рассмотрим

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ 2x + y - 4z = 9 \\ 6x - 5y + 2z = 17 \end{cases}$$

систему:

Здесь на левой верхней «ступеньке» у нас двойка. Но замечаем тот факт, что все числа в первом столбце делятся на 2 без остатка – и другая двойка и шестерка. И двойка слева вверху нас устроит! На первом шаге нужно выполнить следующие преобразования: ко второй строке прибавить первую строку, умноженную на -1 ; к третьей строке прибавить первую строку, умноженную на -3 . Таким образом, мы получим нужные нули в первом столбце.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 17 \\ 0 & 12 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Или еще такой условный пример: . Здесь тройка на второй «ступеньке» тоже нас устраивает, поскольку 12 (место, где нам нужно получить ноль) делится на 3 без остатка.

Необходимо провести следующее преобразование: к третьей строке прибавить вторую строку, умноженную на -4 , в результате чего и будет получен нужный нам ноль.

Метод Гаусса универсален, но есть одно своеобразие. Уверенно научиться решать системы другими методами (методом Крамера, матричным методом) можно буквально с первого раза – там очень жесткий алгоритм. Но вот чтобы уверенно себя чувствовать в методе Гаусса, следует «набить руку», и прорешать хотя бы 5-10 десятков систем. Поэтому поначалу возможны путаница, ошибки в вычислениях, и в этом нет ничего необычного или трагического.

Дождливая осенняя погода за окном Поэтому для всех желающих более сложный пример для самостоятельного решения:

Пример 5

Решить методом Гаусса систему 4-х линейных уравнений с четырьмя неизвестными.

$$\begin{cases} 2x + 5y + 4z + t = 20 \\ x + 3y + 2z + t = 11 \\ 2x + 10y + 9z + 7t = 40 \\ 3x + 8y + 9z + 2t = 37 \end{cases}$$

Решения и ответы:

Пример 2: Решение: Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 20 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 11 \\ 2 & 10 & 9 & 7 & 40 \\ 3 & 8 & 9 & 2 & 37 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 20 \\ 0 & -5 & -4 & -1 & -9 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 20 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 20 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 20 \\ 0 & -5 & -4 & -1 & -9 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 20 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 20 \\ 0 & 0 & -14 & -9 & -49 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & -33 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -20 \\ 0 & 0 & -14 & -9 & -49 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & -33 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Выполненные элементарные преобразования:

(1) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на -2 . К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на -1 . Внимание! Здесь может возникнуть соблазн из третьей строки вычесть первую, крайне не рекомендую вычитать – сильно повышается риск ошибки. Только складываем!

(2) У второй строки сменили знак (умножили на -1). Вторую и третью строки поменяли местами. Обратите внимание, что на «ступеньках» нас устраивает не только единица, но еще и -1 , что даже удобнее.

(3) К третьей строке прибавили вторую строку, умноженную на 5 .

(4) У второй строки сменили знак (умножили на -1). Третью строку разделили на 14 .

Обратный ход: $z = -1$

$$y - 2z = 2 \Rightarrow y + 2 = 2 \Rightarrow y = 0$$

$$x + 2y + 3z = 1 \Rightarrow x + 0 - 3 = 1 \Rightarrow x = 4$$

Ответ: $x = 4, y = 0, z = -1$.

Пример 4: Решение: Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 8 & 7 & 3 & 18 \\ -7 & -4 & -4 & -11 \\ -6 & 5 & -4 & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 7 \\ -7 & -4 & -4 & -11 \\ -6 & 5 & -4 & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 17 & -11 & 38 \\ 0 & 23 & -10 & 27 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 17 & -11 & 38 \\ 0 & 6 & 1 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & -14 & 71 \\ 0 & 6 & 1 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & -14 & 71 \\ 0 & 0 & -83 & 415 \end{pmatrix} \xrightarrow{(6)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 14 & -71 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Выполненные преобразования:

(1) К первой строке прибавили вторую. Таким образом, организована нужная единица на левой верхней «ступеньке».

(2) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на 7 . К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на 6 .

Со второй «ступенькой» всё хуже, «кандидаты» на неё – числа 17 и 23 , а нам нужна либо единица, либо -1 . Преобразования (3) и (4) будут направлены на получение нужной единицы

- (3) К третьей строке прибавили вторую, умноженную на -1 .
 (4) Ко второй строке прибавили третью, умноженную на -3 .
 Нужная вещь на второй ступеньке получена.
 (5) К третьей строке прибавили вторую, умноженную на 6 .
 (6) Вторую строку умножили на -1 , третью строку разделили на -83 .

Обратный ход: $x_3 = -5$

$$x_2 + 14x_3 = -71 \Rightarrow x_2 - 70 = -71 \Rightarrow x_2 = -1$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \Rightarrow x_1 - 3 + 5 = 7 \Rightarrow x_1 = 5$$

Ответ: $x_1 = 5, x_2 = -1, x_3 = -5$

Пример 5: Решение: Запишем матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 & 20 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 2 & 10 & 9 & 7 & 40 \\ 3 & 8 & 9 & 2 & 37 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 20 \\ 2 & 10 & 9 & 7 & 40 \\ 3 & 8 & 9 & 2 & 37 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 5 & 18 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Выполненные преобразования:

- (1) Первую и вторую строки поменяли местами.
 (2) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на -2 . К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на -2 . К четвертой строке прибавили первую строку, умноженную на -3 .
 (3) К третьей строке прибавили вторую, умноженную на 4 . К четвертой строке прибавили вторую, умноженную на -1 .
 (4) У второй строки сменили знак. Четвертую строку разделили на 3 и поместили вместо третьей строки.
 (5) К четвертой строке прибавили третью строку, умноженную на -5 .

Обратный ход:

$$t = 0$$

$$z = 2$$

$$y + t = 2 \Rightarrow y = 2$$

$$x + 3y + 2z + t = 11 \Rightarrow x + 6 + 4 + 0 = 11 \Rightarrow x = 1$$

Ответ: $x = 1, y = 2, z = 2, t = 0$

Содержание работы:

Вариант № 1.

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$1. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

Ответ: 1.(1,3,2); 2.(1,0,3) 3.(0,0,0).

$$2. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$$

Ответ: 1.(1,3,2); 2.(1,0,3) 3.(1,0,0).

$$3. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1^1 + 3x_2^2 - 2x_3^3 = 4 \end{cases}$$

Ответ: 1.(3,4,8) 2.(1,2,3) 3.(5,8,2).

Вариант № 2.

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$1. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 10 \\ 4x_1^1 - x_2^2 + 5x_3^3 = 3 \end{cases}$$

Ответ: 1.(-1,3,2); 2.(0,0,3) 3.(0,0,0).

$$2. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Ответ: 1.(3,4,8); 2.(1,2,3); 3.(5,8,2).

$$3. \begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1^1 + x_2^2 + 2x_3^3 = 0 \end{cases}$$

Ответ: 1.(-1,3,2); 2.(0,0,3); 3.(0,0,0).

Теоретическое занятие

Тема: Основы дискретной математики

Форма контроля: опрос устный (фронтальный).

Задание: ответить на вопросы.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";
- 2) обучающиеся устно отвечают на вопросы;
- 3) время, отводимое на опрос - 10 мин;
- 4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Вопросы:

1. Элементы и множества.
2. Задание множеств.
3. Операции над множествами и их свойства.
4. Отношения и их свойства.
5. Выполнение операций над множествами.

Теоретическое занятие

Тема: Основы дискретной математики

Форма контроля: работа письменная (по вариантам).

Задание: выполнить задания согласно своему варианту.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";

- 2) обучающиеся выполняют задания в рабочих тетрадях;
- 3) время, отводимое на выполнение - 15 мин;
- 4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Задания:

1. Записать путем перечисления элементов:

- а) множество простых чисел первого десятка;
- б) множество букв в слове «грамматика»;
- в) множество цифр в числе 222222222;
- г) множество правильных несократимых дробей со знаменателем 9;
- д) множество несократимых дробей с однозначным знаменателем, заключенных между числами 0 и $\frac{1}{2}$;
- е) множество десятичных дробей, при записи которых используется цифра 2 три раза, а цифра 5 один раз.

2. Пусть М – множество букв в слове «платок». Является ли подмножеством множества М множество букв в словах: толпа, каток, парта, потолок?

3. Дано множество $K = \{70, 106, 223, 304\}$. Составить подмножества множества К из чисел, у которых:

- а) цифры десятков четные;
- б) цифры десятков являются нечетными;
- в) сумма цифр числа равна 7;
- г) сумма цифр числа отлична от 7.

4. Какие элементы входят в пересечение и объединение множеств букв в словах:

- а) «математика» и «грамматика»;
- б) «насос» и «сосна»;
- в) «логово» и «голова»;
- г) «мода» и «круг».

5. В классе 40 человек. Из них по русскому языку имеют «тройки» 19 человек, по математике – 17 человек и по физике – 22 человека. Четыре человека имеют «тройки» только по русскому языку, 4 – только по математике и 11 человек – только по физике. Семь человек имеют «тройки» по математике и физике. Сколько человек учатся без «троек»? Сколько человек имеют «тройки» по двум из трех предметов? (Решить с помощью кругов Эйлера)

6. Выясните, является ли конечным или бесконечным множество К, и укажите, если возможно, его наименьший и наибольший элементы, зная что:

- а) К - множество трехзначных четных чисел;
- б) К – множество простых чисел, меньших 30;
- в) К – множество натуральных делителей числа 505;
- г) К – множество корней уравнения $(x - 2)(x + 11)(x - 12)(x + 13)(x - 14) = 0$;
- д) К – множество целых чисел, удовлетворяющих условию $-4,5 < x < 5,5$;
- е) К – множество целых чисел, удовлетворяющих неравенству $|x| < 6$;
- ж) К – множество решений неравенства $x > 15$;
- з) К – множество решений неравенства $x < 12$;
- и) К – множество трехзначных чисел, кратных 3;
- к) К – множество четырехзначных чисел, кратных 5;
- л) К – множество составных чисел, меньших 30;
- м) К – множество двузначных чисел, кратных 3.

7. Найдите $n(A)$, если:

- а) $A = \{0, 2, 5, 7, 17, 25\}$;
- б) A – множество натуральных делителей числа 28;
- в) A – множество трехзначных чисел;
- г) A – множество букв в слове «кошка».

8. C – множество цифр в числе 2347. Является ли множество цифр в числе x подмножеством множества C , если:
 $x = 32$; $x = 47$; $x = 43443$; $x = 27433$; $x = 43572$?

9. A – множество двузначных чисел. Составьте подмножество множества A , в котором каждый элемент – число:

- а) оканчивающееся цифрой 9;
- б) записанное одинаковыми цифрами.

10. Записать пересечение, объединение, разность множеств X и Y и изобразить кругами Эйлера:

- а) $X = \{62; 31; 74; 7; 17; 20\}$
 $Y = \{4; 5; 17; 8; 62; 3; 7\}$
- б) $X = \{31, 19, 14\}$
 $Y = \{3; 19; 2; 21; 31; 17; 14\}$
- в) $X = \{16; 14; 7; 35\}$
 $Y = \{10; 8; 53; 41\}$.

Практическое занятие

Тема: Выполнение операций над множествами.

Форма контроля: выполнение практической работы.

Задание: решить задачи.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";
- 2) работа выполняется в рабочих тетрадях;
- 3) время, отводимое на выполнение задания - 2 часа;
- 4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6.

Тема: «Выполнение операций над множествами».

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

- 1. Повторить знания по теме: «Выполнение операций над множествами».
- 2. Организовать деятельность обучающихся по переводу своих знаний от усвоения отдельных фактов и понятий к их обобщению в целостную систему знаний.
- 3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно - технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Содержание работы:

- 1. Найдите объединение, пересечение, разность множеств A и B , если:
 - а) $A =]-\infty; 7]$; $B = [1; +\infty)$
 - б) $A = [3; 7]$ $B = [0; 9]$.
- 2. (Устно) Найдите дополнение в множестве всех треугольников к множеству:
 - а) всех равносторонних треугольников;
 - б) всех равнобедренных треугольников;

в) всех прямоугольных треугольников.

3. Пусть $A = \{2; 3; 4; 5; 7; 10\}$, $B = \{3; 5; 7; 9\}$, $C = \{4; 9; 11\}$. Найти множества:

- а) $A \cup (B \cup C)$; е) $A \setminus B$;
б) $(C \cup B) \cup A$; ж) $A \oplus B$;
в) $A \cap (B \cup C)$; з) $B \times C$.
г) $A \cup (B \cap C)$;
д) $A \cap (B \cap C)$;

4. (Устно) Приведите примеры множеств, составленных из объектов следующих видов:

- а) неодушевленных предметов;
б) животных;
в) растений;
г) геометрических фигур;
д) населенных пунктов;
е) водоемов;
ж) политических деятелей.

Индивидуальное задание.

1 вариант

1. Пусть A – множество корней уравнения $x^2 = 4$, B – множество корней уравнения $(x + 1)(x - 2) = 0$, C – множество корней уравнения $|x| = 1$. Перечислите элементы множеств:

а) $A \cup B$; б) $B \cap C$; в) $A \cap C$; г) $C \setminus B$; д) $B \setminus C$; е) $A \cup B \cup C$.

2. Перечислите элементы каждого из множеств:

- а) $A = \{x : x \in \mathbf{N}, -2 \leq x \leq 5\}$;
б) $B = \{x : x \in \mathbf{Z}, |x| < 3\}$;
в) $C = \{x : x \in \mathbf{N}, 2x^2 + 5x - 3 = 0\}$.

3. Даны множества: $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{1, 8, 5\}$. Найдите $A \times B$.

4. Даны два множества: A – множество стран и B – множество материков. Задайте соответствие между этими множествами с помощью стрелок. $A = \{\text{Россия, Ливия, Бразилия, Эфиопия, Канада, США}\}$,
 $B = \{\text{Африка, Евразия, Северная Америка, Южная Америка}\}$.

2

вариант

1. Пусть A – множество корней уравнения $x^2 = 9$, B – множество корней уравнения $(x + 1)(x - 3) = 0$, C – множество корней уравнения $|x| = 1$. Перечислите элементы множеств:

а) $A \cup B$; б) $B \cap C$; в) $A \cap C$; г) $C \setminus B$; д) $B \setminus C$; е) $A \cup B \cup C$.

2. Перечислите элементы каждого из множеств:

- а) $A = \{x : x \in \mathbf{Z}, |x| = 4\}$;
б) $B = \{x : x \in \mathbf{N}, -2 < x \leq 5\}$;
в) $C = \{x : x \in \mathbf{Q}, x^2 + 3x + 4 = 0\}$.

3. Даны множества: $A = \{1, 4, 3\}$ и $B = \{-1, 6, 0\}$. Найдите $A \times B$.

4. Даны два множества: A – множество месяцев года и B – множество времён года. Задайте соответствие между этими множествами с помощью стрелок.

3

вариант

1. Пусть A – множество корней уравнения $x^2 = 16$, B – множество корней уравнения $(x + 1)(x - 4) = 0$, C – множество корней уравнения $|x| = 1$. Перечислите элементы множеств:

а) $A \cup B$; б) $B \cap C$; в) $A \cap C$; г) $C \setminus B$; д) $B \setminus C$; е) $A \cup B \cup C$.

2. Перечислите элементы каждого из множеств:

а) $A = \{x: x \in \mathbf{Z}, -2 \leq x \leq 3\}$;

б) $B = \{x: x \in \mathbf{N}, (5x + 6)(x - 4) = 0\}$;

в) $C = \{x: x \in \mathbf{N}, |x| = 7\}$.

3. Даны множества: $A = \{0, -4, 3\}$ и $B = \{1, 7, 2\}$. Найдите $A \times B$.

4. Даны два множества: A – множество стран и B – множество материков. Задайте соответствие между этими множествами с помощью стрелок. $A = \{\text{Россия, Ливия, Бразилия, Эфиопия, Канада, США}\}$,
 $B = \{\text{Африка, Евразия, Северная Америка, Южная Америка}\}$.

4

вариант

1. Пусть A – множество корней уравнения $x^2 = 25$, B – множество корней уравнения $(x + 1)(x - 5) = 0$, C – множество корней уравнения $|x| = 1$. Перечислите элементы множеств:

а) $A \cup B$; б) $B \cap C$; в) $A \cap C$; г) $C \setminus B$; д) $B \setminus C$; е) $A \cup B \cup C$.

2. Перечислите элементы каждого из множеств:

а) $A = \{x: x \in \mathbf{N}, x \leq 4\}$;

б) $B = \{x: x \in \mathbf{Z}, (x + 1)(-x - 3) = 0\}$;

в) $C = \{x: x \in \mathbf{N}, |x| = 5\}$.

3. Даны множества: $A = \{-2, 2, 0\}$ и $B = \{1, -6, 4\}$. Найдите $A \times B$.

4. Даны два множества: A – множество месяцев года и B – множество времён года. Задайте соответствие между этими множествами с помощью стрелок.

Контрольные вопросы:

1. Назовите элементы, принадлежащие множеству:

а) студентов вашей группы;

б) предметов, изучаемых в I семестре вашей специальности;

в) всех частей света;

г) субъектов федерации, входящих в Российскую Федерацию.

2. Пусть A – множество многоугольников. Принадлежат ли этому множеству:

а) восьмиугольник;

б) параллелограмм;

в) отрезок;

г) параллелепипед;

д) круг;

е) полукруг?

3. Запишите перечислением элементов следующие множества:

а) A – множество нечетных чисел на отрезке $[1; 15]$;

б) B – множество натуральных чисел, меньших 8;

в) C – множество натуральных чисел, больших 10, но меньших 12;

г) D – множество двузначных чисел, делящихся на 10;

д) E – множество натуральных делителей числа 18;

е) F – множество чисел, модуль которых равен $\frac{2}{3}$.

4. На факультете филологии и журналистики учатся студенты, получающие стипендию, и студенты, не получающие стипендию. Пусть A – множество всех студентов факультета; B – множество студентов факультета, получающих стипендию.

Укажите, что собой представляет **объединение**, **пересечение** и **разность** множеств **A** и **B**.

Теоретическое занятие

Тема: Основные понятия теории графов

Форма контроля: опрос устный (фронтальный).

Задание: ответить на вопросы.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";
- 2) обучающиеся устно отвечают на вопросы;
- 3) время, отводимое на опрос - 10 мин;
- 4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Вопросы:

1. Основные понятия теории графов (определение графа, его изображение, элементы графа, ориентированные и неориентированные графы, подграф, симметричный граф...)
2. Рассмотрены примеры приложений теории графов.
3. Степень вершины графа.
4. Маршруты, цепи, циклы графа.
5. Все об ориентированных графах.
6. Изоморфизм графов.
7. Плоские графы.
8. Операции над графами.
9. Способы задания графов.
10. Эйлеровы графы.
11. Гамильтоновы графы.

Теоретическое занятие

Тема: Комплексные числа

Форма контроля: работа письменная (по вариантам).

Задание: выполнить задания согласно своему варианту.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";
- 2) обучающиеся выполняют задания в рабочих тетрадях;
- 3) время, отводимое на выполнение - 20 мин;
- 4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Варианты заданий:

Вариант 1

1. Даны два комплексных числа $Z_1 = (10 + 2i)$ и $Z_2 = (1 - 6i)$. Найдите их сумму, разность и произведение.
2. Проверьте правильность следующих утверждений:
 - а) Сумма и разность чисто мнимых чисел есть чисто мнимое число.
Для проверки возьмите числа: $Z_1 = 2i$, $Z_2 = -3i$
 - б) Произведение двух чисто мнимых чисел равно действительному числу.
Для проверки возьмите числа: $Z_1 = -5i$, $Z_2 = 3i$
 - в) Квадрат чисто мнимого числа равен действительному отрицательному числу.
Для проверки возьмите числа: $Z_1 = 10i$
 - г) Произведение чисто мнимого числа на действительное равно чисто мнимому числу.
Для проверки возьмите числа: $Z_1 = 7i$, $Z_2 = 3$

Вариант 2

Даны два комплексных числа $Z_1 = (12 + 2i)$ и $Z_2 = (3 - 4i)$. Найдите их сумму, разность и произведение.

2. Проверьте правильность следующих утверждений:

а) Сумма и разность чисто мнимых чисел есть чисто мнимое число.

Для проверки возьмите числа: $Z_1=2i$, $Z_2=-3i$

б) Произведение двух чисто мнимых чисел равно действительному числу.

Для проверки возьмите числа: $Z_1=-5i$, $Z_2=3i$

в) Квадрат чисто мнимого числа равен действительному отрицательному числу.

Для проверки возьмите числа: $Z_1=10i$

г) Произведение чисто мнимого числа на действительное равно чисто мнимому числу.

Для проверки возьмите числа: $Z_1=7i$, $Z_2=3$

Теоретическое занятие

Тема: Комплексные числа

Форма контроля: работа письменная (по вариантам).

Задание: выполнить задания согласно своему варианту.

Условия выполнения задания:

1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";

2) обучающиеся выполняют задания в рабочих тетрадях;

3) время, отводимое на выполнение - 20 мин;

4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Варианты заданий:

1 вариант	2 вариант	1 вариант	2 вариант	1 вариант	2 вариант
«3»		«4»		«5»	
1. Решите уравнение		1.Вычислите			
$x^2 - 2x + 5 = 0$	$x^2 - 4x + 8 = 0$	$i + \frac{1-i}{1+i}$	$i - \frac{1-i}{1+i}$	$i^{13} + \frac{6i+1}{1-7i}$	$\frac{(1+i)(2+i)}{2+i^{17}}$
2. Найдите модуль и аргумент комплексного числа		2. Вычислите $\sqrt[3]{z}$ и изобразите на комплексной плоскости			
$Z=1-i$	$Z=-1+i$	$z = -\sqrt{3} + i$	$z = -1 + \sqrt{3}i$	$z = \frac{6i}{4-4i}$	$z = \frac{6i}{-4+4i}$

Практическое занятие

Тема: Комплексные числа и действия над ними.

Форма контроля: выполнение практической работы.

Задание: решить задачи.

Условия выполнения задания:

1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";

2) работа выполняется в рабочих тетрадях;

3) время, отводимое на выполнение задания - 2 часа;

4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7.

Тема: «Комплексные числа и действия над ним».

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Повторить знания по теме: «Действия над комплексными числами в показательной форме».

2. Организовать деятельность обучающихся по переводу своих знаний от усвоения отдельных фактов и понятий к их обобщению в целостную систему знаний.

3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно - технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Справочный материал:

1. Показательная и тригонометрические функции в области комплексных чисел связаны между собой формулой

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

которая носит название формулы Эйлера.

Пусть комплексное число z в тригонометрической форме имеет вид $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. На основании формулы Эйлера выражение в скобках можно заменить на показательное выражение. В результате получим

$$z = r e^{i\varphi}.$$

Эта запись называется показательной формой комплексного числа.

Так же, как и в тригонометрической форме, здесь $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

2. Действия над комплексными числами в показательной форме:

2.1. Произведением двух комплексных чисел называется такое комплексное число, модуль которого равен произведению модулей сомножителей, а аргумент – сумме аргументов сомножителей.

Это определение совершенно очевидно, если использовать показательную форму комплексного числа:

$$z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}, \quad z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \cdot \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1 \cdot \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

2.2. Модуль частного равен частному модулей делимого и делителя, а аргумент частного равен разности аргументов делимого и делителя.

$$z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}, \quad z_1 \div z_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$z = -1 + i$$

Пример 1: Пусть $z = -1 + i$. Напишите показательную форму числа z .

Решение. Находим модуль и аргумент числа:

$$r = |z| = \sqrt{2}, \quad \varphi = \arg z = \frac{3\pi}{4}.$$

Следовательно, показательная форма комплексного числа такова:

$$z = \sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4}i}.$$

Пример 2: Комплексное число записано в показательной форме

$$z = 2e^{\frac{\pi}{6}i}.$$

Найдите его алгебраическую форму.

Решение. По формуле Эйлера

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} + i.$$

$$z = \sqrt{3} + i$$

Итак, алгебраическая форма числа:

Содержание работы:

1. Представьте в алгебраической и тригонометрической формах числа:

- 1) $3e^{i(2\pi/3)}$;
- 2) $4e^{-i(\pi/4)}$;
- 3) e^i ;
- 4) $e^{0.1}$;
- 5) $2e^{i(\pi/2)}$.

2. Выполните действия. Результат запишите в показательной, тригонометрической и алгебраической формах:

- 1) $2e^{i(7\pi/18)} \cdot 3e^{i(11\pi/18)}$;
- 2) $e^{i(\pi/6)} \cdot 4e^{i(\pi/12)}$;
- 3) $6e^i : (3e^{-i})$.

3. Представив числа $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ и $z_2 = \sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2$ в показательной форме, вычислите:

- 1) $z_1 \cdot z_2$;
- 2) z_1/z_2 ;
- 3) z_2/z_1 .

4. Выполните действия, используя показательную формулу комплексного числа:

$$\frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}$$

1. Представьте в алгебраической и тригонометрической формах числа:

- 1) $5e^{-i(\pi/2)}$;
- 2) $\sqrt{2}e^{i\pi}$;
- 3) $3e^{i2\pi}$;
- 4) $6e^{1.5i}$;
- 5) $14e^{-i(17\pi/90)}$.

2. Выполните действия. Результат запишите в показательной, тригонометрической и алгебраической формах:

- 1) $4e^{i(5\pi/9)} \cdot (\sqrt{2}e^{i(\pi/9)})$;
- 2) $(\sqrt{2}e^{i(2\pi/9)})^3$;
- 3) $(2e^{i(7\pi/9)})^{10}$.

3. Представив числа $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ и $z_2 = \sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2$ в показательной форме, вычислите:

- 1) z_1^6 ;
- 2) z_2^4 ;
- 3) z_1^{-3} .

4. Выполните действия, используя показательную формулу комплексного числа:

$$\frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$$

Теоретическое занятие

Тема: Вероятность. Теорема сложения вероятностей

Форма контроля: опрос устный (фронтальный).

Задание: ответить на вопросы.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";
- 2) обучающиеся устно отвечают на вопросы;
- 3) время, отводимое на опрос - 10 мин;
- 4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Вопросы:

1. Понятия события и вероятности события.
2. Достоверные и невозможные события.
3. Классическое определение вероятности.
4. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
5. Решение практических задач на определение вероятности события.

Практическое занятие

Тема: Решение практических задач на определение вероятности события.

Форма контроля: выполнение практической работы.

Задание: решить задачи.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";
- 2) работа выполняется в рабочих тетрадях;
- 3) время, отводимое на выполнение задания - 2 часа;
- 4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №8.

Тема: «Решение практических задач на определение вероятности события».

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Элементы комбинаторики и теории вероятностей».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.

Содержание работы:

Вариант 1.

1. Сколькими способами можно составить расписание одного учебного дня из 5 различных уроков?
1) 30 2) 100 3) 120 4) 5
2. В 9«Б» классе 32 учащихся. Сколькими способами можно сформировать команду из 4 человек для участия в математической олимпиаде?
1) 128 2) 35960 3) 36 4) 46788
3. Сколько существует различных двузначных чисел, в записи которых можно использовать цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры в числе должны быть различными?
1) 10 2) 60 3) 20 4) 30
4. Вычислить: $6! - 5!$
1) 600 2) 300 3) 1 4) 1000
5. В ящике находится 45 шариков, из которых 17 белых. Потеряли 2 не белых шарика. Какова вероятность того, что выбранный наугад шарик будет белым?
1) $\frac{17}{45}$ 2) $\frac{17}{43}$ 3) $\frac{43}{45}$ 4) $\frac{17}{45}$
6. Бросают три монеты. Какова вероятность того, что выпадут два орла и одна решка?

- 1) $\frac{3}{2}$ 2) 0,5 3) 0,125 4) $\frac{1}{3}$
7. В денежно-вещевой лотерее на 1000000 билетов разыгрывается 1200 вещевых и 800 денежных выигрышей. Какова вероятность выигрыша?
- 1) 0,02 2) 0,00012 3) 0,0008 4) 0,002

Вариант 2.

1. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?
- 1) 100 2) 30 3) 5 4) 120
2. Имеются помидоры, огурцы, лук. Сколько различных салатов можно приготовить, если в каждый салат должно входить 2 различных вида овощей?
- 1) 3 2) 6 3) 2 4) 1
3. Сколькими способами из 9 учебных предметов можно составить расписание учебного дня из 6 различных уроков.
- 1) 10000 2) 60480 3) 56 4) 39450
4. Вычислите: $\frac{8!}{6!}$
- 1) 2 2) 56 3) 30 4) $\frac{4}{3}$
5. В игральной колоде 36 карт. Наугад выбирается одна карта. Какова вероятность, что эта карта – туз?
- 1) $\frac{1}{36}$ 2) $\frac{1}{35}$ 3) $\frac{1}{9}$ 4) $\frac{36}{4}$
6. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что выпадут две четные цифры?
- 1) 0,25 2) $\frac{2}{6}$ 3) 0,5 4) 0,125
7. В корзине лежат грибы, среди которых 10% белых и 40% рыжих. Какова вероятность того, что выбранный гриб белый или рыжий?
- 1) 0,5 2) 0,4 3) 0,04 4) 0,8

Вариант 3.

1. Сколькими способами можно расставить 4 различные книги на книжной полке?
- 1) 24 2) 4 3) 16 4) 20
2. Сколько диагоналей имеет выпуклый семиугольник?
- 1) 30 2) 21 3) 14 4) 7
3. В футбольной команде 11 человек. Необходимо выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?
- 1) 22 2) 11 3) 150 4) 110
4. Сократите дробь: $\frac{n!}{(n+1)!}$
- 1) 1 2) $\frac{n}{n+1}$ 3) $\frac{1}{n+1}$ 4) $\frac{2}{n+1}$
5. Какова вероятность, что при одном броске игрального кубика выпадает число очков, равное четному числу?

- 1) $\frac{1}{6}$ 2) 0,5 3) $\frac{1}{3}$ 4) 0,25

6. Катя и Аня пишут диктант. Вероятность того, что Катя допустит ошибку, составляет 60%, а вероятность ошибки у Ани составляет 40%. Найти вероятность того, что обе девочки напишут диктант без ошибок.

- 1) 0,25 2) 0,4 3) 0,48 4) 0,2

7. Завод выпускает 15% продукции высшего сорта, 25% - первого сорта, 40% - второго сорта, а все остальное – брак. Найти вероятность того, что выбранное изделие не будет бракованным.

- 1) 0,8 2) 0,1 3) 0,015 4) 0,35

Вариант 4

1. Сколькими способами могут встать в очередь в билетную кассу 5 человек?

- 1) 5 2) 120 3) 25 4) 100

2. Сколькими способами из 25 учеников класса можно выбрать четырех для участия в праздничном концерте?

- 1) 12650 2) 100 3) 75 4) 10000

3. Сколько существует трехзначных чисел, все цифры. Которых нечетные и различные.

- 1) 120 2) 30 3) 50 4) 60

4. Упростите выражение: $\frac{(n+1)!}{(n-2)!}$

- 1) 0,5 2) $\frac{n+1}{n-2}$ 3) $n^3 - n$ 4) $n^2 - 1$

5. Какова вероятность, что ребенок родится 7 числа?

- 1) $\frac{7}{30}$ 2) $\frac{7}{12}$ 3) $\frac{7}{31}$ 4) $\frac{7}{365}$

6. Каждый из трех стрелков стреляет в мишень по одному разу, причем попадания первого стрелка составляет 90%, второго – 80%, третьего – 70%. Найдите вероятность того, что все три стрелка попадут в мишень?

- 1) 0,504 2) 0,006 3) 0,5 4) 0,3

7. Из 30 учеников спорткласса, 11 занимается футболом, 6 – волейболом, 8 – бегом, а остальные прыжками в длину. Какова вероятность того, что один произвольно выбранный ученик класса занимается игровым видом спорта?

- 1) $\frac{17}{30}$ 2) 0,5 3) $\frac{28}{30}$ 4) $\frac{14}{30}$

Вариант 5

1. Сколько существует вариантов рассаживания 6 гостей на 6 стульях?

- 1) 36 2) 180 3) 720 4) 300

2. Аня решила сварить компот из фруктов 2-ух видов. Сколько различных вариантов (по сочетанию фруктов) компотов может сварить Аня, если у нее имеется 7 видов фруктов?

- 1) 14 2) 10 3) 21 4) 30
3. Сколько существует обыкновенных дробей, числитель и знаменатель которых – простые различные числа не больше 20?
- 1) 80 2) 56 3) 20 4) 60
4. Упростите выражение: $\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}$.
- 1) $\frac{(n+1)!}{(n+2)!}$ 2) $\frac{n+1}{(n+2)!}$ 3) $\frac{1}{(n+2)!(n+1)!}$ 4) 0
5. Какова вероятность того, что выбранное двузначное число делится на 12?
- 1) $\frac{12}{90}$ 2) $\frac{4}{45}$ 3) $\frac{12}{45}$ 4) $\frac{90}{8}$
6. Николай и Леонид выполняют контрольную работу. Вероятность ошибки при вычислениях у Николая составляет 70%, а у Леонида – 30%. Найдите вероятность того, что Леонид допустит ошибку, а Николай нет.
- 1) 0,21 2) 0,49 3) 0,5 4) 0,09
7. Музыкальная школа проводит набор учащихся. Вероятность быть не зачисленным во время проверки музыкального слуха составляет 40%, а чувство ритма – 10%. Какова вероятность положительного тестирования?
- 1) 0,5 2) 0,4 3) 0,6 4) 0,04

Вариант 6

1. Сколькими способами можно с помощью букв К, А, В, С обозначить вершины четырехугольника?
- 1) 12 2) 20 3) 24 4) 4
2. На полке стоят 12 книг. Наде надо взять 5 книг. Сколькими способами она может это сделать?
- 1) 792 2) 17 3) 60 4) 300
3. В 12 – ти этажном доме на 1 этаже в лифт садятся 9 человек. Известно, что они выйдут группами в 2, 3 и 4 человека на разных этажах. Сколькими способами они могут это сделать, если на 2 – Ом этаже лифт не останавливается?
- 1) 100 2) 720 3) 300 4) 60
4. Упростите выражение: $\frac{n!}{(n+1)!} - \frac{(n-1)!}{n!}$.
- 1) $\frac{-1}{(n+1)!n!}$ 2) $\frac{n!-(n-1)!}{(n+1)!n!}$ 3) $\frac{-1}{n^2+1}$ 4) 0
5. В ящике лежат карточки с буквами, из которых можно составить слово «электрификация». Какова вероятность того, что наугад выбранная буква окажется буквой к?
- 1) $\frac{1}{7}$ 2) 7 3) $\frac{1}{14}$ 4) $\frac{2}{33}$
6. Каждый из трех стрелков стреляет в мишень по одному разу, причем вероятность попадания 1 стрелка составляет 80%, второго – 70%, третьего – 60%. Найдите вероятность того, что двое из трех стрелков попадет в мишень.
- 1) 0,336 2) 0,452 3) 0,224 4) 0,144
7. В корзине лежат фрукты, среди которых 30% бананов и 60% яблок. Какова вероятность того, что выбранный наугад фрукт будет бананом или яблоком?

- 1) 0,9 2) 0,5 3) 0,34 4) 0,18

Вариант 7

1. В корзине лежит: яблоко, апельсин, грейпфрут и манго. Сколькими способами 4 девочки могут поделить фрукты? (одной девочке один фрукт)

1) 4 2) 24 3) 20 4) 16
2. На плоскости расположены 25 точек так, что три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

1) 75 2) 100 3) 2300 4) 3000
3. В теннисном турнире участвуют 10 спортсменов. Сколькими способами теннисисты могут завоевать золото, серебро и бронзу?

1) 600 2) 100 3) 300 4) 720
4. Вычислите: $\frac{P_4}{P_8} \cdot A_8^4$

1) 1 2) 13 3) 12 4) 32
5. Случайным образом открывается учебник литературы и находится второе слово на странице. Какова вероятность того, что это слово начинается на букву л?

1) $\frac{1}{33}$ 2) $\frac{1}{31}$ 3) $\frac{10}{33}$ 4) $\frac{10}{31}$
6. Вступительный экзамен в лицей состоит из трех туров. Вероятность отсева в 1 туре составляет 60%, во втором - 40%, в третьем - 30%. Какова вероятность поступления в лицей?

1) 0,24 2) 0,12 3) 0,18 4) 0,072
7. В коробке лежат 4 голубых, 3 красных, 9 зеленых, 6 желтых шариков. Какова вероятность того, что выбранный шарик будет не зеленым?

1) $\frac{13}{22}$ 2) 0,5 3) $\frac{10}{22}$ 4) $\frac{15}{22}$

Вариант 8

1. Разложите на простые множители число 30. Сколькими способами можно записать в виде произведения простых множителей число 30?

1) 6 2) 12 3) 30 4) 3
2. Сколько можно составить из простых делителей числа 2730 составных чисел, имеющих только два простых делителя?

1) 300 2) 10 3) 150 4) 15
3. На плоскости даны 8 точек, причем три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует векторов с началом и концом в любых двух из данных точек?

1) 18 2) 28 3) 64 4) 56
4. Вычислите: $C_8^6 \cdot P_2$

1) 48 2) 94 3) 56 4) 96
5. Катя забыла последнюю цифру семизначного номера телефона знакомой девочки. Какова вероятность того, что Катя набрала телефон знакомой девочки?

1) 0,5 2) 0,1 3) $\frac{1}{7}$ 4) 0,
6. Три выключателя соединены параллельно. Вероятность выхода из строя первого выключателя равна 3%, второго - 4%, третьего - 1%. Какова вероятность того, что цепь будет разомкнута?

1) 12 2) 0,5 3) 0,12 4) $12 \cdot 10^{-6}$

7. На экзамене по математике для усиления контроля класс из 35 учащихся рассадили в три аудитории. В первую посадили 10 человек, во вторую – 12, в третью – остальных. Какова вероятность того, что два друга окажутся в одной аудитории?

- 1) $\frac{189}{595}$ 2) 0,5 3) $\frac{157}{595}$ 4) $\frac{188}{595}$

Вариант 9

1. Сколькими способами можно закрасить 6 клеток так, чтобы 2 клетки были закрашены красным цветом, а 4 другие – белым, черным, зеленым и синим? (каждый своим цветом).
- 1) 120 2) 360 3) 180 4) 500
2. Сколькими способами можно группу из 17 учащихся разделить на 2 группы так, чтобы в одной группе было 5 человек, а в другой – 12 человек.
- 1) 60 2) 85 3) 6188 4) 6000
3. На плоскости даны 10 точек, причем три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует лучей с началом в любой из данных точек, проходящих через любую другую из данных точек?
- 1) 720 2) 360 3) 500 4) 100
4. Решите уравнение: $A^2_{x+1} = 20$
- 1) 4; -5 2) 4 3) -5 4) 9
5. В лотерее 1000 билетов, среди которых 20 выигрышных. Приобретается один билет. Какова вероятность того, что этот билет невыигрышный?
- 1) $\frac{1}{50}$ 2) 0,2 3) $\frac{49}{50}$ 4) 0,5
6. Отдел технического контроля типографии «Фаворит» проверил книжную продукцию на наличие брака. Вероятность того, что книга не бракованная равна 0,9. Найти вероятность того, что из двух проверенных книг только одна бракованная.
- 1) 0,18 2) 0,81 3) 0,5 4) 0,01
7. 25 выпускников мединститута направили работать в три села. В Хацепеевку попало 7 молодых специалистов, в Хачапуровку – 12, В Красные Огурейцы – остальные. Какова вероятность того, что три друга будут сеять разумное, доброе, вечное в одном селе?
- 1) $\frac{17}{25}$ 2) $\frac{17}{50}$ 3) 0,5 4) 0,35

Вариант 10

1. Сколькими способами можно закрасить 6 клеток таким образом, чтобы 3 клетки были красными, а 3 оставшиеся были закрашены (каждая своим цветом) белым, черным и зеленым?
- 1) 180 2) 300 3) 120 4) 240
2. Сколькими способами из 10 игроков волейбольной команды можно выбрать стартовую шестерку?
- 1) 210 2) 60 3) 30 4) 240
3. На соревнованиях по легкой атлетике приехала команда из 12 спортсменов. Сколькими способами тренер может определить, кто из них побежит в эстафете 4 по 100 на первом, втором, третьем и четвертом этапах?
- 1) 1200 2) 88000 3) 11880 4) 3000
4. Решите уравнение: $C_x^{x-1} \cdot (x-1) = 30$
- 1) 6 2) -5; 6 3) -5 4) 30
5. На карточках выписаны числа от 1 до 10 (на одной карточке – одно число). Карточки положили на стол и перемешали. Какова вероятность того, что на вытащенной карточке окажется число 3?

- 1) $\frac{3}{10}$ 2) 0,1 3) $\frac{1}{3}$ 4) 0,4

6. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие, окажется высшего сорта равна 0,8. Найдите вероятность того, что из трех проверенных изделий только два высшего сорта.

- 1) 0,384 2) 0,5 3) 0,3 4) 0,4

7. На соревнованиях по стрельбе стрелок попадает в десятку с вероятностью 0,04, в девятку 0,1, в восьмерку – 0,2. Какова вероятность того, что одним выстрелом стрелок наберет не менее восьми очков.

- 1) 0,5 2) 0,35 3) 0,04 4) 0,34

Ответы к тестам

Вариант 1

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	3	2	4	1	2	3	4

Вариант 2

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	4	1	2	2	3	1	1

Вариант 3

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	1	2	4	3	2	4	1

Вариант 4

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	2	1	4	3	2	1	1

Вариант 5

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	3	3	2	2	2	4	1

Вариант 6

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	3	1	2	3	1	2	1

Вариант 7

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	2	3	4	1	2	3	1

Вариант 8

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	1	2	4	3	2	4	1

Вариант 9

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
№ ответа	2	3	1	2	3	1	2

Вариант 10

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
-----------	---	---	---	---	---	---	---

№ ответа	3	1	3	1	2	1	4
----------	---	---	---	---	---	---	---

Теоретическое занятие

Тема: Случайная величина, ее функция распределения.

Форма контроля: опрос устный (фронтальный).

Задание: ответить на вопросы.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";
- 2) обучающиеся устно отвечают на вопросы;
- 3) время, отводимое на опрос - 10 мин;
- 4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Вопросы:

Вопрос 1

Случайная величина, принимающая различные значения, которые можно записать в виде конечной или бесконечной последовательности, называется:

Варианты ответов

- Непрерывной случайной величиной
- Дискретной случайной величиной
- Постоянной величиной
- Переменной величиной

Вопрос 2

. От аэровокзала отправились три автобуса - экспресса к трапам самолета. Вероятность своевременного прибытия автобусов в аэропорт одинакова и равна 0,9. Случайная величина X - число своевременно прибывших автобусов распределена по

Варианты ответов

- Геометрическому закону
- Гипергеометрическому закону
- Нормальному закону
- Биномиальному закону

Вопрос 3

Дискретная случайная величина задана законом распределения вероятностей. Найдите ее функцию распределения.

X	1	4	6
p	0,25	0,20	0,55

Варианты ответов

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1, \\ 0,25 & \text{при } 1 < x \leq 4, \\ 0,45 & \text{при } 4 < x \leq 6, \\ 1 & \text{при } x > 6; \end{cases}$$

•

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1, \\ 0,25 & \text{при } 1 < x \leq 4, \\ 0,45 & \text{при } 4 < x \leq 6, \\ 0 & \text{при } x > 6; \end{cases}$$

•

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1, \\ 0,25 & \text{при } 1 < x \leq 4, \\ 0,20 & \text{при } 4 < x \leq 6, \\ 1 & \text{при } x > 6; \end{cases}$$

•

$$F(x) = \begin{cases} 0,25 & \text{при } x \leq 1, \\ 0,45 & \text{при } 1 < x \leq 4, \\ 1 & \text{при } 4 < x \leq 6, \\ 0 & \text{при } x > 6. \end{cases}$$

•

Вопрос 4

4. Мода случайной величины

x_i	1	2	3	4
p_i	0,2	0,4	0,1	0,3

равна

Вопрос 5

Медиана случайной величины

x_i	1	2	3	4
p_i	0,2	0,1	0,4	0,3

равна

Вопрос 6

К случайной величине X прибавили число 4. Как от этого изменится ее математическое ожидание?

Варианты ответов

- Увеличится на 4
- Увеличится на 16
- Не изменится
- Увеличится в 4 раза

Вопрос 7

Случайная величина X распределена равномерно на интервале (2; 6). Найти вероятность P попадания случайной величины X в интервал (3; 5).

Вопрос 8

Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью

$$f(x)=132\pi \cdot e^{-(x-1)^2/18}$$

Найдите дисперсию случайной величины X.

Практическое занятие

Тема: Решение задач с реальными дискретными случайными величинами.

Форма контроля: выполнение практической работы.

Задание: решить задачи.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";
- 2) работа выполняется в рабочих тетрадях;
- 3) время, отводимое на выполнение задания - 2 часа;
- 4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 9

Тема: «Решение задач с реальными дискретными случайными величинами».

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Элементы комбинаторики и теории вероятностей».
3. Закрепить и систематизировать знания по теме.
4. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.

Справочный материал:

Случайная величина – величина, численное значение которой может меняться в зависимости от результата стохастического эксперимента.

Дискретной назовём случайную величину, возможные значения которой образуют конечное множество.

Законом распределения дискретной случайной величины называется правило, по которому каждому возможному значению x_i ставится в соответствие вероятность p_i , с которой случайная

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

величина может принять это значение, причём

Пример. Абитуриент сдаёт два вступительных экзамена: по математике и физике. Составить закон распределения случайной величины x , числа полученных пятёрок, если вероятность получения пятёрки по математике равна 0,8, а по физике – 0,6.

К важнейшим числовым характеристикам случайной величины относятся математическое ожидание и дисперсия.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины x называется произведение всех её возможных значений на их вероятности:

$$M(x) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Свойства математического ожидания:

- математическое ожидание постоянной равно самой постоянной:

$$M(C)=C$$

- постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(Cx)=C \cdot M(x)$$

- математическое ожидание суммы случайных величины равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n M(x_i)$$

- математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:

$$M(x_1 * x_2 * \dots * x_n) = M(x_1) * M(x_2) * \dots * M(x_n)$$

Дисперсией случайной величины x называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания:

$$D(x) = M((x - M(x))^2) \text{ или } D(x) = M(x^2) - (M(x))^2$$

Среднеквадратическое отклонение: $\sigma = \sqrt{D(x)}$

Свойства дисперсии:

- дисперсия постоянной равно нулю:

$$D(C) = 0$$

- постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат:

$$D(Cx) = C^2 * D(x)$$

- дисперсия суммы (разности) случайных величины равно сумме дисперсий слагаемых:

$$D\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n D(x_i)$$

Свойства среднеквадратического отклонения:

$$\sigma(C) = 0$$

$$\sigma(Cx) = |C| * \sigma(x)$$

Пример Закон распределения случайной величины задан таблично. Найти $p(x < 2)$, $p(x > 4)$, $p(2 \leq x \leq 4)$, математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Пример Фермер считает, что, принимая во внимание различные потери и колебания цен, он сможет выручить не более 60 центов за десяток яиц и потерять не более 20-ти центов за десяток и что вероятности возможных выигрышей и потерь таковы:

цена за 10 яиц	0,6	0,4	0,2	0	-0,2
P	0,2	0,5	0,2	0,06	0,04

Как оценить ожидаемую прибыль от продажи десятка яиц; от ожидаемых им в этом году 100000 яиц?

Задание . Составить закон распределения случайной величины X . Найти числовые характеристики случайной величины x (x – выигрыш владельца одного лотерейного билета).

- В лотерее разыгрываются N билетов;
- m из них выигрывают по A рублей;
- k из них выигрывают по B рублей;
- p из них выигрывают по C рублей.

Задание 3. Найти числовые характеристики случайной величины “ x ”. Варианты:

Контроль знаний обучающихся:

- проверить практическую работу;

Теоретическое занятие

Тема: Математическое ожидание и дисперсия случайной величины

Форма контроля: работа письменная (по вариантам).

Задание: выполнить задания согласно своему варианту.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете "Математика";
- 2) обучающиеся выполняют задания в рабочих тетрадях;
- 3) время, отводимое на выполнение - 15 мин;
- 4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Задания:**Пример 1.** Дискретная случайная величина имеет ряд распределения

X_i	6	8	10	18	21
P_i	0.1	0.2	0.1	0.3	0.4

Найти математическое ожидание и дисперсию.

Пример 2. Дискретная случайная величина имеет ряд распределения.

x	3	9	12	17	23
p	0,124	0,243	0,283	0,198	0,467

Найти математическое ожидание и дисперсию.

Пример 3.Задан закон распределения дискретной случайной величины X .

x	0,3	0,4	0,7	0,9	0,2
p	0,1	0,3	p	0,4	0,1

Найти неизвестную вероятность p , математическое ожидание M и дисперсию, построить многоугольник распределения.***Пример 4.**Найти p_2 и p_4 , если p_4 в 6 раз больше p_2 , если задана дискретная случайная величина X и имеется закон распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины.

x	2	6	7	9	3
p	0,12	p_2	0,25	p_4	0,41

***Пример 5.**

Выигрыши, которые приходятся на один билет в каждой из двух лотерей, имеют следующие законы распределения:

x	12	25	31	17
p	0,9	0,06	0,03	0,01
y	12	25	31	17
p	0,85	0,12	0,02	0,01

Пример 6. Находить моду, медиану, среднее арифметическое выборки, размах выборки.*

1. Найти моду: 1,3,5,1,4,3,2
2. Найти медиану выборки 4,1,8,9,13,10
3. Найти среднее арифметическое значение выборки и размах выборки 24, -5, 13, -8
4. Какой из лотерей вы отдадите предпочтение? Найти математическое ожидание и дисперсию.

РУБЕЖНЫЙ КОНТРОЛЬ (ТЕСТИРОВАНИЕ)

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя третьего порядка называется определитель второго порядка, получающийся из данного определителя

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. вычеркиванием любой строки и столбца, в котором стоит данный элемент
- B. вычеркиванием строки, в которой стоит данный элемент и любого столбца
- C. вычеркиванием любой строки и любого столбца
- D. вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент

Для элемента a_{ij} определителя третьего порядка алгебраическое дополнение этого элемента

$A_{ij} =$

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$
- B. $(-1)^{i-j} \cdot M_{ij}$
- C. $(-1)^i \cdot M_{ij}$
- D. $(-1)^j \cdot M_{ij}$

3. Определитель $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ равен

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. -2
- B. 22
- C. -22
- D. 2

4. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ равен

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. 8
- B. -8
- C. 6
- D. -6

5. Определитель не изменится, если

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. переставить местами две строки
- B. переставить местами два столбца
- C. строки определителя заменить столбцами, а столбцы – соответствующими строками
- D. поделить элементы какой-нибудь строки (столбца) на их общий делитель

6. Определитель треугольного вида равен

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. произведению элементов главной диагонали
- B. сумме элементов главной диагонали
- C. произведению элементов побочной диагонали
- D. сумме элементов побочной диагонали

7. Матрица называется квадратной, если

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. число ее строк меньше числа столбцов
- B. число ее строк равно числу столбцов
- C. число строк больше числа столбцов
- D. все элементы главной диагонали нули

8. Если у диагональной матрицы все диагональные элементы равны единице, то матрица называется

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. нулевой
- B. единичной
- C. диагональной
- D. вырожденной

9. Матрица любого размера, все элементы которой равны нулю, называется

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. нулевой
- B. единичной
- C. диагональной
- D. вырожденной

10. Сумма матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ равна

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
- B. $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 4 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
- C. $\begin{pmatrix} 4 & -7 & 11 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 11 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

11. Произведение матриц AB , где $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ равно

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

A. $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 7 & 3 \\ 8 & 11 & 14 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 16 & 10 & 4 \\ 13 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 6 & 7 & 4 \\ 8 & 11 & 14 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 16 & 10 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

12. Система уравнений, имеющая хотя бы одно решение, называется

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. совместной
- B. несовместной
- C. определенной
- D. неопределенной

13. Совместная система уравнений называется определенной, если она имеет

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. более одного решения
- B. единственное решение
- C. хотя бы два решения
- D. не менее одного решения

14. Определитель системы линейных уравнений состоит

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. из всех ее коэффициентов
- B. из коэффициентов при переменных
- C. из свободных коэффициентов
- D. из переменных

15. Решением системы уравнений
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1^3 + x_2^2 + 2x_3^3 = 8 \end{cases}$$
 является

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. (1,2,4)
- B. (2,1,4)
- C. (4,2,1)
- D. (4,1,2)

16. В матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ главную диагональ образуют числа

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. 2 3 1
- B. 2 3 2
- C. 2 3 0
- D. 1 3 1

17. Вычислите определитель четвертого порядка по строке или столбцу:

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

$$\begin{vmatrix} 7 & -5 & 7 & -7 \\ 4 & 0 & 4 & -1 \\ -9 & 12 & -9 & 15 \\ 14 & -10 & 14 & -14 \end{vmatrix}$$

18. Решите систему уравнений любым из способов: по правилу Крамера, методом Гаусса, матричным способом

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

$$\begin{cases} X + Y - 2Z = -7; \\ 2X + 3Y - Z = -4; \\ 3X - 2Y - 2Z = 5. \end{cases}$$

19. Две матрицы называются равными, если

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. они одинаковых размеров
- B. их элементы равны
- C. они одинаковых размеров и их элементы равны
- D. число строк одной матрицы равно числу столбцов второй

20. Действия сложения и вычитания определяются для матриц

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. любых
- B. одного размера
- C. строчных и квадратных

D. квадратных, разного порядка

21. Определитель – это

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. Таблица
- B. Число
- C. Правило
- D. Матрица

22. Определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -9 & b \end{vmatrix}$ равен нулю при b равном

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. $b=1/6$
- B. $b=6$
- C. $b=-1/6$
- D. $b=-6$

23. Определитель матрицы $A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ равен

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. -12
- B. 12
- C. 1
- D. 0

24. Для данных комплексных чисел найдите сумму $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 - 2i$

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. $5 + i$
- B. $5 - 2i$
- C. $3 + i$
- D. $3 - i$

25. Частное $\frac{z_1}{z_2}$ комплексных чисел $z_1 = 3 + i$ и $z_2 = -1 + i$ равно

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. $-1 - 2i$
- B. $-2 - 2i$
- C. $-2 - 4i$
- D. $-3 - i$

Критерии оценивания:

Отметка	Объем выполнения работы в %
«5» (отлично)	90 – 100
«4» (хорошо)	70 – 89
«3» (удовлетворительно)	50 – 69
«2» (неудовлетворительно)	менее 50

[illegible]

МЕЖСЕССИОННЫЙ КОНТРОЛЬ (ТЕСТИРОВАНИЕ)

1. Расстояние d между точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ определяется по формуле

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. $d = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 + (y_1 + y_2)^2}$
- B. $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- C. $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}$
- D. $d = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - (y_1 + y_2)^2}$

2. Векторы расположенные на одной прямой или на параллельных прямых, называются

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. компланарными
- B. сонаправленными
- C. равными
- D. коллинеарными

3. К линейным операциям над векторами относятся

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. вычисление скалярного произведения векторов
- B. вычисление смешанного произведения векторов
- C. сложение, вычитание и умножение вектора на число
- D. вычисление векторного произведения

Векторы, лежащие в одной плоскости или в параллельных плоскостях, называются

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. компланарными
- B. сонаправленными
- C. равными
- D. коллинеарными

5. Производная функции $y=3x^4$ равна

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. $12x$
- B. $4x^3$
- C. $12x^3$
- D. $3x^3$

6. Производная функции $y=5\sqrt{x^3}$ равна

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. $3\sqrt[5]{x^2}$
- B. $\frac{3}{\sqrt[5]{x^2}}$
- C. $5\sqrt[5]{x^2}$
- D. $\frac{5}{\sqrt[5]{x^2}}$

7. Производная функции $y = 4x^3 + 2x^2 + x - 5$ равна

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. $12x^2 + 4x + 1$
- B. $4x^2 + 2x - 5$
- C. $12x^3 + 4x^2 + 1$
- D. $8x^2 + 2x + 1$

8. Производная функции $y = (x^3 - 1)(x^2 + x + 1)$ равна

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. $3x^4 + 4x^3 - 2x - 1$
- B. $2x^4 + x^3 - 2x - 1$
- C. $5x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 1$
- D. $x^4 + x^3 + x^2 - x - 1$

9. Производная функции $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ равна

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. $\frac{4x}{(x^2 - 1)^2}$
- B. $\frac{4x^2}{(x^2 - 1)^2}$
- C. $\frac{4x}{(x^2 - 1)}$
- D. $\frac{4x}{(x^2 - 1)^2}$

10. Производная функции $y = (x^2 - 5x + 8)^6$ равна

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. $6(x^2 - 5x + 8)^5$
- B. $6(x^2 - 5x + 8)^5(2x - 5)$
- C. $(x^2 - 5x + 8)^5(2x - 5)$
- D. $6(x^2 - 5x + 8)^6(2x - 5)$

11. Производная функции $y = \sqrt{4 - x^2}$ равна

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- А. $\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$
В. $\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$
С. $\frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}$
D. $\frac{x}{2\sqrt{4-x^2}}$

12. Производная функции $y = 5 \ln \sqrt{2x}$ равна

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- А. $\frac{5}{\sqrt{2x}}$
В. $\frac{\sqrt{2x}}{5}$
С. $\frac{5}{2x}$
D. $\frac{5}{x}$

13. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} =$

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- А. 0
В. 1
С. 2
D. 3

14. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{3x + 5}{x - 5} =$

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- А. 15
В. 13
С. 17
D. 7

15. Вторая производная функции $y = x \ln x$ равна

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- А. $\frac{1}{x}$
В. $\ln x + 1$

- C. $\ln x$
D. $-\ln x$

16. Установите, какое из выражений соответствует определению производной

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$
B. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$
C. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}$
D. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{y}$

17. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 6x + 8}{x^3 + 8}$ равен

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

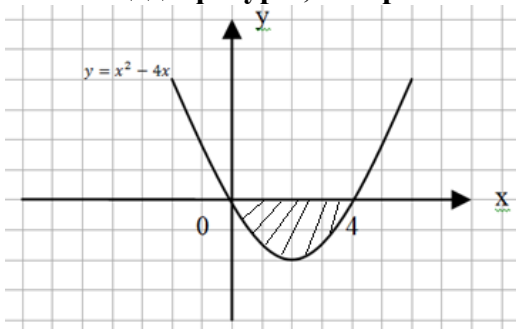
- A. 1
B. 6
C. $\frac{1}{6}$
D. $\frac{2}{3}$

18. Производная функция $y = \frac{e^x}{\cos x}$ имеет вид

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. $\frac{e^x(\cos x + \sin x)}{\cos^2 x}$
B. $\frac{e^x(\cos x - \sin x)}{\cos^2 x}$
C. $\frac{e^x(\cos x + \sin x)}{\cos x}$
D. $\frac{e^x(1 + \sin x)}{\cos x}$

19. Площадь фигуры, изображенной на рисунке, определяется интегралом



Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. $-\int_0^4 (x^2 - 4x) dx$
B. $\int_0^4 (x^2 - 4x) dx$
C. $\int_{-4}^0 (x^2 - 4x) dx$
D. $\int_0^4 (x - (x^2 - 4x)) dx$

20. Найдите производную от функции $y = 3 - (\sin^2 x + \cos^2 x)$

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

21. Вычислите $\int_0^2 (3x^2 - 4x + 5)dx$

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

22. Вычислите площадь фигуры, ограниченной осью Ох, прямыми $x = -1, x = 2$ и параболой $y = 9 - x^2$

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

23. Вычислить производную функции $y = 5 + 15x - x^3$ в точке $x = 0$

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

24. Вычислить производную функции $y = x^3 \ln x$ в точке $x = 1$

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. -3
- B. 3
- C. 1
- D. x^2

25. Вычислить производную функции $y = 4x^4\sqrt{x}$ в точке $x=16$

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. -5
- B. 16
- C. 5
- D. 10

Критерии оценивания:

Отметка	Объем выполнения работы в %
«5» (отлично)	90 – 100
«4» (хорошо)	70 – 89
«3» (удовлетворительно)	50 – 69
«2» (неудовлетворительно)	менее 50

Ключ ответов к тестовым заданиям

№ Вопроса	Правильный ответ	Проверяемые компетенции
1.	B	ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3
2.	D	ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3
3.	C	ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3
4.	A	ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3
5.	C	ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

[illegible]

ИТОГОВЫЙ КОНТРОЛЬ (ТЕСТИРОВАНИЕ)

1. Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя третьего порядка называется определитель второго порядка, получающийся из данного определителя

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. вычеркиванием любой строки и столбца, в котором стоит данный элемент
- B. вычеркиванием строки, в которой стоит данный элемент и любого столбца
- C. вычеркиванием любой строки и любого столбца
- D. вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент

Для элемента a_{ij} определителя третьего порядка алгебраическое дополнение этого элемента $A_{ij} =$

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$
- B. $(-1)^{i-j} \cdot M_{ij}$
- C. $(-1)^i \cdot M_{ij}$
- D. $(-1)^j \cdot M_{ij}$

3. Определитель $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ равен

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. -2
- B. 22
- C. -22
- D. 2

4. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ равен

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. 8
- B. -8
- C. 6
- D. -6

5. Определитель не изменится, если

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. переставить местами две строки
- B. переставить местами два столбца

- С. строки определителя заменить столбцами, а столбцы – соответствующими строками
- Д. поделить элементы какой-нибудь строки (столбца) на их общий делитель

6. Определитель треугольного вида равен

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- А. произведению элементов главной диагонали
- В. сумме элементов главной диагонали
- С. произведению элементов побочной диагонали
- Д. сумме элементов побочной диагонали

7. Матрица называется квадратной, если

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- А. число ее строк меньше числа столбцов
- В. число ее строк равно числу столбцов
- С. число строк больше числа столбцов
- Д. все элементы главной диагонали нули

8. Если у диагональной матрицы все диагональные элементы равны единице, то матрица называется

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- А. нулевой
- В. единичной
- С. диагональной
- Д. вырожденной

9. Матрица любого размера, все элементы которой равны нулю, называется

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- А. нулевой
- В. единичной
- С. диагональной
- Д. вырожденной

10. Сумма матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ равна

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- А. $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
- В. $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 4 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
- С. $\begin{pmatrix} 4 & -7 & 11 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 11 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

11. Произведение матриц AB , где $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ равно

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

A. $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 7 & 3 \\ 8 & 11 & 14 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 16 & 10 & 4 \\ 13 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 6 & 7 & 4 \\ 8 & 11 & 14 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 16 & 10 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

12. Система уравнений, имеющая хотя бы одно решение, называется

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. совместной
- B. несовместной
- C. определенной
- D. неопределенной

13. Совместная система уравнений называется определенной, если она имеет

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. более одного решения
- B. единственное решение
- C. хотя бы два решения
- D. не менее одного решения

14. Определитель системы линейных уравнений состоит

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. из всех ее коэффициентов
- B. из коэффициентов при переменных
- C. из свободных коэффициентов
- D. из переменных

15. Решением системы уравнений
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 = 8 \end{cases}$$
 является

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. (1,2,4)
- B. (2,1,4)
- C. (4,2,1)
- D. (4,1,2)

16. Расстояние d между точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ определяется по формуле

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. $d = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 + (y_1 + y_2)^2}$
- B. $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- C. $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}$
- D. $d = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - (y_1 + y_2)^2}$

17. Векторы расположенные на одной прямой или на параллельных прямых, называются

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. компланарными
- B. сонаправленными
- C. равными
- D. коллинеарными

18. К линейным операциям над векторами относятся

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. вычисление скалярного произведения векторов
- B. вычисление смешанного произведения векторов
- C. сложение, вычитание и умножение вектора на число
- D. вычисление векторного произведения

19. Векторы, лежащие в одной плоскости или в параллельных плоскостях, называются

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. компланарными
- B. сонаправленными
- C. равными
- D. коллинеарными

20. Производная функции $y=3x^4$ равна

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. $12x$
- B. $4x^3$
- C. $12x^3$
- D. $3x^3$

21. Производная функции $y = 5\sqrt[5]{x^3}$ равна

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. $3\sqrt[5]{x^2}$
- B. $\frac{3}{\sqrt[5]{x^2}}$
- C. $5\sqrt[5]{x^2}$
- D. $\frac{5}{\sqrt[5]{x^2}}$

22. Производная функции $y = 4x^3 + 2x^2 + x - 5$ равна

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. $12x^2 + 4x + 1$
- B. $4x^2 + 2x - 5$
- C. $12x^3 + 4x^2 + 1$
- D. $8x^2 + 2x + 1$

23. Производная функции $y = (x^3 - 1)(x^2 + x + 1)$ равна

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. $3x^4 + 4x^3 - 2x - 1$
- B. $2x^4 + x^3 - 2x - 1$
- C. $5x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 1$
- D. $x^4 + x^3 + x^2 - x - 1$

24. Производная функции $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ равна

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. $\frac{(x^2 - 1)^{4x}}{(x^2 - 1)^2}$
- B. $\frac{4x^2}{(x^2 - 1)^2}$
- C. $\frac{4x}{(x^2 - 1)}$
- D. $\frac{(x^2 - 1)^{4x}}{(x^2 - 1)^2}$

25. Производная функции $y = (x^2 - 5x + 8)^6$ равна

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. $6(x^2 - 5x + 8)^5$
- B. $6(x^2 - 5x + 8)^5(2x - 5)$

- C. $(x^2 - 5x + 8)^5 (2x - 5)$
 D. $6(x^2 - 5x + 8)^6 (2x - 5)$

26. Производная функции $y = \sqrt{4 - x^2}$ равна

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. $\frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$
 B. $\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$
 C. $\frac{2x}{\sqrt{4 - x^2}}$
 D. $\frac{x}{2\sqrt{4 - x^2}}$

27. Производная функции $y = 5 \ln \sqrt{2x}$ равна

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. $\frac{5}{\sqrt{2x}}$
 B. $\frac{5}{\sqrt{2x}}$
 C. $\frac{5}{2x}$
 D. $\frac{5}{x}$

28. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} =$

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. 0
 B. 1
 C. 2
 D. 3

29. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{3x + 5}{x - 5} =$

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- A. 15
 B. 13
 C. 17
 D. 7

30. Вторая производная функции $y = x \ln x$ равна

Проверяемые компетенции: ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

- 1
 А. $\frac{1}{x}$
 В. $\ln x + 1$
 С. $\ln x$
 D. $-\ln x$

Критерии оценивания:

Отметка	Объем выполнения работы в %
«5» (отлично)	90 – 100
«4» (хорошо)	70 – 89
«3» (удовлетворительно)	50 – 69
«2» (неудовлетворительно)	менее 50

Ключ ответов к тестовым заданиям

№ Вопроса	Правильный ответ	Проверяемые компетенции
1.	D	ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3
2.	A	ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3
3.	C	ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3
4.	A	ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3
5.	C	ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3
6.	A	ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3
7.	B	ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3
8.	B	ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3
9.	A	ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3
10.	A	ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3
11.	B	ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3
12.	A	ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3
13.	B	ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3
14.	B	ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3
15.	C	ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3
16.	B	ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3
17.	D	ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3
18.	C	ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3
19.	A	ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 08, ОК 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3

20.	C	OK 02, OK 03, OK 04, OK 05, OK 08, OK 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3
21.	B	OK 02, OK 03, OK 04, OK 05, OK 08, OK 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3
22.	A	OK 02, OK 03, OK 04, OK 05, OK 08, OK 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3
23.	C	OK 02, OK 03, OK 04, OK 05, OK 08, OK 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3
24.	D	OK 02, OK 03, OK 04, OK 05, OK 08, OK 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3
25.	B	OK 02, OK 03, OK 04, OK 05, OK 08, OK 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3
26.	A	OK 02, OK 03, OK 04, OK 05, OK 08, OK 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3
27.	C	OK 02, OK 03, OK 04, OK 05, OK 08, OK 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3
28.	C	OK 02, OK 03, OK 04, OK 05, OK 08, OK 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3
29.	B	OK 02, OK 03, OK 04, OK 05, OK 08, OK 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3
30.	A	OK 02, OK 03, OK 04, OK 05, OK 08, OK 09, ПК 1.1, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 2.4, ПК 3.1, ПК 3.2, ПК 3.3