

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.»

Филиал федерального государственного бюджетного образовательного  
учреждения высшего образования  
«Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.»  
в г. Петровске



УТВЕРЖДАЮ  
Директор филиала СГТУ  
имени Гагарина Ю.А. в г.Петровске  
Е.А.Бесшапошникова  
«30» июня 2021 г.

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по дисциплине  
ЕН.01 «Математика»

специальности  
13.02.07 «Электроснабжение» (по отраслям)»

Методические указания рассмотрены  
на заседании предметной (цикловой) комиссии  
общеобразовательных, ОГСЭ и ЕН дисциплин,  
профессиональных модулей специальностей  
социально-экономического профиля  
«14» июня 2021 года, протокол № 13

Председатель ПЦК Медведева /О.В.Медведева/

## **Пояснительная записка**

Методические указания по выполнению практических работ разработаны в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика», требованиями ФГОС СПО специальности 13.02.07 «Электроснабжение» (по отраслям)» и соответствующих общих (ОК) и профессиональных компетенций (ПК):

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие;

ОК 04. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами;

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста;

ОК 09. Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности;

ОК 10. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках;

ПК 1.1. Выполнять основные виды работ по проектированию электроснабжения электротехнического и электротехнологического оборудования;

ПК 2.5. Разрабатывать и оформлять технологическую и отчетную документацию.

ПК 3.4. Оценивать затраты на выполнение работ по ремонту устройств электроснабжения;

ПК 3.5. Выполнять проверку и анализ состояния устройств и приборов, используемых при ремонте и наладке оборудования;

ПК 3.6. Производить настройку и регулировку устройств и приборов для ремонта оборудования электрических установок и сетей.

Содержание программы учебной дисциплины «Математика» направлено на достижение следующих **целей**:

- формирование представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, об идеях и методах математики;

- развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, для продолжения образования и самообразования;

- обеспечение сформированности представлений о социальных, культурных и исторических факторах становления математики;

- обеспечение сформированности логического, алгоритмического и математического мышления;

- обеспечение сформированности умений применять полученные знания при решении различных задач;
- обеспечение сформированности представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления.

При выполнении практических работ студент должен **уметь:**

- выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;
- пользоваться понятиями теории комплексных чисел;
- применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- использовать методы дифференцирования и интегрирования для решения практических задач;
- раскладывать функции в тригонометрический ряд Фурье;
- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

При выполнении практических и лабораторных работ студент должен **знать:**

- основы линейной алгебры и аналитической геометрии;
- основы теории комплексных чисел;
- основы дифференциального и интегрального исчисления;
- основы теории числовых рядов;
- значение математики в профессиональной деятельности и при освоении профессиональной образовательной программы;
- основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности.

Объём практических занятий по дисциплине определяется учебным планом по данной специальности.

Продолжительность практического занятия - 2 академических часа. Перед проведением практического занятия преподавателем организуется инструктаж, а по ее окончании – обсуждение итогов.

Комплект методических указаний по выполнению практических работ дисциплины «Математика» содержит 24 практических занятий.

## Перечень практических работ

### Практическая работа №1.

Линейные операции над матрицами.

### Практическая работа №2.

Линейные операции над матрицами.

### Практическая работа №3.

Вычисление определителей второго и третьего порядка.

### Практическая работа №4.

Вычисление определителей второго и третьего порядка.

### Практическая работа №5.

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

### Практическая работа №6.

Решение систем линейных уравнений методом Крамера.

### Практическая работа №7.

Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера и методом Гаусса.

### Практическая работа №8.

Системы линейных уравнений в курсе «Электротехника».

### Практическая работа №9.

Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

### Практическая работа № 10.

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

### Практическая работа № 11.

Действия над комплексными числами в показательной форме».

### Практическая работа № 12.

Векторы и прямая на плоскости.

### Практическая работа № 13.

Кривые второго порядка.

### Практическая работа № 14.

Вычисление пределов функции в точке и на бесконечности.

### Практическая работа № 15.

Исследование функции на непрерывность.

### Практическая работа № 16.

Дифференцирование функций.

### Практическая работа № 17.

Решение прикладных задач с помощью производной.

### Практическая работа № 18.

Вычисление первообразных функций

### Практическая работа № 19.

Неопределенный интеграл. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)».

### Практическая работа № 20.

Методы вычисления определенного интеграла.

### Практическая работа № 21.

Методы вычисления определенного интеграла.

### Практическая работа № 22.

Решение прикладных задач с помощью интеграла.

**Практическая работа № 23.**

Исследование сходимости числовых рядов.

**Практическая работа № 24.**

Раскрытие функции в тригонометрический ряд Фурье.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1.

Тема: «Линейные операции над матрицами».

### ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Повторить знания по теме: «Линейные операции над матрицами».
2. Организовать деятельность обучающихся по переводу своих знаний от усвоения отдельных фактов и понятий к их обобщению в целостную систему знаний.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** инструкционно -технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

### Справочный материал:

#### 1. Умножение матрицы на число.+

Пример:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 12 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 7 & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & -3 \\ 21 & 0 \end{pmatrix}$$

Для того чтобы умножить матрицу на число, нужно **каждый** элемент матрицы умножить на это число.

#### 2. Сумма (разность) матриц.

Для выполнения сложения (вычитания) матриц, необходимо, чтобы они были одинаковыми по размеру.

*Для того чтобы сложить матрицы, необходимо сложить их соответствующие элементы:*

$$\begin{aligned} F + G &= \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 + (-4) & -1 + (-3) \\ -5 + 15 & 0 + 7 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 12 - 4 & -1 - 3 \\ -5 + 15 & 0 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Для разности матриц правило аналогичное, *необходимо найти разность соответствующих элементов.*

Пример:

Найти разность матриц  $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ ,  $H = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -15 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} A - H &= \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 3 & -15 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - (-4) & 5 - 3 & -17 - (-15) \\ -1 - (-5) & 0 - (-7) & 10 - 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 + 4 & 5 - 3 & -17 + 15 \\ -1 + 5 & 0 + 7 & 10 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 3. Умножение матриц.

Чтобы матрицу  $K$  можно было умножить на матрицу  $L$  нужно, чтобы число столбцов матрицы  $K$  равнялось числу строк матрицы  $L$ .

Пример 1:

Умножить матрицу  $K = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$  на матрицу  $L = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Формула умножения для конкретного случая:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1c_1 + b_1c_2 \\ a_2c_1 + b_2c_2 \end{pmatrix}$$

$$KL = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \\ 5 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Пример 2:

Умножить матрицу  $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$  на матрицу  $N = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

Формула:  $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1c_1 + b_1c_2 & a_1d_1 + b_1d_2 \\ a_2c_1 + b_2c_2 & a_2d_1 + b_2d_2 \end{pmatrix}$

$$MN = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 9 - 3 \cdot 6 & 2 \cdot (-6) - 3 \cdot (-4) \\ 4 \cdot 9 - 6 \cdot 6 & 4 \cdot (-6) - 6 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В результате получена так называемая нулевая матрица.

Пример 3:

Умножить матрицу  $P = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$  на матрицу  $R = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Формула:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1d_1 + b_1d_2 + c_1d_3 \\ a_2d_1 + b_2d_2 + c_2d_3 \\ a_3d_1 + b_3d_2 + c_3d_3 \end{pmatrix}$$

$$PR = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 + 8 \cdot (-3) - 4 \cdot 1 \\ 6 \cdot 2 + 9 \cdot (-3) - 5 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 + 7 \cdot (-3) - 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -20 \\ -16 \end{pmatrix}$$

**Содержание работы:**

**Вариант № 1**

**1. Найти матрицу; 3А-В если**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: 1)} \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 13 & 0 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$$

**2. Вычислить произведение матриц:**

$$1) \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: 1)} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 12 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: 1)} \begin{pmatrix} 43 & 2 & 10 \\ 49 & 11 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 56 & 2 \\ 49 & 11 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 14 & 11 \end{pmatrix}$$

**Вариант № 2.**

**1. Найти матрицу:  $A+2B$ , если**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: 1)} \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 13 & 0 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$$

**2. Вычислить произведение матриц:**

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: 1)} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: 1)} \begin{pmatrix} 43 & 10 \\ 49 & 11 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 56 & 2 \\ 14 & 11 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

## **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2.**

**Тема:** «Линейные операции над матрицами».

### **ЦЕЛЬ РАБОТЫ:**

1. Повторить знания по теме: «Линейные операции над матрицами».
2. Организовать деятельность обучающихся по переводу своих знаний от усвоения отдельных фактов и понятий к их обобщению в целостную систему знаний.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.



**ОБОРУДОВАНИЕ:** инструкционно -технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

### Справочный материал:

#### 1. Умножение матрицы на число.

Пример:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 12 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 7 & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & -3 \\ 21 & 0 \end{pmatrix}$$

Для того чтобы умножить матрицу на число, нужно **каждый** элемент матрицы умножить на это число.

#### 2. Сумма (разность) матриц.

Для выполнения сложения (вычитания) матриц, необходимо, чтобы они были одинаковыми по размеру.

*Для того чтобы сложить матрицы, необходимо сложить их соответствующие элементы:*

$$\begin{aligned} F + G &= \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 + (-4) & -1 + (-3) \\ -5 + 15 & 0 + 7 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 12 - 4 & -1 - 3 \\ -5 + 15 & 0 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Для разности матриц правило аналогичное, *необходимо найти разность соответствующих элементов.*

Пример:

Найти разность матриц  $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ ,  $H = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -15 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} A - H &= \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 3 & -15 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - (-4) & 5 - 3 & -17 - (-15) \\ -1 - (-5) & 0 - (-7) & 10 - 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 + 4 & 5 - 3 & -17 + 15 \\ -1 + 5 & 0 + 7 & 10 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

#### 3. Умножение матриц.

Чтобы матрицу  $K$  можно было умножить на матрицу  $L$  нужно, чтобы число столбцов матрицы  $K$  равнялось числу строк матрицы  $L$ .

Пример 1:

Умножить матрицу  $K = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$  на матрицу  $L = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Формула умножения для конкретного случая:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1c_1 + b_1c_2 \\ a_2c_1 + b_2c_2 \end{pmatrix}$$

$$KL = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \\ 5 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Пример 2:

Умножить матрицу  $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$  на матрицу  $N = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

Формула:  $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1c_1 + b_1c_2 & a_1d_1 + b_1d_2 \\ a_2c_1 + b_2c_2 & a_2d_1 + b_2d_2 \end{pmatrix}$

$$MN = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 9 - 3 \cdot 6 & 2 \cdot (-6) - 3 \cdot (-4) \\ 4 \cdot 9 - 6 \cdot 6 & 4 \cdot (-6) - 6 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В результате получена так называемая нулевая матрица.

Пример 3:

Умножить матрицу  $P = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$  на матрицу  $R = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Формула:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1d_1 + b_1d_2 + c_1d_3 \\ a_2d_1 + b_2d_2 + c_2d_3 \\ a_3d_1 + b_3d_2 + c_3d_3 \end{pmatrix}$$

$$PR = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 + 8 \cdot (-3) - 4 \cdot 1 \\ 6 \cdot 2 + 9 \cdot (-3) - 5 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 + 7 \cdot (-3) - 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -20 \\ -16 \end{pmatrix}$$

**Задание: Выполнить линейные операции над матрицами.**

1. Найти матрицу  $2A$ .
2. Найти  $A+B$ .
3. Найти  $C = A-3B$ .
4. Вычислить  $A \cdot B$  и  $B \cdot A$
5. Найти транспонированную матрицу
6. Найти минор  $M_{23}$  к элементу  $a_{23}$  определителя
7. Найти алгебраическое дополнение  $A_{23}$  к элементу  $a_{23}$  определителя.
8. Вычислить определитель матрицы
9. Найти обратную матрицу
10. Возвести матрицу в квадрат.

Данные:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

### ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3.

Тема: «Вычисление определителей второго и третьего порядка»

#### ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Вычисление определителей второго и третьего порядка».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** инструкционно-технологические карты, таблицы первообразных некоторых функций, микрокалькуляторы.

#### Справочный материал:

1. **Определитель второго порядка** можно раскрыть с помощью формулы:

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 11 & -3 \\ -15 & -2 \end{vmatrix} = 11 \cdot (-2) - (-15) \cdot (-3) = -22 - 45 = -67$$

2. **Определитель третьего порядка** можно раскрыть с помощью формулы (способ 1):

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$

Пример:

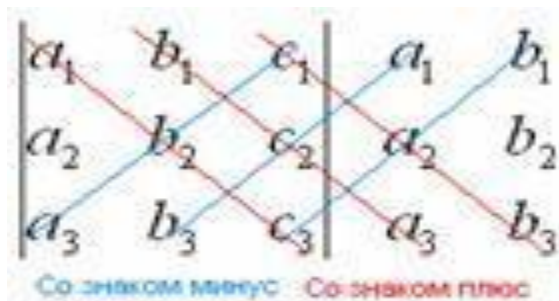
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 9 + (-7) \cdot (-2) \cdot 6 + 4 \cdot 8 \cdot 3 - (-7) \cdot 0 \cdot 3 - 1 \cdot 8 \cdot 6 - 4 \cdot (-2) \cdot 9 =$$

$$= 0 + 84 + 96 - 0 - 48 + 72 = 204$$

(способ 2):

Способ Саррюса или способом «параллельных полосок».

ь состоит в том, что справа от определителя приписывают первый и второй столбец и уратно карандашом проводят линии:



Множители, находящиеся на «красных» диагоналях входят в формулу со знаком «плюс». Множители, находящиеся на «синих» диагоналях входят в формулу со знаком минус:

Пример:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \\ -7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 9 + (-2) \cdot 6 \cdot (-7) + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 0 \cdot (-7) - 1 \cdot 6 \cdot 8 - (-2) \cdot 4 \cdot 9 =$$

$$= 0 + 84 + 96 - 0 - 48 + 72 = 204$$

## Содержание работы

**Вычислить определители:**

1)  $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}$

2)  $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

3)  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & -6 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -4 & 5 & -3 \end{vmatrix}$

4)  $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$

5)  $\begin{vmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$

6)  $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4.

Тема: «Вычисление определителей второго и третьего порядка»

## ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Вычисление определителей второго и третьего порядка».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** инструкционно-технологические карты, таблицы первообразных некоторых функций, микрокалькуляторы.

## Справочный материал:

### 1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Пусть дана матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Число  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$  называется определителем второго порядка, соответствующим данной матрице, и обозначается символами  $\Delta$  ( $\det A$ ,  $|A|$ ):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определитель матрицы  $A$  размера  $2 \times 2$  (определитель 2-го порядка) – это число, которое можно найти по правилу: произведение элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали.

Определитель второго порядка содержит две строки и два столбца, числа  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$  – элементы определителя. Правило вычисления определителя второго порядка можно представить схематически:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

Количество строк и столбцов в определителе всегда совпадает. Кроме определителей второго порядка существуют определители 3-го, 4-го и т. д. порядков. Определитель 3-го порядка содержит три строки и три столбца:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Для вычисления определителя 3-го порядка существует несколько правил.

## 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

### 2.1. ПРАВИЛО ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Для вычисления определителя надо повторить запись первого и второго столбцов. Проведем три левые диагонали, начиная с верхнего левого угла, и три правые диагонали. Три первые слагаемые получаются как результат произведения элементов, стоящих на каждой из левых диагоналей. Следующие три слагаемые получаются при

умножении элементов, стоящих на каждой из правых диагоналей. Три последние произведения берутся с противоположным знаком.

Пример 1.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 \cdot 7 + 1 \cdot 4 \cdot (-4) + 3 \cdot 5 \cdot (-2) - \\ - 3 \cdot 0 \cdot (-4) - 2 \cdot 4 \cdot (-2) - 1 \cdot 5 \cdot 7 = -65.$$

## 2.2. ПРАВИЛО ТРЕУГОЛЬНИКА

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(1) (2)

Перемножаются элементы, стоящие на левых диагоналях. Одна диагональ, *главная*, проходит через три элемента, и две диагонали побочные проходят через два элемента, третьим элементом для них является элемент, стоящий в вершине треугольника (схема 1). Аналогично находим произведения элементов, стоящих на правых диагоналях (схема 2). Эти произведения берутся с обратным знаком.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Пример 2.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 \cdot 7 + 1 \cdot 4 \cdot (-4) + 5 \cdot (-2) \cdot 3 - 3 \cdot 0 \cdot (-4) - \\ - 4 \cdot (-2) \cdot 2 - 1 \cdot 5 \cdot 7 = -65.$$

## 2.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПУТЕМ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ЭЛЕМЕНТАМ СТРОКИ

Прежде чем перейти к следующему правилу вычисления определителя, введем понятие минора и алгебраического дополнения. В определителе

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

вычеркнем одну строку и один столбец, останется определитель второго порядка, который принято называть **минором**. Например, при вычеркивании первой строки и первого столбца получим минор

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

При вычеркивании “ $i$ ”-й строки и “ $j$ ”-го столбца получим минор  $M_{ij}$ .  
Через  $A_{ij}$  обозначим алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$ . **Алгебраическим дополнением** элемента  $a_{ij}$  определителя называется его минор, взятый со знаком «плюс», если сумма  $i+j$  - четное число, и со знаком «минус» если эта сумма нечетная т.е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

По свойствам определителя его можно представить в виде суммы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

что соответствует разложению определителя по элементам первой строки. Аналогично можно разложить по элементам любой строки или столбца.

*Пример 3.*

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{vmatrix}.$$

Вычислим определитель разложением по элементам строки. Для определенности выберем первую строку.

Тогда  $a_{11}=2$ ,  $a_{12}=1$ ,  $a_{13}=3$ .

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 8.$$

$M_{11}$  – получен вычеркиванием первой строки и первого столбца.

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = - \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = -(35+16) = -51.$$

$M_{12}$  – получен вычеркиванием первой строки и второго столбца.

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -10.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 3 \cdot A_{13} = 2 \cdot 8 + 1 \cdot (-51) + 3 \cdot (-10) = -65.$$

Тогда

**Вывод:** *Вычисление определителей.* Определитель матрицы  $A$  размера  $2 \times 2$  (определитель 2-го порядка) – это число, которое можно найти по правилу:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(произведение элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали).

Определитель матрицы  $A$  размера  $3 \times 3$  (определитель 3-го порядка) – число, вычисляемое по правилу «*раскрытие определителя по первой строке*»:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

Пример 4. Найти:

Решение. При нахождении определителя воспользуемся сначала

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

формулой

вычисления определителей 2-го порядка)

,а затем (для

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

формулой

## Содержание работы.

### Вариант 1.

**Задание 1.** Запишите миноры  $M_{11}$ ,  $M_{13}$ ,  $M_{22}$ ,  $M_{23}$ ,  $M_{31}$ ,  $M_{32}$  и алгебраические дополнения  $A_{11}$ ,  $A_{13}$ ,  $A_{22}$ ,  $A_{23}$ ,  $A_{31}$ ,  $A_{32}$  определителя:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & -7 \end{vmatrix}$$

**Задание 2.** Вычислить определители:

1)  $\begin{vmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix};$

2)  $\begin{vmatrix} -1 & i \\ i & -1 \end{vmatrix};$

3)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

4)  $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix};$

5)  $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -10 \end{vmatrix};$

6)  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

7)  $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$



**Справка.** Число  $i$  определяется равенством  $i^2 = -1$ . Называется мнимой единицей.

**Задание 3.** Вычислить определитель, разложив его по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

**Задание 4.** Вычислить определитель, разложив его по элементам третьей строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & -7 \end{vmatrix}$$

**Задание 5.** Вычислить определитель по правилу треугольника и, разложив его по элементам первого столбца:

$$\begin{vmatrix} 0 & 13 & 22 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 17 & 34 \end{vmatrix}$$

**Задание 6.** Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & a+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

**Задание 7.** Вычислить определитель:

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5.

Тема: «Решение систем линейных уравнений методом Гаусса».

### ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Повторить знания по теме: «Решить систему линейных уравнений методом Гаусса».
2. Организовать деятельность обучающихся по переводу своих знаний от усвоения отдельных фактов и понятий к их обобщению в целостную систему знаний.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** инструкционно -технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

### Справочный материал:

Система линейных уравнений может:

- 1) Иметь единственное решение.
- 2) Иметь бесконечно много решений.
- 3) Не иметь решений (быть несовместной).

Метод Гаусса – наиболее мощный и универсальный инструмент для нахождения решения любой системы линейных уравнений. Правило Крамера и матричный метод непригодны в тех случаях, когда система имеет бесконечно много решений или несовместна.

Пусть дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + y = -7 \end{cases} \text{ решим ее методом Гаусса.}$$

На первом этапе нужно записать расширенную матрицу системы:

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array} \right).$$

По какому принципу записаны коэффициенты, думаю, всем видно.

Вертикальная черта внутри матрицы не несёт никакого математического смысла – это просто отчеркивание для удобства оформления.

Справка: рекомендую запомнить термины линейной алгебры. Матрица системы – это матрица, составленная только из коэффициентов при неизвестных, в данном

примере матрица системы:  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Расширенная матрица системы – это та же

матрица системы плюс столбец свободных членов, в данном случае:  $\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array} \right)$ .

Любую из матриц можно для краткости называть просто матрицей.

После того, как расширенная матрица системы записана, с ней необходимо выполнить некоторые действия, которые также называются элементарными преобразованиями.

Существуют следующие элементарные преобразования:

1) Строки матрицы можно переставлять местами. Например, в рассматриваемой матрице можно безболезненно переставить первую и вторую

строки:  $\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & -5 \end{array} \right)$

2) Если в матрице есть (или появились) пропорциональные (как частный случай – одинаковые) строки, то следует удалить из матрицы все эти строки кроме одной.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 6 \end{array} \right)$$

Рассмотрим, например матрицу  $\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 6 \end{array} \right)$ . В данной матрице последние три строки пропорциональны, поэтому достаточно оставить только одну из

них:  $\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right)$

3) Если в матрице в ходе преобразований появилась нулевая строка, то ее также следует удалить. Рисовать не буду, понятно, нулевая строка – это строка, в которой одни нули.

4) Строку матрицы можно умножить (разделить) на любое число, отличное от нуля. Рассмотрим, например, матрицу  $\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 9 & 15 \\ 0,5 & 0 & 2,5 \end{array}\right)$ . Здесь целесообразно первую строку разделить на  $-3$ , а вторую строку – умножить на  $2$ :  $\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 9 & 15 \\ 0,5 & 0 & 2,5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -5 \\ 1 & 0 & 5 \end{array}\right)$ . Данное действие очень полезно, поскольку упрощает дальнейшие преобразования матрицы.

5) Это преобразование вызывает наибольшие затруднения, но на самом деле ничего сложного тоже нет. К строке матрицы можно прибавить другую строку, умноженную на число, отличное от нуля. Рассмотрим нашу матрицу из практического

примера:  $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right)$ . Сначала я распишу преобразование очень подробно. Умножаем первую строку на  $-2$ :  $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right)$ , и ко второй строке прибавляем первую строку умноженную на  $-2$ :  $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$ . Теперь первую строку можно разделить «обратно» на  $-2$ :  $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$ .

Как видите, строка, которую **ПРИБАВЛЯЛИ** – не изменилась. Всегда меняется строка, **К КОТОРОЙ ПРИБАВЛЯЮТ**.

На практике так подробно, конечно, не расписывают, а пишут короче:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Еще раз: ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на  $-2$ . Умножают строку обычно устно или на черновике, при этом мысленный ход расчётов примерно такой:

«Переписываю матрицу и переписываю первую строку:  $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ * & * & * \end{array}\right)$ »

«Сначала первый столбец. Внизу мне нужно получить ноль. Поэтому единицу сверху умножаю на  $-2$ :  $1 \cdot (-2) = -2$ , и ко второй строке прибавляю первую:  $2 + (-2) = 0$ .

Записываю результат во вторую строку:  $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & * & * \end{array}\right)$ »

«Теперь второй столбец. Вверху  $-1$  умножаю на  $-2$ :  $-1 \cdot (-2) = 2$ . Ко второй строке прибавляю первую:  $1 + 2 = 3$ . Записываю результат во вторую

строку:  $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$ »

«И третий столбец. Вверху  $-5$  умножаю на  $-2$ :  $-5 \cdot (-2) = 10$ . Ко второй строке прибавляю первую:  $-7 + 10 = 3$ . Записываю результат во вторую

строку:  $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$ »

Пожалуйста, тщательно осмыслите этот пример и разберитесь в последовательном алгоритме вычислений, если вы это поняли, то метод Гаусса практически «в кармане». Но, конечно, над этим преобразованием мы еще поработаем.

Элементарные преобразования не меняют решение системы уравнений

! ВНИМАНИЕ: рассмотренные манипуляции нельзя использовать, если Вам предложено задание, где матрицы даны «сами по себе». Например, при «классических» действиях с матрицами что-то переставлять внутри матриц ни в коем случае нельзя!

Вернемся к нашей системе  $\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + y = -7 \end{cases}$ . Она практически разобрана по косточкам.

Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

(1) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на  $-2$ . И снова: почему первую строку умножаем именно на  $-2$ ? Для того чтобы внизу получить ноль, а значит, избавиться от одной переменной во второй строке.

(2) Делим вторую строку на 3.

Цель элементарных преобразований – привести матрицу к ступенчатому

виду:  $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ . В оформлении задания прямо так и отчеркивают простым карандашом «лестницу», а также обводят кружочками числа, которые располагаются на «ступеньках». Сам термин «ступенчатый вид» не вполне теоретический, в научной и учебной литературе он часто называется трапециевидный вид или треугольный вид.

В результате элементарных преобразований получена эквивалентная исходной система уравнений:

$$\begin{cases} x - y = -5 \\ y = 1 \end{cases}$$

Теперь систему нужно «раскрутить» в обратном направлении – снизу вверх, этот процесс называется обратным ходом метода Гаусса.

В нижнем уравнении у нас уже готовый результат:  $y = 1$ .

Рассмотрим первое уравнение системы  $x - y = -5$  и подставим в него уже известное значение «игрек»:

$$x - 1 = -5$$

$$x = -4$$

Ответ:  $x = -4, y = 1$

Рассмотрим наиболее распространенную ситуацию, когда методом Гаусса требуется решить систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными.

### Пример 1

Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = -1 \\ 2x - y + 3z = 13 \\ x + 2y - z = 9 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array} \right)$$

Сейчас я сразу нарисую результат, к которому мы придём в ходе решения:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 2 & -1 & 9 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 4 \end{array} \right)$$

И повторюсь, наша цель – с помощью элементарных преобразований привести матрицу к ступенчатому виду. С чего начать действия?

Сначала смотрим на левое верхнее число:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} \textcircled{3} & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array} \right)$$

Почти всегда здесь должна находиться единица. Вообще говоря, устроит и  $-1$  (а иногда и другие числа), но как-то так традиционно сложилось, что туда обычно помещают единицу. Как организовать единицу? Смотрим на первый столбец – готовая единица у нас есть! Преобразование первое: меняем местами первую и третью строки:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array} \right)$$

Теперь первая строка у нас останется неизменной до конца решения. Уже легче.

Единица в левом верхнем углу организована. Теперь нужно получить нули вот на этих местах:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ \textcircled{2} & -1 & 3 & 13 \\ \textcircled{3} & 2 & -5 & -1 \end{array} \right)$$

Нули получаем как раз с помощью «трудного» преобразования. Сначала разбираемся со второй строкой  $(2, -1, 3, 13)$ . Что нужно сделать, чтобы на первой позиции получить ноль? Нужно ко второй строке прибавить первую строку, умноженную на  $-2$ . Мысленно или на черновике умножаем первую строку на  $-2$ :  $(-2, -4, 2, -18)$ . И последовательно проводим (опять же мысленно или на черновике)

сложение, ко второй строке прибавляем первую строку, уже умноженную на  $-2$ :

$$\begin{array}{rrrr} 0 & -5 & 5 & -5 \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ -2 & -4 & 2 & -18 \\ + & + & + & + \\ 2 & -1 & 3 & 13 \end{array}$$

Результат записываем во вторую строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Аналогично разбираемся с третьей строкой  $(3, 2, -5, -1)$ . Чтобы получить на первой позиции ноль, нужно к третьей строке прибавить первую строку, умноженную на  $-3$ . Мысленно или на черновике умножаем первую строку на  $-3$ :  $(-3, -6, 3, -27)$ . И к третьей строке прибавляем первую строку, умноженную на  $-3$ :

$$\begin{array}{rrrr} 0 & -4 & -2 & -28 \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ -3 & -6 & 3 & -27 \\ + & + & + & + \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}$$

Результат записываем в третью строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

На практике эти действия обычно выполняются устно и записываются в один шаг:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

Не нужно считать всё сразу и одновременно. Порядок вычислений и «вписывания» результатов последователен и обычно такой: сначала переписываем первую строку, и пыхтим себе потихонечку – ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО и ВНИМАТЕЛЬНО:

$$\begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ * & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow \\ \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \end{array}$$

А мысленный ход самих расчётов я уже рассмотрел выше.

Далее нужно получить единицу на следующей «ступеньке»:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array} \right)$$

В данном примере это сделать легко, вторую строку делим на  $-5$  (поскольку там все числа делятся на 5 без остатка). Заодно делим третью строку на  $-2$ , ведь чем меньше числа, тем проще решение:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array} \right)$$

На заключительном этапе элементарных преобразований нужно получить еще один ноль здесь:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array} \right)$$

Для этого к третьей строке прибавляем вторую строку, умноженную на  $-2$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Попробуйте разобрать это действие самостоятельно – мысленно умножьте вторую строку на  $-2$  и проведите сложение.

Последнее выполненное действие – причёска результата, делим третью строку на 3.

В результате элементарных преобразований получена эквивалентная исходной система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 9 \\ y - z = 1 \\ z = 4 \end{cases}$$

Круто.

Теперь в действие вступает обратный ход метода Гаусса. Уравнения «раскручиваются» снизу вверх.

В третьем уравнении у нас уже готовый результат:  $z = 4$

Смотрим на второе уравнение:  $y - z = 1$ . Значение «зет» уже известно, таким образом:

$$y - 4 = 1$$

$$y = 5$$

И, наконец, первое уравнение:  $x + 2y - z = 9$ . «Игрек» и «зет» известны, дело за малым:

$$x + 2 \cdot 5 - 4 = 9$$

$$x + 6 = 9$$

$$x = 3$$

Ответ:  $x = 3, y = 5, z = 4$

Как уже неоднократно отмечалось, для любой системы уравнений можно и нужно сделать проверку найденного решения, благо, это несложно и быстро.

### Пример 2

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - y + 2z = 6 \\ x + y + 5z = -1 \end{cases}$$

Это пример для самостоятельного решения, образец чистового оформления и ответ в конце урока.

Следует отметить, что ваш ход решения может не совпасть с моим ходом решения, и это – особенность метода Гаусса. Но вот ответы обязательно должны получиться одинаковыми!

### Пример 3

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

Смотрим на левую верхнюю «ступеньку». Там у нас должна быть единица. Проблема состоит в том, что в первом столбце единиц нет вообще, поэтому перестановкой строк ничего не решить. В таких случаях единицу нужно организовать с помощью элементарного преобразования. Обычно это можно сделать несколькими способами. Я поступил так:

(1) К первой строке прибавляем вторую строку, умноженную на  $-1$ . То есть, мысленно умножили вторую строку на  $-1$  и выполнили сложение первой и второй строки, при этом вторая строка у нас не изменилась.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(1)} \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

Теперь слева сверху «минус один», что нас вполне устроит. Кто хочет получить  $+1$ , может выполнить дополнительное телодвижение: умножить первую строку на  $-1$  (сменить у неё знак).



Дальше алгоритм работает уже по накатанной колее:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на 5. К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на 3.

(3) Первую строку умножили на  $-1$ , в принципе, это для красоты. У третьей строки также сменили знак и переставили её на второе место, таким образом, на второй «ступеньке у нас появилась нужная единица.

(4) К третьей строке прибавили вторую строку, умноженную на 2.

(5) Третью строку разделили на 3.

Скверным признаком, который свидетельствует об ошибке в вычислениях (реже – об опечатке), является «плохая» нижняя строка. То есть, если бы у нас внизу

получилось что-нибудь вроде  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 11 & 23 \end{pmatrix}$ , и, соответственно,  $11x_3 = 23 \Rightarrow x_3 = \frac{23}{11}$ , то с большой долей вероятности можно утверждать, что допущена ошибка в ходе элементарных преобразований.

Заряжаем обратный ход, в оформлении примеров часто не переписывают саму систему, а уравнения «берут прямо из приведенной матрицы». Обратный ход, напоминаю, работает, снизу вверх. Да тут подарок получился:

$$x_3 = 1$$

$$x_2 = 3$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + 3 - 1 = 1 \Rightarrow x_1 = -1$$

Ответ:  $x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = 1$ .

#### Пример 4

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 8x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 18 \\ -7x_1 - 4x_2 - 4x_3 = -11 \\ -6x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -15 \end{cases}$$

Это пример для самостоятельного решения, он несколько сложнее. Ничего страшного, если кто-нибудь запутается. Полное решение и образец оформления в конце урока. Ваше решение может отличаться от моего решения.

В последней части рассмотрим некоторые особенности алгоритма Гаусса.

Первая особенность состоит в том, что иногда в уравнениях системы отсутствуют некоторые переменные, например:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 + 4x_3 + 6 = 0 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Как правильно записать расширенную матрицу системы? В расширенной матрице системы на месте отсутствующих переменных ставим нули:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Кстати, это довольно легкий пример, поскольку в первом столбце уже есть один ноль, и предстоит выполнить меньше элементарных преобразований.

Вторая особенность состоит вот в чём. Во всех рассмотренных примерах на «ступеньки» мы помещали либо  $-1$ , либо  $+1$ . Могут ли там быть другие числа? В ряде

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ 2x + y - 4z = 9 \\ 6x - 5y + 2z = 17 \end{cases}$$

случаев могут. Рассмотрим систему:

Здесь на левой верхней «ступеньке» у нас двойка. Но замечаем тот факт, что все числа в первом столбце делятся на 2 без остатка – и другая двойка и шестерка. И двойка слева вверху нас устроит! На первом шаге нужно выполнить следующие преобразования: ко второй строке прибавить первую строку, умноженную на  $-1$ ; к третьей строке прибавить первую строку, умноженную на  $-3$ . Таким образом, мы получим нужные нули в первом столбце.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 17 \\ 0 & 12 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Или еще такой условный пример: . Здесь тройка на второй

«ступеньке» тоже нас устраивает, поскольку 12 (место, где нам нужно получить ноль) делится на 3 без остатка. Необходимо провести следующее преобразование: к третьей строке прибавить вторую строку, умноженную на  $-4$ , в результате чего и будет получен нужный нам ноль.

Метод Гаусса универсален, но есть одно своеобразие. Уверенно научиться решать системы другими методами (методом Крамера, матричным методом) можно буквально с первого раза – там очень жесткий алгоритм. Но вот чтобы уверенно себя чувствовать в методе Гаусса, следует «набить руку», и прорешать хотя бы 5-10 десятков систем. Поэтому поначалу возможны путаница, ошибки в вычислениях, и в этом нет ничего необычного или трагического.

Дождливая осенняя погода за окном.... Поэтому для всех желающих более сложный пример для самостоятельного решения:

#### Пример 5

Решить методом Гаусса систему 4-х линейных уравнений с четырьмя неизвестными.

$$\begin{cases} 2x + 5y + 4z + t = 20 \\ x + 3y + 2z + t = 11 \\ 2x + 10y + 9z + 7t = 40 \\ 3x + 8y + 9z + 2t = 37 \end{cases}$$

#### Решения и ответы:

Пример 2: Решение: Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 2 & -1 & 2 & | & 6 \\ 1 & 1 & 5 & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & -5 & -4 & | & 4 \\ 0 & -1 & 2 & | & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & -1 & 2 & | & -2 \\ 0 & 5 & 4 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & -1 & 2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 14 & | & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

Выполненные элементарные преобразования:

(1) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на  $-2$ . К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на  $-1$ . Внимание! Здесь может возникнуть соблазн из третьей строки вычесть первую, крайне не рекомендую вычитать – сильно повышается риск ошибки. Только складываем!

(2) У второй строки сменили знак (умножили на  $-1$ ). Вторую и третью строки поменяли местами. Обратите внимание, что на «ступеньках» нас устраивает не только единица, но еще и  $-1$ , что даже удобнее.

(3) К третьей строке прибавили вторую строку, умноженную на  $5$ .

(4) У второй строки сменили знак (умножили на  $-1$ ). Третью строку разделили на  $14$ .

Обратный ход:  $z = -1$

$$y - 2z = 2 \Rightarrow y + 2 = 2 \Rightarrow y = 0$$

$$x + 2y + 3z = 1 \Rightarrow x + 0 - 3 = 1 \Rightarrow x = 4$$

Ответ:  $x = 4, y = 0, z = -1$ .

Пример 4: Решение: Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 8 & 7 & 3 & | & 18 \\ -7 & -4 & -4 & | & -11 \\ -6 & 5 & -4 & | & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 7 \\ -7 & -4 & -4 & | & -11 \\ -6 & 5 & -4 & | & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 7 \\ 0 & 17 & -11 & | & 38 \\ 0 & 23 & -10 & | & 27 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 7 \\ 0 & 17 & -11 & | & 38 \\ 0 & 6 & 1 & | & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 7 \\ 0 & -1 & -14 & | & 71 \\ 0 & 6 & 1 & | & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 7 \\ 0 & -1 & -14 & | & 71 \\ 0 & 0 & -83 & | & 415 \end{pmatrix} \xrightarrow{(6)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 7 \\ 0 & 1 & 14 & | & -71 \\ 0 & 0 & 1 & | & -5 \end{pmatrix}$$

Выполненные преобразования:

(1) К первой строке прибавили вторую. Таким образом, организована нужная единица на левой верхней «ступеньке».

(2) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на  $7$ . К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на  $6$ .

Со второй «ступенькой» всё хуже, «кандидаты» на неё – числа  $17$  и  $23$ , а нам нужна либо единичка, либо  $-1$ . Преобразования (3) и (4) будут направлены на получение нужной единицы

(3) К третьей строке прибавили вторую, умноженную на  $-1$ .

(4) Ко второй строке прибавили третью, умноженную на  $-3$ .

Нужная вещь на второй ступеньке получена.

(5) К третьей строке прибавили вторую, умноженную на  $6$ .

(6) Вторую строку умножили на  $-1$ , третью строку разделили на  $-83$ .

Обратный ход:  $x_3 = -5$

$$x_2 + 14x_3 = -71 \Rightarrow x_2 - 70 = -71 \Rightarrow x_2 = -1$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \Rightarrow x_1 - 3 + 5 = 7 \Rightarrow x_1 = 5$$

Ответ:  $x_1 = 5, x_2 = -1, x_3 = -5$

Пример 5: Решение: Запишем матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 & | & 20 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & | & 11 \\ 2 & 10 & 9 & 7 & | & 40 \\ 3 & 8 & 9 & 2 & | & 37 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & | & 11 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & | & 20 \\ 2 & 10 & 9 & 7 & | & 40 \\ 3 & 8 & 9 & 2 & | & 37 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & | & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & | & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 5 & | & 18 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & | & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & | & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & | & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & | & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & | & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & | & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & | & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Выполненные преобразования:

(1) Первую и вторую строки поменяли местами.

(2) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на  $-2$ . К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на  $-2$ . К четвертой строке прибавили первую строку, умноженную на  $-3$ .

(3) К третьей строке прибавили вторую, умноженную на  $4$ . К четвертой строке прибавили вторую, умноженную на  $-1$ .

(4) У второй строки сменили знак. Четвертую строку разделили на  $3$  и поместили вместо третьей строки.

(5) К четвертой строке прибавили третью строку, умноженную на  $-5$ .

Обратный ход:

$$t = 0$$

$$z = 2$$

$$y + t = 2 \Rightarrow y = 2$$

$$x + 3y + 2z + t = 11 \Rightarrow x + 6 + 4 + 0 = 11 \Rightarrow x = 1$$

Ответ:  $x = 1, y = 2, z = 2, t = 0$

### Содержание работы:

Вариант № 1.

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$1. \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

Ответ: 1.(1,3,2); 2.(1,0,3) 3.(0,0,0).

$$2. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$$

Ответ: 1.(1,3,2); 2.(1,0,3) 3.(1,0,0).

$$3. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Ответ: 1.(3,4,8) 2.(1,2,3) 3.(5,8,2).

Вариант № 2.

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$1. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 10 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

Ответ: 1.(-1,3,2); 2.(0,0,3) 3.(0,0,0).

$$2. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Ответ: 1.(3,4,8); 2.(1,2,3); 3.(5,8,2).

$$3. \begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Ответ: 1.(-1,3,2); 2.(0,0,3); 3.(0,0,0).

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6.

Тема: «Решение систем линейных уравнений методом Крамера».

### ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Повторить знания по теме: «Решение систем линейных уравнений методом Крамера». Организовать деятельность обучающихся по переводу своих знаний от усвоения отдельных фактов и понятий к их обобщению в целостную систему знаний.

2. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** инструкционно -технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

### Справочный материал:

Рассмотрим систему линейных уравнений в общем виде:

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = s_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = s_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = s_3 \end{cases}$$

Находим главный определитель системы:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Если  $D = 0$ , то система имеет бесконечно много решений или несовместна (не имеет решений). В этом случае правило Крамера не поможет, нужно использовать [метод Гаусса](#).

Если  $D \neq 0$ , то система имеет единственное решение и для нахождения корней мы должны вычислить еще три определителя:

$$D_1 = \begin{vmatrix} s_1 & b_1 & c_1 \\ s_2 & b_2 & c_2 \\ s_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & s_1 & c_1 \\ a_2 & s_2 & c_2 \\ a_3 & s_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & s_1 \\ a_2 & b_2 & s_2 \\ a_3 & b_3 & s_3 \end{vmatrix}$$

И, наконец, ответ рассчитывается по формулам:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

**Пример:**

Решить систему линейных уравнений методом Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

**Решение:**

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$= 3 \cdot (-4 - 2) + 2 \cdot (-3 + 4) + 4 \cdot (-3 - 8) = -18 + 2 - 44 = -60 \neq 0$ , значит, система имеет единственное решение.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 21 & -2 & 4 \\ 9 & 4 & -2 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 21 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} =$$
$$= 21 \cdot (-4 - 2) + 2 \cdot (-9 + 20) + 4 \cdot (-9 - 40) = -126 + 22 - 196 = -300$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-300}{-60} = 5$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 21 & 4 \\ 3 & 9 & -2 \\ 2 & 10 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} - 21 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} =$$
$$= 3 \cdot (-9 + 20) - 21 \cdot (-3 + 4) + 4 \cdot (30 - 18) = 33 - 21 + 48 = 60$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{60}{-60} = -1$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 21 \\ 3 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 21 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 21 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (40 + 9) - 3 \cdot (-20 + 21) + 2 \cdot (-18 - 84) = 147 - 3 - 284 = -60$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-60}{-60} = 1$$

**Ответ:**  $x_1 = 5, x_2 = -1, x_3 = 1$ .

**Содержание работы:**

### Вариант № 1.

Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

$$1. \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

**Ответ:** 1.(1,3,2); 2.(1,0,3) 3.(0,0,0).

$$2. \quad \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$$

**Ответ:** 1.(1,3,2); 2.(1,0,3) 3.(1,0,0).

$$3. \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

**Ответ:** 1.(3,4,8) 2.(1,2,3) 3.(5,8,2).

### Вариант № 2.

Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

$$1. \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 10 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

**Ответ:** 1.(-1,3,2); 2.(0,0,3) 3.(0,0,0).

$$2. \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

**Ответ:** 1.(3,4,8); 2.(1,2,3); 3.(5,8,2).

$$3. \quad \begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

**Ответ:** 1.(-1,3,2); 2.(0,0,3); 3.(0,0,0).

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7.

Тема: «Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера и методом Гаусса».

### ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Повторить знания по теме: «Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера и методом Гаусса». Организовать деятельность обучающихся по переводу своих знаний от усвоения отдельных фактов и понятий к их обобщению в целостную систему знаний.
2. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** инструкционно -технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

### Содержание работы:

**Решить системы линейных уравнений методом Гаусса и Крамера.**



Это изображение

$$1) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 11, \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 12, \\ 1,7x + 1,4y = 18 \end{cases}$$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №8.

Тема: «Системы линейных уравнений в курсе «Электротехника».

### ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Системы линейных уравнений в курсе «Электротехника».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.



## Справочный материал:

Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей  $m$  уравнений и  $n$  неизвестных, называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где: числа  $a_{ij}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$  называются коэффициентами системы, числа  $b_n$  – свободными членами.  $x_n$  – подлежат нахождению

Первые СЛАУ встречаются ещё в вавилонских и египетских рукописях II века до н. э., а также в трудах древнегреческих, индийских и китайских мудрецов. В китайском трактате «Математика в девяти книгах» словесно изложены правила решения систем уравнений, были замечены некоторые закономерности при решении. На протяжении многих лет выдающиеся математики своего времени разрабатывали методы решения СЛАУ. На данный момент существует множество различных методов решения систем. В своей работе я разберу один из основных методов решения СЛАУ, метод Гаусса.

Суть метода заключается в том, что систему линейных алгебраических уравнений приводят к ступенчатому виду, используя элементарные преобразования.

Приведённая система имеет ступенчатый вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{kk}x_k + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

где  $k \leq n, a_{ii} \neq \overline{1, k}$

. Коэффициенты  $a_{ii}$  называются главными элементами системы [1, с. 34].

Составив ступенчатую систему, решаем её. Если система оказывается треугольной, то есть  $k = n$ , то система имеет единственное решение. Если же  $k < n$ , то исходная система имеет множество решений.

В электротехнике часто встречаются задачи, в которых необходим расчёт электрической цепи, то есть необходим расчёт напряжения и силы тока во всех ветвях цепи. Например, известны сопротивления и ЭДС, но нет значений силы тока. Для решения таких задач используют правила Кирхгофа.

Разберём этот метод на конкретной задаче. При решении будем использовать метод Гаусса. Этот метод является наиболее простым, и подходит практически к любой системе.

### Пример:

Дана схема (рисунок 1), и известны сопротивления резисторов и ЭДС источников ( $R_1 = 100 \text{ Ом}, R_2 = 150 \text{ Ом}, R_3 = 150 \text{ Ом}, E_1 = 75 \text{ В}, E_2 = 100 \text{ В}$ ). Требуется найти токи в ветвях

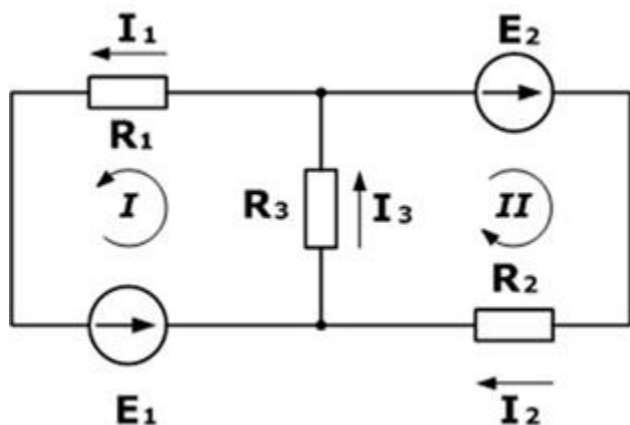


Рисунок 1. (Схема электрической цепи)

Решение:

Первое правило Кирхгофа гласит, что алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равно 0. Значит:  $I_3 - I_1 - I_2 = 0$ .

Второй закон Кирхгофа: алгебраическая сумма падений напряжений на всех ветвях, принадлежащих любому замкнутому контуру цепи, равна алгебраической сумме ЭДС ветвей этого контура. С помощью этого закона составим уравнения для первого и второго контура цепи:  $R_1 I_1 + R_3 I_3 = E_1$ ;  $R_2 I_2 + R_3 I_3 = E_2$ .

Теперь из трёх уравнений составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} I_3 - I_1 - I_2 = 0 \\ R_1 I_1 + R_3 I_3 = E_1 \\ R_2 I_2 + R_3 I_3 = E_2 \end{cases} \begin{cases} I_3 - I_1 - I_2 = 0 \\ 100I_1 + 150I_3 = 75 \\ 150I_2 + 150I_3 = 100 \end{cases}$$

Из коэффициентов перед неизвестными составляем матрицу:

$$\begin{pmatrix} 100 & 0 & 150 & 75 \\ 0 & 150 & 150 & 100 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение можно разбить на два этапа. Сначала с помощью элементарных преобразований приведём систему к ступенчатому виду:

$$1\text{-ую строку делим на } 100: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.5 & 3/4 \\ 0 & 150 & 150 & 100 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{к 3 строке добавляем 1 строку, умноженную на 1: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.5 & \frac{3}{4} \\ 0 & 150 & 150 & 100 \\ 0 & -1 & 2.5 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.5 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & -1 & 2.5 & 3/4 \end{pmatrix}$$

2-ую строку делим на 150:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.5 & 3/4 \\ 0 & 1 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 3.5 & 17/12 \end{pmatrix}$$

к 3 строке добавляем 2 строку:

Теперь решаем ступенчатую систему:

$$\begin{cases} I_1 + 1.5I_3 = 3/4 \\ I_2 + I_3 = 2/3 \\ 3.5I_3 = 17/12 \end{cases}$$

Так как  $k = n$ , система имеет единственное решение.  
Находим значения токов:

$$I_1 = \frac{1}{7} = 0.143 \text{ A}; I_2 = \frac{11}{42} = 0.262 \text{ A}; I_3 = \frac{17}{42} = 0.405 \text{ A}.$$

Вычислительная техника выполняет такие операции за доли секунд. Таким образом, СЛАУ играет большую роль в электротехнике. С помощью СЛАУ можно быстро и точно рассчитать эклектическую цепь.

## Содержание работы:

### Вариант 1

**Задача 1.** Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

**Задача 2.** Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y - z = 7 \\ 3x - y + 4z = 12 \end{cases}$$

**Задача 3.** Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}^2 - 2 \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

### Вариант 2

**Задача 1.** Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

**Задача 2.** Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 2x+3y-4z=3 \\ 3x-4y+2z=-5 \\ 2x+7y-5z=13 \end{cases}$$

**Задача 3.** Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}^2 - 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}^2$$

### Вариант 3

**Задача 1.** Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & -7 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

**Задача 2.** Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 2x-7y+5z=9 \\ x+5y-5z=-2 \\ 4x-2y+7z=24 \end{cases}$$

**Задача 3.** Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

### Вариант 4

**Задача 1.** Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

**Задача 2.** Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ x-2y+4z=9 \\ y+z=2 \end{cases}$$

**Задача 3.** Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \\ -2 & 5 & 5 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}^2$$

## Вариант 5

**Задача 1.** Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 4 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

**Задача 2.** Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} x+3y+4z=17 \\ 2x-3y+5z=16 \\ 3x+4y-z=7 \end{cases}$$

**Задача 3.** Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}^2 - 2 \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}^2$$

## Вариант 6

**Задача 1.** Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -7 & 1 \\ 3 & 12 & 15 \end{vmatrix}$$

**Задача 2.** Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 2x+2y-4z=6 \\ x+3y-5z=6 \\ 3x-2y+6z=6 \end{cases}$$

**Задача 3.** Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

### Вариант 7

**Задача 1.** Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & 3 & -8 \end{vmatrix}$$

**Задача 2.** Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 22 \\ x - 3y - 6z = -9 \\ 2x + 4y - 4z = 10 \end{cases}$$

**Задача 3.** Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 - 2 \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2$$

### Вариант 8

**Задача 1.** Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 4 & -8 & 2 \\ 10 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

**Задача 2.** Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$$

**Задача 3.** Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot [2 \ 6] + 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

### Вариант 9

**Задача 1.** Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

**Задача 2.** Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 2x - y - z = 14 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$$

**Задача 3.** Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 \\ 1 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

### Контрольная работа №1. Вариант 10

**Задача 1.** Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

**Задача 2.** Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 3x - y + z = 12 \\ x + 2y + 4z = 6 \\ 5x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

**Задача 3.** Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 5 & -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix}$$

### Вариант 11

**Задача 1.** Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} -3 & 7 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -6 \end{vmatrix}$$

**Задача 2.** Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -4 \\ x + 3y - z = 11 \\ x - 2y + 2z = -7 \end{cases}$$

**Задача 3.** Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 7 & 2 & -2 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Вариант 12

**Задача 1.** Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

**Задача 2.** Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 7 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + 2y + z = 6 \end{cases}$$

**Задача 3.** Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

## Вариант 13

**Задача 1.** Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

**Задача 2.** Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 12 \\ 3x + 4y - 2z = 6 \\ 2x - y - z = -9 \end{cases}$$



**Задача 3.** Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

### Вариант 14

**Задача 1.** Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

**Задача 2.** Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 3 \\ x + y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -3 \end{cases}$$

**Задача 3.** Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

### Вариант 15

**Задача 1.** Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 4 & -8 & 2 \\ 1 & -5 & 4 \end{vmatrix}$$

**Задача 2.** Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 31 \\ 5x + y + 2z = 29 \\ 3x - y - z = 10 \end{cases}$$

**Задача 3.** Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ -3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 23 & 6 \\ -53 & 0 \\ 11 & 2 \end{pmatrix} - 8 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

## Вариант 16

**Задача 1.** Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

**Задача 2.** Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$$

**Задача 3.** Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

## Вариант 17

**Задача 1.** Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

**Задача 2.** Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2 \\ 4x - 5y + 2z = 1 \\ 5x - 6y + 4z = 3 \end{cases}$$

**Задача 3.** Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

## Вариант 18

**Задача 1.** Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

**Задача 2.** Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 8 \\ 2x + 4y - 5z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

**Задача 3.** Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -7 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

## Вариант 19

**Задача 1.** Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -7 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

**Задача 2.** Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = 15 \\ 3x - y + z = 8 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases}$$

**Задача 3.** Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

## Вариант 20

**Задача 1.** Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

**Задача 2.** Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = -5 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$$

**Задача 3.** Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 5E$$

## Вариант 21

**Задача 1.** Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -13 & 2 & -5 \\ 22 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

**Задача 2.** Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} x + 6y - 2z = 17 \\ 4x - y + 5z = -21 \\ x + 3y - z = 8 \end{cases}$$

**Задача 3.** Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & -7 \end{pmatrix}^2 + 2 \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}^2$$

## Вариант 22

**Задача 1.** Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -5 \\ 22 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

**Задача 2.** Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 3x - y + z = -2 \\ 3y - 2z = 12 \\ 2x + 5y = 12 \end{cases}$$

**Задача 3.** Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 13 & 0 \end{pmatrix}^2 + 3 \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 13 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 6 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 13 & 0 \end{pmatrix}$$

### Вариант 23

**Задача 1.** Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & -7 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 12 & -5 & 6 \end{vmatrix}$$

**Задача 2.** Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15 \\ 5x - 3y + 2z = 15 \\ 10x - 11y + 5z = 36 \end{cases}$$

**Задача 3.** Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

### Вариант 24

**Задача 1.** Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

**Задача 2.** Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 3z = 16 \\ 5y - z = 10 \end{cases}$$

**Задача 3.** Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 7) - 5 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 7 \\ -12 & 1 \end{pmatrix}$$

## Вариант 25

**Задача 1.** Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

**Задача 2.** Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = -2 \\ 2x + y + 6z = 9 \\ 4x + 2z = 6 \end{cases}$$

**Задача 3.** Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

## Вариант 26

**Задача 1.** Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

**Задача 2.** Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} -x + 3y + 5z = -9 \\ 2x - 3y - 7z = 12 \\ 2x - 3y - 5z = 10 \end{cases}$$

**Задача 3.** Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

## Вариант 27

**Задача 1.** Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

**Задача 2.** Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера

$$\begin{cases} -x + 2y + 4z = 9 \\ -3x + 2y + z = 1 \\ 4x + 5y + 3z = 16 \end{cases}$$

**Задача 3.** Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 1 \\ 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

## Вариант 28

**Задача 1.** Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -7 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

**Задача 2.** Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера

$$\begin{cases} -x + 3y + 5z = -9 \\ 2x - 3y - 7z = 12 \\ 2x - 3y - 5z = 10 \end{cases}$$

**Задача 3.** Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & -1 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -4 \\ 5 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

## Вариант 29

**Задача 1.** Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & -9 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

**Задача 2.** Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера

$$\begin{cases} x-y-3z=10 \\ 2x-y-2z=9 \\ -x+3y+2z=-5 \end{cases}$$

**Задача 3.** Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

### Вариант 30

**Задача 1.** Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & -9 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

**Задача 2.** Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера

$$\begin{cases} 4x+3y+z=1 \\ 2x+y+3z=5 \\ 3x+2y+4z=7 \end{cases}$$

**Задача 3.** Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 1 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №9.

Тема: «Действия над комплексными числами в алгебраической форме».

### ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Повторить знания по теме: «Действия над комплексными числами в алгебраической форме».
2. Организовать деятельность обучающихся по переводу своих знаний от усвоения отдельных фактов и понятий к их обобщению в целостную систему знаний.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** инструкционно -технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.



### Справочный материал:

Мнимая единица  $i$ ,  $i^2 = -1$ .

*Алгебраическая форма комплексного числа.*

$z = a + ib$ , где  $a, b$  – действительные числа;

$a$  – действительная часть комплексного числа,

$b$  – мнимая часть комплексного числа;

Обозначения действительной и мнимой части:  $a = \operatorname{Re} z, b = \operatorname{Im} z$ .

Модуль комплексного числа:  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Сопряжённые комплексные числа:  $z = a + ib$  и  $\bar{z} = a - ib$ .

*Действия над комплексными числами в алгебраической форме.*

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2);$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2);$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) - i(a_1 b_2 + b_1 a_2)}{a_2^2 + b_2^2}.$$

### Пример:

#### Решение:

$$z_1 + z_2 = 5 + 2i + 2 - 5i = 7 - 3i$$

$$z_1 - z_2 = 5 + 2i - (2 - 5i) = 5 + 2i - 2 + 5i = 3 + 7i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (5 + 2i) \cdot (2 - 5i) = 10 + 4i - 25i + 10 = 20 - 21i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 + 2i}{2 - 5i} = \frac{(5 + 2i)(2 + 5i)}{(2 - 5i)(2 + 5i)} = \frac{10 + 4i + 25i - 10}{4 + 25} = \frac{29i}{29} = i$$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №10.

Тема: «Действия над комплексными числами в тригонометрической форме».

### ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Повторить знания по теме: «Действия над комплексными числами в тригонометрической форме». 2. Организовать деятельность обучающихся по переводу своих знаний от усвоения отдельных фактов и понятий к их обобщению в целостную систему знаний.

3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** инструкционно - технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

### Справочный материал:

*Тригонометрическая форма комплексного числа.*

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

$\varphi = \arg z = \arctg \frac{b}{a}$  - аргумент комплексного числа,  $-\pi < \arg z \leq \pi$ .

Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной форме.

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

Формула Муавра:  $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$

## Содержание работы:

### Вариант № 1.

1. Представьте в алгебраической форме комплексное число:

- 1)  $z = 3(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$ ;
- 2)  $z = \sqrt{2}(\cos \pi/2 + i \sin \pi/2)$ ;
- 3)  $z = 2(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)$ ;
- 4)  $z = 4(\cos(-\pi/3) + i \sin(-\pi/3))$ ;
- 5)  $z = \cos \pi + i \sin \pi$ .

2. Выполнить действия:

- 1)  $2(\cos 130^\circ + i \sin 130^\circ) \cdot 4(\cos 140^\circ + i \sin 140^\circ)$ ;
- 2)  $3(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4) \cdot \sqrt{3}(\cos \pi/12 + i \sin \pi/12)$ ;
- 3)  $(\cos 5\pi/6 + i \sin 5\pi/6) \cdot \sqrt{2}(\cos(-\pi/12) + i \sin(-\pi/12))$ ;
- 4)  $5(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) \cdot (\cos 80^\circ + i \sin 80^\circ) \cdot 4(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ)$ .

### Вариант № 2.

1. Представьте в алгебраической форме комплексное число:

- 1)  $z = \sqrt{3}(\cos(-\pi/2) + i \sin(-\pi/2))$ ;
- 2)  $z = \sqrt{2}(\cos \pi/12 + i \sin \pi/12)$ ;
- 3)  $z = 6(\cos 2\pi/9 + i \sin 2\pi/9)$ ;
- 4)  $x = \cos 24 + i \sin 24$ ;
- 5)  $z = 5(\cos \pi/6 + i \sin \pi/6)$ .

2. Выполнить действия:

- 1)  $(\cos 3 + i \sin 3)(\cos 2 + i \sin 2)$ ;
- 2)  $6(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ) : (2(\cos(-50^\circ) + i \sin(-50^\circ)))$ ;
- 3)  $4(\cos 5\pi/12 + i \sin 5\pi/12) : (\cos \pi/12 + i \sin \pi/12)$ ;
- 4)  $3(\cos(-5\pi/6) + i \sin(-5\pi/6)) : (\sqrt{3}(\cos(-\pi/6) + i \sin(-\pi/6)))$ .

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №11.

Тема: «Действия над комплексными числами в показательной форме».

### ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Повторить знания по теме: «Действия над комплексными числами в показательной форме».

2. Организовать деятельность обучающихся по переводу своих знаний от усвоения отдельных фактов и понятий к их обобщению в целостную систему знаний.

3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** инструкционно - технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

**Справочный материал:**

1. Показательная и тригонометрические функции в области комплексных чисел связаны между собой формулой

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

которая носит название *формулы Эйлера*.

Пусть комплексное число  $z$  в тригонометрической форме имеет вид

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

. На основании формулы Эйлера выражение в скобках можно заменить на показательное выражение. В результате получим

$$z = r e^{i\varphi}.$$

Эта запись называется *показательной формой* комплексного числа.

Так же, как и в тригонометрической форме, здесь  $r = |z|$ ,  $\varphi = \arg z$ .

2. Действия над комплексными числами в показательной форме:

2.1. Произведением двух комплексных чисел называется такое комплексное число, модуль которого равен произведению модулей сомножителей, а аргумент – сумме аргументов сомножителей.

Это определение совершенно очевидно, если использовать показательную форму комплексного числа:

$$z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}, \quad z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \cdot \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1 \cdot \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

2.2. Модуль частного равен частному модулей делимого и делителя, а аргумент частного равен разности аргументов делимого и делителя.

$$z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}, \quad z_1 \div z_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

**Пример 1:** Пусть  $z = -1 + i$ . Напишите показательную форму числа  $z$ .

**Решение.** Находим модуль и аргумент числа:

$$r = |z| = \sqrt{2}, \quad \varphi = \arg z = \frac{3\pi}{4}.$$

Следовательно, показательная форма комплексного числа такова:

$$z = \sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4}i}.$$

**Пример 2:** Комплексное число записано в показательной форме

$$z = 2e^{\frac{\pi}{6}i}.$$

Найдите его алгебраическую форму.

**Решение.** По формуле Эйлера

$$z = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} + i.$$

Итак, алгебраическая форма числа:  $z = \sqrt{3} + i$ .

### Содержание работы:

1. Представьте в алгебраической и тригонометрической формах числа:

- 1)  $3e^{i(2\pi/3)}$ ;
- 2)  $4e^{-i(\pi/4)}$ ;
- 3)  $e^i$ ;
- 4)  $e^{0 \cdot i}$ ;
- 5)  $2e^{i(\pi/2)}$ .

2. Выполните действия. Результат запишите в показательной, тригонометрической и алгебраической формах:

- 1)  $2e^{i(7\pi/18)} \cdot 3e^{i(11\pi/18)}$ ;
- 2)  $e^{i(\pi/6)} \cdot 4e^{i(\pi/12)}$ ;
- 3)  $6e^i : (3e^{-i})$ .

3. Представив числа  $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$  и  $z_2 = \sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2$  в показательной форме, вычислите:

- 1)  $z_1 \cdot z_2$ ;
- 2)  $z_1 / z_2$ ;
- 3)  $z_2 / z_1$ .

4. Выполните действия, используя показательную формулу комплексного числа:

$$\frac{(-1 + i\sqrt{3})^{15}}{(1 - i)^{20}}$$

1. Представьте в алгебраической и тригонометрической формах числа:

- 1)  $5e^{-i(\pi/2)}$ ;
- 2)  $\sqrt{2}e^{i\pi}$ ;
- 3)  $3e^{i \cdot 2\pi}$ ;
- 4)  $6e^{1.5i}$ ;
- 5)  $14e^{-i(17\pi/90)}$ .

2. Выполните действия. Результат запишите в показательной, тригонометрической

и алгебраической формах:

- 1)  $4e^{i(5\pi/9)} \cdot (\sqrt{2}e^{i(\pi/9)})$ ;
- 2)  $(\sqrt{2}e^{i(2\pi/9)})^3$ ;
- 3)  $(2e^{i(7\pi/9)})^{10}$ .

3. Представив числа  $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$  и  $z_2 = \sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2$  в показательной форме, вычислите:

- 1)  $z_1^6$ ;
- 2)  $z_2^4$ ;
- 3)  $z_1$ .

4. Выполните действия, используя показательную формулу комплексного числа:

$$\frac{(-1 - i\sqrt{3})^{15}}{(1 + i)^{20}}$$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №12.

Тема: «Векторы и прямая на плоскости».

### ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Повторить знания по теме: «Векторы и прямая на плоскости».
2. Организовать деятельность обучающихся по переводу своих знаний от усвоения отдельных фактов и понятий к их обобщению в целостную систему знаний.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** инструкционно - технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

### Содержание работы

#### Вопросы к теме:

1. Дайте определение произведения вектора на число.
2. Дайте определение суммы векторов.
3. Дайте определение разности векторов.
4. Дайте определение скалярного произведения векторов.
5. Сформулируйте условие коллинеарности векторов.
6. Сформулируйте условие перпендикулярности векторов.
7. Дайте определение угла между векторами.
8. Как вычисляется угол между векторами?
9. Сформулируйте свойства сложения векторов.
10. Сформулируйте свойства вычитания векторов.
11. Сформулируйте свойства умножения вектора на число.
12. Сформулируйте свойства скалярного произведения векторов.
13. Дайте определение линейной комбинации векторов.
14. Дайте определение линейной зависимости векторов.

### Выполнить задания:

1. Откройте программу Geometer's Sketchpad, отобразите прямоугольную систему координат.
2. Постройте вектор  $\vec{a}(-3,4)$ .
3. Постройте вектор  $\vec{b}(2,6)$  с началом в точке  $(5,2)$ .
4. Постройте вектор  $\vec{c}$  равный вектору  $\vec{b}$ , с началом в точке  $(6,-6)$ .
  - Преобразуйте вектор  $\vec{c}$  в вектор, противоположный вектору  $\vec{b}$ . Каковы его координаты?
  - Преобразуйте вектор  $\vec{c}$  в вектор, сонаправленный с вектором  $\vec{b}$ , длина которого в два раза больше длины вектора  $\vec{b}$ . Каковы его координаты? Проверьте свой ответ, сравнив их модули.
  - Преобразуйте вектор  $\vec{c}$  в вектор, противоположно направленный вектору  $\vec{b}$ , длина которого в два раза меньше длины вектора  $\vec{b}$ . Каковы его координаты? Проверьте свой ответ, сравнив их модули.
5. Постройте вектор, равный сумме векторов  $\vec{a} + \vec{b}$ . Каковы его координаты?
6. Постройте вектор, равный сумме векторов  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ . Каковы его координаты?
7. Постройте вектор, равный разности векторов  $\vec{a} - \vec{b}$ . Каковы его координаты?
8. Постройте вектор, равный разности векторов  $\vec{c} - \vec{a}$ . Каковы его координаты?
9. Вычислите скалярное произведение векторов  $\vec{a} + \vec{b}$ . Экспериментально определите при каком взаимном расположении двух векторов их скалярное произведение положительно, отрицательно, равно нулю.
10. Постройте единичный вектор, параллельный оси ОХ. Определите его координаты. Сколько существует таких различных векторов?
11. Экспериментально определите координаты середины отрезка (любого). Сформулируйте правило, докажите его.

### Материал для самостоятельной работы

1. Среди  $\vec{a}(1,4)$ ,  $\vec{b}(4,1)$ ,  $\vec{c}(0,3)$ ,  $\vec{d}(8,2)$ ,  $\vec{e}(-4,-1)$ ,  $\vec{f}(-6,-2)$ ,  $\vec{g}(0.6,0.8)$ ,  $\vec{h}(-8,-2)$ ,  $\vec{k}(-2,0)$ ,  $\vec{t}(8,-2)$ , определите:
  - коллинеарные векторы;
  - сонаправленные векторы;
  - противоположно направленные векторы;
  - противоположные векторы;
  - векторы, параллельные координатным осям;
  - единичные векторы;
  - равные векторы.
2. Геометрически постройте сумму векторов и определите их координаты:  $\vec{b} + \vec{t}$ ;  $\vec{a} + \vec{c} + \vec{e}$ .
3. Не выполняя построений, определите координаты вектора  $\vec{d} + \vec{k} + \vec{f}$ .
4. Определите вид треугольника ABC, если  $B(-4,6)$  и  $C(10,-2)$ .
5. Представьте вектор  $\vec{e}(5,10)$  в виде линейной комбинации векторов  $\vec{f}(-13,4)$  и  $\vec{g}(-9,-3)$ .

6. Задайте треугольник координатами вершин. Вычислите координаты центра этого треугольника.

7. Задайте координатами вершин правильный треугольник.

### **КИМ для самоконтроля**

Если координаты двух векторов пропорциональны, то векторы:

- равные
- компланарные
- коллинеарные
- ортогональные

Если скалярное произведение двух векторов равно нулю, то векторы:

- равные
- противоположные
- коллинеарные
- ортогональные

Скалярное произведение двух векторов равно:

- произведению модулей векторов и синуса угла между ними
- произведению модулей векторов и косинуса угла между ними
- произведению суммы модулей векторов и косинуса угла между ними
- произведению модулей векторов

Скалярное произведение векторов равно:

- произведению сумм соответствующих координат
- произведению координат векторов
- сумме произведений соответствующих координат векторов
- разности произведений соответствующих координат векторов

Если вектор умножить на число  $-0,5$ , то получим вектор:

- сонаправленный с данным, длина которого в 2 раза меньше данного
- сонаправленный с данным, длина которого в 2 раза больше данного
- противоположно направленный, длина которого в 2 раза меньше данного
- противоположно направленный, длина которого в 2 раза больше данного

Векторы коллинеарны, если:

- координаты одного обратны координатам другого
- координаты одного пропорциональны координатам другого
- разноименные координаты их равны
- их скалярное произведение равно нулю

Векторы ортогональны, если:

- их координаты пропорциональны
- их координаты взаимно обратны
- их скалярное произведение равно 1
- их скалярное произведение равно 0

Если скалярное произведение векторов равно произведению их модулей, то векторы:

- образуют угол  $45^\circ$
- образуют угол  $0^\circ$
- противоположные
- перпендикулярные

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №13.

Тема: «Кривые второго порядка».

### ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Повторить знания по теме: «Кривые второго порядка».
2. Организовать деятельность обучающихся по переводу своих знаний от усвоения отдельных фактов и понятий к их обобщению в целостную систему знаний.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** инструкционно -технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

### Содержание работы

#### 1.Эллипс

#### Вопросы к теме:

1. Сформулируйте определение эллипса, его характеристическое свойство.
2. Какой вид имеет каноническое уравнение эллипса?
3. Какой вид имеют параметрические уравнения эллипса?
4. Что называют осями эллипса?
5. Как связаны полуоси эллипса с его уравнением?
- 6.

#### Практические задания

Откройте программу Geometer's Sketchpad. Откройте документ *Эллипс*. Исследуя работу модели, определите:

- правило построения точек эллипса циркулем и линейкой;
- форму эллипса при  $c \rightarrow 0$ ;
- форму эллипса при  $c \rightarrow a$ .

Средствами математического пакета MathCad:

1. постройте эллипс  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ , определите координаты его фокусов.

2. постройте эллипс  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ , определите координаты его фокусов.

3. Предложите способ доказательства симметричности эллипса  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

относительно его координатных осей и начала координат.

4. Постройте окружность с центром (0,0) и диаметром 10.

5. Постройте эллипс, расстояние между фокусами которого равно 8, а большая ось равна 10.

6. Постройте эллипс, проходящий через точки (5, 1) и (-1, 3).

7. Постройте эллипс  $\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{36} = 1$ , определите графически положение точек A(6, -3),

B(-2, 5), C(3, -6), D(8,0), E(2,2). Сформулируйте правило определения взаимного расположения точек и эллипса аналитически.



8. Постройте эллипс  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ , вычислите длину диаметра эллипса, составляющего угол  $30^\circ$  с положительным направлением оси ОХ.

### Материал для самостоятельной работы

1. Постройте линию, заданную уравнением:  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$
2. Постройте линию, заданную уравнением:  $x^2 + y^2 = 25$
3. Постройте эллипс, большая ось которого 4, малая – 1
4. Постройте эллипс, большая ось которого 10, расстояние между фокусами – 8
5. Постройте эллипс, проходящий через точки  $(\sqrt{3}, -2)$ ;  $(-2\sqrt{3}, 1)$
6. Постройте окружность с центром в точке  $(1, 2)$  и радиусом 3
7. Постройте эллипс с центром в точке  $(2, -3)$  и эксцентриситетом 0,5

### КИМ для самоконтроля

1. Найдите геометрическое место точек, для которых расстояние до точки  $A(4, 0)$  вдвое больше расстояния до точки  $B(1, 0)$ .
2. Определите, какое из предложенных уравнений описывает касательную к эллипсу в точке  $(x_0, y_0)$ , заданному в канонической форме:  
$$- y = \frac{a}{b} x + x_0 y_0;$$
$$- \frac{x_0}{a^2} x + \frac{y_0}{b^2} y = 1;$$
$$- ax + by + x_0 y_0 = 0.$$
3. Как оно соотносится с уравнением эллипса?
4. Напишите уравнение касательной к эллипсу  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{3} = 1$  в точке, имеющей абсциссу, равную 4.

## 2. Гипербола. Парабола.

### Вопросы к теме:

1. Сформулируйте определение гиперболы, ее характеристическое свойство
2. Какой вид имеет каноническое уравнение гиперболы?
3. Как построить асимптоты гиперболы? Какими уравнениями они задаются?
4. Сформулируйте определение параболы, ее характеристическое свойство
5. Какой вид имеет каноническое уравнение параболы?
6. Какое уравнение имеет директриса параболы?
- 7.

### Практические задания

1. Откройте программу Geometer's Sketchpad. Откройте документ *Гипербола*. Исследуя работу модели, определите:
  - правило построения точек гиперболы циркулем и линейкой;
  - форму гиперболы при  $c \rightarrow 0$ ;
  - форму гиперболы при  $c \rightarrow a$ .
2. Откройте документ *Парабола*. Исследуя работу модели, определите:

- правило построения точек параболы циркулем и линейкой;
- форму параболы при стремлении расстояния между фокусом и директрисой к 0;
- форму параболы при стремлении расстояния между фокусом и директрисой к  $\infty$

Средствами математического пакета MathCad:

1. Постройте гиперболу  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ . Определите координаты вершин. Чем уравнение отличается от предыдущего уравнения?
2. Постройте линию  $-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$ . Определите координаты вершин. Чем уравнение отличается от предыдущего уравнения?
3. Как связано расстояние между вершинами с коэффициентами уравнения?
4. Постройте линии:  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ ,  $y = \frac{4}{5}x$ ,  $y = -\frac{4}{5}x$ . Как связаны эти уравнения?
5. Постройте гиперболу, угол между асимптотами которой равен  $90^\circ$ .
6. Исследуйте гиперболу на симметрии.
7. Параболу, заданную уравнением  $y^2 = 8x$ . Определите координаты ее фокуса. Постройте ее директрису
8. Параболу, располагающуюся:
  - во II и III четвертях
  - в I и II четвертях
  - в III и IV четвертях
9. Экспериментально определите, какая из прямых является касательной к гиперболе в ее точке  $M(x_0, y_0)$ 
  - $\frac{a^2}{x_0} x - \frac{y_0}{b^2} = 1$
  - $\frac{x_0}{a^2} x - \frac{y_0}{b^2} = 1$
  - $\frac{a^2}{x_0} x + \frac{y_0}{b^2} = 1$
  - $\frac{x_0}{a^2} x + \frac{y_0}{b^2} = 1$
10. Постройте касательную к линии  $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{9} = 1$ , проходящую через точку (2;0)
11. Экспериментально определите, какая из прямых является касательной к параболе в ее точке  $M(x_0, y_0)$ 
  - $yy_0 = p(x - x_0)$
  - $yy_0 = p(x + x_0)$
12. Постройте касательную к параболу  $y^2 = 10x$  в точке (2,5;5)

### Материал для самостоятельной работы

1. Постройте гиперболу, действительная ось которой параллельна оси ОУ, расстояние между фокусами равно 8, центр в точке (-4,-2).
2. Постройте параболу, проходящую через точку (3,4), вершина в точке (1,2).
3. Постройте окружность, вписанную в параболу  $y^2 = 12x - 5$ .
4. Решите графически системы уравнений:
 
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 32 \\ x^2 + y^2 = 18 \end{cases}$$

$=1;$

$|3x + 4y - 24 = 0.$

$$\begin{aligned}
& - \begin{cases} \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1; \\ x + y - 5 = 0. \end{cases} \\
& - \begin{cases} y^2 = 4x; \\ 5x - y + 6 = 0. \end{cases} \\
& - \begin{cases} y = -6x; \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}
\end{aligned}$$

### КИМ для самоконтроля

- Составьте уравнение параболы (+ постройте):
  - Расстояние от фокуса, лежащего на оси ОХ, до вершины равно 4.
  - Парабола симметрична относительно оси ординат и проходит через точку М(5,1).
    - Фокус имеет координаты (3,0).
    - Директриса имеет уравнение  $x+15=0$ .
- Составьте уравнение гиперболы (+ постройте):
  - Расстояние между вершинами равно 8, расстояние между фокусами равно 10.
  - Действительная полуось равна 3, гипербола проходит через точку  $(6, 2\sqrt{3})$ .
  - Угол между асимптотами равен  $60^\circ$ , гипербола проходит через точку  $(4\sqrt{3}, 2)$ .
- Вычислите сторону правильного треугольника, вписанного в параболу  $y^2=4x$ , если одна из вершин треугольника совпадает с вершиной параболы.
- Постройте параболу, заданную в канонической форме, проходящей через точку (6,3).
- Постройте прямую, проходящую через фокус параболы  $y^2 = 18x$  перпендикулярно ее оси.

### 3. Циклоидальные кривые.

#### Вопросы к теме:

- Дайте определение каждой линии
- Каким уравнением описывается каждая из линий?
- От чего зависит форма каждой линии?
- В какой зависимости находятся величины R и r?
- Что называют модулем линии (m)?

#### Практические задания

- Откройте программу MathCad. Откройте документ *Циклоидальные кривые*
- Используя модель, выявите правило построения эпициклоиды, гипоциклоиды
- Рассмотрите частные случаи линий:
  - Кардиоида ( $m=1$ )
  - Астроида ( $m=-1/4$ )
  - Кривая Штейнера ( $m=-1/3$ )
- Используя возможности среды Geometer's Sketchpad постройте:
  - Эпициклоиду:  $m=1/3$ ,  $m=2/3$
  - Гипоциклоиду:  $m=-1/5$ ,  $m=-2/5$

## Материал для самостоятельной работы

1. Постройте циклоиду
2. Эпициклоиду:  $m=6/5$
3. Гипоциклоиду:  $m=-5/4$

## КИМ для самоконтроля

1. Составьте план построения циклоиды
2. Составьте план построения эпициклоиды
3. Составьте план построения гипоциклоиды

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 14.

Тема: «Вычисление пределов функции в точке и на бесконечности».

### ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Вычисление пределов функции в точке и на бесконечности».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.

### Справочный материал.

#### Основные теоремы о пределах

$$\lim(x + y) = \lim x + \lim y; (1)$$

$$\lim(x - y) = \lim x - \lim y; (1^*), \text{ то из условий}(1) \text{ и } (1^*) \Rightarrow \lim(x \pm y) = \lim x \pm \lim y;$$

$$\lim(xy) = \lim x \lim y; (2) \quad \lim(x^m) = (\lim x)^m (3) \quad \lim \sqrt[m]{x} = \sqrt[m]{\lim x}, (4)$$

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}, \text{ если } \lim y \neq 0 (5) \quad \lim(\log_a x) = \log_a(\lim x) (6)$$

Запомните, что

$$\lim \frac{\sin x}{x} = 1, \text{ при } x \rightarrow 0 \text{ (Первый замечательный предел)}$$

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \text{ при } n \rightarrow \infty - \text{ число } e; e \approx 2,71828 \text{ — основание натуральных}$$

логарифмов; (логарифм числа  $x$  по основанию  $e$  называется натуральным логарифмом и обозначается  $\ln x$ ).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \quad (\text{второй замечательный предел})$$

При  $x \rightarrow \infty$ ; или при  $\alpha \rightarrow 0$ .

2. Рассмотрите решение следующих примеров:

**Пример 1.** Найти  $\lim (x^4 - 3x^2 + 16x + 1)$ , при  $x \rightarrow -1$

Решение.  $\lim (x^4 - 3x^2 + 16x + 1) = (\lim x^4 - \lim 3x^2 + 16x + 1) = [(\lim x)^4 - 3(\lim x)^2 + 16\lim x + 1] =$

$$=(-1)^4 - 3(-1)^2 + 16(-1) + 1 = -17 \quad \text{Ответ.} - 17.$$

Примечание. Для нахождения предела целого или дробного рационального алгебраического выражения, если предел знаменателя не равен нулю, надо переменную  $x$  заменить ее пределом и произвести указанные в выражении действия. Например,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 5}{x^3 + x + 1} = \frac{2 \cdot 2^2 - 2 - 5}{2^3 + 2 + 1} = \frac{1}{11}$$

**Пример 2.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 2x^2}{5x^3 - 3x^2}$

Решение. Применить теорему о пределе дроби (частного) нельзя, т.к. при  $x \rightarrow 0$   
 $\lim (5x^3 - 3x^2) = 0$

До перехода к пределу следует упростить данную дробь:

$$\frac{2x^3 + 2x^2}{5x^3 - 3x^2} = \frac{2x^2(x+1)}{x^2(5x-3)} = \frac{2(x+1)}{5x-3}$$

Предел знаменателя

$$\lim_{x \rightarrow 0} (5x-3) = \lim_{x \rightarrow 0} (5x) - 3 = 0 - 3 = -3 \neq 0$$

Применяя теперь теорему о пределе дроби (частного), получим:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 2x^2}{5x^3 - 3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2(x+1)}{x^2(5x-3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(x+1)}{5x-3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 2(x+1)}{\lim_{x \rightarrow 0} (5x-3)} = \frac{2 \lim_{x \rightarrow 0} (x+1)}{\lim_{x \rightarrow 0} (x-3)} = -\frac{2}{3}$$

Ответ.  $-2/3$

**Пример 3:** Найти  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{3x+1}$

Решение.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{3x+1} = \frac{5}{\lim_{x \rightarrow \infty} (3x+1)} = \frac{5}{3 \lim_{x \rightarrow \infty} x + 1} = \frac{5}{\infty} = 0$  Ответ. 0.

**Пример 4.** Найти  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{2x^3 + 1}$

Решение. Числитель и знаменатель дроби превращаются в бесконечность, а их отношение не имеет смысла. Поэтому преобразуем дробь, разделив числитель и знаменатель дроби на наивысшую степень аргумента, т.е. на  $x^3$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{2x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{2 + \frac{1}{x^3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x^3})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (2 + \frac{1}{x^3})} = \frac{1}{2} \quad \text{Ответ. } 1/2.$$

**Пример 5.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$

Решение. Применить теорему о пределе дроби нельзя, т.к. предел знаменателя равен нулю.

Перепишем данное выражение так:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin 4x}{4x} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x}, \quad \text{Применяя формулу } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \text{ получим:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 4 \cdot 1 = 4 \quad \text{Ответ. } 4.$$

**Пример 6.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

$\lim_{x \rightarrow 0}$

$$x^2-x-20$$

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{\phantom{x}}$$

Решение. применить теорему о пределе частного нельзя, т.. при  $x=5$  числитель и знаменатель обращаются в нуль. Перепишем данную дробь в виде

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x^2-x-20} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{(x+4)(x-5)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{(\sqrt{x}+\sqrt{5})} = \frac{x-5}{(x+4)(x-5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})} = \frac{1}{(x+4)(\sqrt{x}+\sqrt{5})},$$

Переходя к пределу, получим:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x^2-x-20} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x+4)(\sqrt{x}+\sqrt{5})} = \frac{1}{18\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{90}$$

$$\text{Либо: } \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x^2-x-20} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{(x+4)(x-5)} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{(x+4)(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})} = \frac{1}{(x+4)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}.$$

Ответ.  $\frac{\sqrt{5}}{90}$

3. Вычисление пределов и раскрытие неопределенностей вида  $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [1^\infty]$ .

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cos 5x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) 3x \cos(5x)}{3x \sin(5x) 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \cos 5x}{5x} = \frac{3}{5}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-1}{5x^2+2x} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-\frac{1}{x^2}}{5+\frac{2}{x}} = \frac{3}{5}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+5x}{x+10} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{5}{x^2}}{1+\frac{10}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+6}{x^4+10} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^4} + \frac{6}{x^4}}{1 + \frac{10}{x^4}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+5}\right)^{2x+1} = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left|1 + \frac{1}{x+5}\right|^{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{2x+1}{x+5}} = e^2$$

## Содержание работы

### Самостоятельно решить задачи и вычислить пределы:

1. При параллельном соединении двух проводников, имеющих сопротивления  $r$  и  $r'$ , общее сопротивление  $R$ , соответствующей части электрической цепи, вычисляется по формуле

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'}. \quad \text{Считая } r \text{ известным, найти } \lim_{r' \rightarrow \infty} R; \quad \lim_{r' \rightarrow 0} R.$$

Истолкуйте полученные результаты с точки зрения физики.

2. Формула выпуклой линзы имеет вид:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}, \quad d, f - \text{ Расстояния } \quad \text{соответственно} \quad \text{предмета}$$

и его изображения. — фокусное расстояние линзы ( $\text{const}$ ); найти



$\lim_{d \rightarrow \infty} f$ ;  $\lim_{d \rightarrow F} f$ . (1)  $d < F$ ; (2)  $d > F$ ); полученные результаты объяснить с точки зрения физики.

#### 4. Вычислить следующие пределы:

$$1. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x^2-25} = \left[ \frac{0}{0} \right]$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \left[ \frac{0}{0} \right]$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-1}{5x^2+2x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+5}{x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+10}{x^2+6} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n+5} \right)^n = (1^\infty)$$

$$15. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x+5} \right)^x$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x-7}{(x^2-49)^{3x}}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3+3x^2-8}{5x^3-7x+3}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} x+15$$

$$x \rightarrow \infty \quad \frac{x^4+7}{x^5-5x^4+9}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5-5x^4+9}{4x^5+2x^3-7}$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left( 1 + \frac{4}{n} \right)^n \right|^2$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+9}{x} \right)^x$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{1}{x+5}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{x}$$

#### Оформить отчет и сдать на проверку

**Домашнее задание. Решить (на выбор) любые 2 задачи с последующим объяснением на занятиях**

1. Масса движущегося тела определяется соотношением  $m(\beta) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$  и  $\beta = \frac{v}{c}$  -

отношение скорости тела к скорости света. Покажите, что в предельном переходе при  $\beta \rightarrow 0$  массу можно считать постоянной и равной  $m_0$ .

2. Интервал времени между двумя событиями зависит от скорости движения системы,

где эти события происходят, следующим образом:

$$\Delta t(v) = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad \text{При } v \rightarrow c \text{ найдите предел функции } \Delta t(v) \text{ и сделайте вывод,}$$

считая, например, что  $\Delta t_0$  - продолжение жизни близнеца, оставшегося на Земле, а  $\Delta t$  - продолжительность жизни его брата, отправившегося в космическое путешествие.

3. Значение кинетической энергии тела выражается формулой

$$E_{kin}(\beta) = \frac{m_0 v^2}{1 + \sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad \text{Найдите предел этой функции,}$$

т.е. получите классическую формулу для кинетической энергии, если  $\beta \rightarrow 0$ .

4. Сила давления летчика, совершающего «мертвую петлю», на сиденье в момент достижения верхней точки «мертвой петли» выражается формулой  $\varphi = m(a - g)$ , где  $a = v^2/r$  - центростремительное (нормальное) ускорение,  $r$  - радиус петли. Рассматривая

данные выражения как функцию центростремительного ускорения, докажите, что при предельном переходе  $a \rightarrow g$  летчик испытывает состояние невесомости.

5. Сила давления летчика на сиденье в нижней точке «мертвой петли» определяется формулой  $Q = m(g + v^2/r)$ ,  $m$  – масса летчика,  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ .

Рассматривая данное выражение как функцию от  $r$ , найдите ее предел при: а)  $r \rightarrow \infty$ ; б)  $r \rightarrow 0$ . Сделайте соответствующие выводы.

6. В падающем с ускорением  $a$  лифте тело давит на пол кабины с силой  $P = m(a - g)$ ,  $g$  – ускорение свободного падения. Рассматривая данный процесс как функцию от  $a$ , найдите ее предел при а)  $a \rightarrow g$ ; б)  $a \rightarrow 0$ .

**Сделайте выводы.**

**Таблица ответов**

№ Зада-ния	1 ача	2 ача	3 задача	4 задание						
				1	2	3	4	5	6	7
Максимальное количество баллов	3	3	3	1	1	1	2	2	2	2
Набранные баллы										
	4 задание									
№ Зада-я	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Сум- м ллов
Максимальное количество баллов	2	2	2	2	2	3	3	4	4	44
Набранные баллы										

**Таблица перевода баллов в оценку**

Набранное количество баллов	Оценка
0 - 15	2 (неудовлетворительно)
16 - 30	3 (удовлетворительно)
31 - 38	4 (хорошо)
39 - 44	5 (отлично)

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 15.

Тема: «Исследование функций на непрерывность».

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:**

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Исследование функций на непрерывность».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.

### Справочный материал.

#### А) Односторонние пределы

Предел слева - это односторонний предел функции, когда последовательность значений аргумента  $x_n \rightarrow x_0$  слева от точки  $x_0$ , т.е.  $x_n < x_0$ , т.е.  $A = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$

Предел справа - это односторонний предел функции, когда последовательность значений аргумента  $x_n \rightarrow x_0$  справа от точки  $x_0$ , т.е.  $x_n > x_0$ , т.е.  $B = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$

Теорема. Функция  $y=f(x)$  имеет в точке  $x_0$  предел тогда и только тогда, когда в этой

точке существуют левый и правый пределы и они равны. В таком случае предел функции в точке равен односторонним пределам

#### Б) Понятие непрерывности функции в точке и на промежутке

Функция называется непрерывной в точке, если существует предел функции в этой точке, и он равен значению функции в этой точке, т.е.  $C = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Функция  $y=f(x)$  непрерывна на промежутке  $(a, b)$ , если она непрерывна в каждой точке этого промежутка. Все основные элементарные функции – постоянная, показательная,

логарифмическая, степенная, тригонометрическая, обратные тригонометрические непрерывные

на своих областях определения.

Теорема. Пусть функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  непрерывны в точке  $x_0$ . Тогда функции  $f_1(x) + f_2(x)$ ,  $f_1(x) \cdot f_2(x)$  и  $f_1(x)/f_2(x)$  будут также непрерывны в точке  $x_0$  (для дроби при  $f_2(x_0) \neq 0$ )

#### В) Классификация точек разрыва

Точки разрыва функции – это точки, в которых функция не является непрерывной.

Пусть  $A = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$  - предел справа для функции  $y = f(x)$ ,  $B = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$  - предел слева,  $C$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  – значение функции в точке  $x_0$ .

Точка  $x_0$  называется точкой устранимого разрыва функции  $f(x)$ , если функция  $f(x)$  в этой точке имеет равные друг другу односторонние пределы, но в точке  $x_0$  функция  $f(x)$  не определена, либо ее значение в этой точке  $f(x_0)$  не равно пределу функции в этой точке, т.е.  $A=B$ ,  $A \neq C$ ,  $B \neq C$

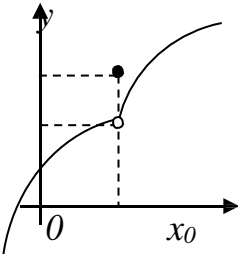
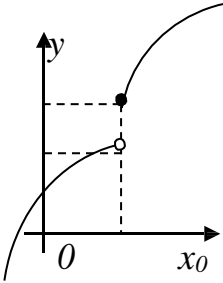
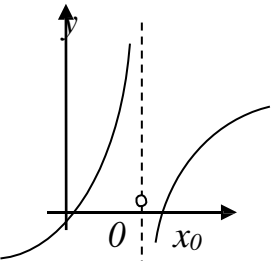
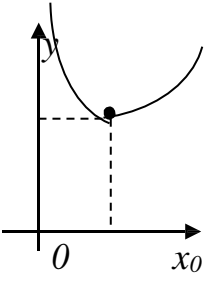
Точка  $x_0$  называется точкой разрыва первого рода, если в этой точке функция  $f(x)$  имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы, т.е.  $A \neq B$ . Модуль разности  $(A-B)$  называется скачком функции в точке  $x_0$ .

Точка  $x_0$  называется точкой разрыва второго рода функции  $f(x)$ , если в этой точке не существует хотя бы одного из односторонних пределов функции  $f(x)$  или хотя бы один из односторонних пределов бесконечен, т.е.  $A = \infty$  либо  $B = \infty$

Точка  $x_0$  является точкой непрерывности, если функция  $f(x)$  определена в этой точке и если в этой точке функция  $f(x)$  имеет равные друг другу односторонние пределы, т.е.  $A=B=C$

Классификация точек разрыва наглядно показана в таблице 1

Таблица 1

Т о ч к а устранимого разрыва	Т о ч к а разрыва первого рода (скачок)	Т о ч к а разрыва второго рода (бесконечный разрыв)	Т о ч к а непрерывности
$A = B,$ $A \neq C, B \neq C$	$A \neq B.$ скачок на $ A - B $ единиц	$A = \infty$ либо $B = \infty$	$A = B = C$
			

## 1. Закрепление

**Задание 1** Исследовать функцию  $y = \begin{cases} -x^3, & x > 1; \\ 2x + 3, & x \leq 1 \end{cases}$  на непрерывность, найти точки разрыва и

определить их тип. Построить график функции.

**Решение:** Для функции  $y = \begin{cases} -x^3, & x > 1; \\ 2x + 3, & x \leq 1 \end{cases}$  точка подозреваемого разрыва  $x = 1$ , т.к. в этой точке

идет смена аналитических выражений. Найдём значения  $A, B, C$  для этой точки

$$\left. \begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 - 0 \\ (x < 1)}} (2x + 3) = 5 \\ B &= \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 + 0 \\ (x > 1)}} (-x^3) = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$C = f(x_0) = f(1) = (2x + 3)|_{x=1} = 2 \cdot 1 + 3 = 5$$

$\Rightarrow A \neq B$ , по таблице классификации точек разрыва определяем:  $A \neq B \Rightarrow x = 1$  - точка разрыва

первого рода, скачок на  $|A - B| = |5 - (-1)| = 6$  единиц.

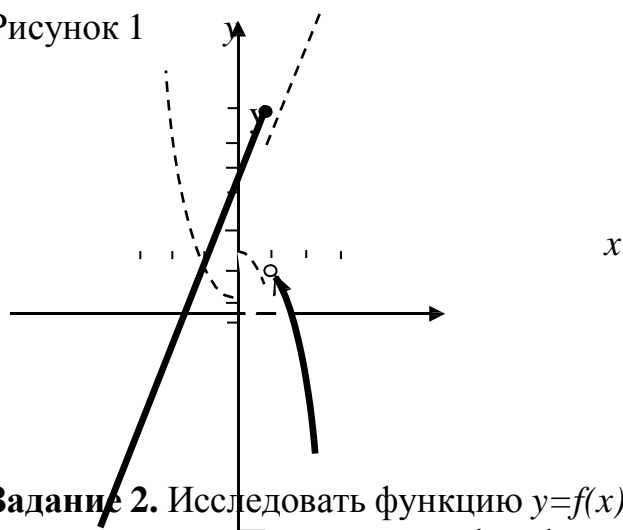
Строим графики функций  $y_1 = -x^3$ ,  $y_2 = 2x + 3$  табличным способом (см. таблицу 2)

Таблица 2

$y_1 = -x^3$ – кубическая парабола	$y = x^3$ <table><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>-1</td><td>-2</td></tr><tr><td>y</td><td>1</td><td>8</td><td>-1</td><td>-8</td></tr></table> функцию $y_1 = -x^3$ строим симметрично функции $y = x^3$ относительно оси Oх	x	1	2	-1	-2	y	1	8	-1	-8
x	1	2	-1	-2							
y	1	8	-1	-8							
$y_2 = 2x + 3$ – прямая	<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>y</td><td>3</td><td>5</td></tr></table>	x	0	1	y	3	5				
x	0	1									
y	3	5									

Примечание:  $y_1$  строим для  $x > 1$ ;  $y_2$  строим для  $x \leq 1$ ; по графику (рисунок 1) проверяем, что скачок на 6 единиц.

Рисунок 1



**Задание 2.** Исследовать функцию  $y = f(x)$  на непрерывность. Найти точки разрыва и определить их тип. Построить график функции.

$$y = \begin{cases} -1 & \\ \sqrt{x+3} & ; x < -3 \\ \sqrt{9-x^2} & ; -3 \leq x \leq 0 \\ 3|x| & ; x > 0 \\ x & \end{cases}$$

**Решение:** Точки  $x = -3$  и  $x = 0$  – подозреваемые на разрыв, т.к. в этих точках идет смена

аналитических выражений. Найдём значения  $A, B, C$  для каждой точки

Исследуем точку  $x = -3$

}

$$A = \lim_{x \rightarrow -3-0} \left( \frac{-1}{x+3} \right) = \left( \frac{-1}{0} \right) = +\infty$$

$$B = \lim_{x \rightarrow -3+0} \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9} = 0$$

$$C = f(-3) = \sqrt{9-x^2} \Big|_{x=-3} = \sqrt{9-9} = 0$$

по таблице классификации точек разрыва определяем:  $A = \infty \Rightarrow x = -3$  точка разрыва II-го рода – бесконечный разрыв

Исследуем точку  $x=0$

$$\left. \begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow 0-0} \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9} = 3 \\ B &= \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} 3 = 3 \\ C &= f(0) = \sqrt{9-0^2} = 3 \end{aligned} \right\}$$

по таблице классификации точек разрыва определяем:  $A = B = C \Rightarrow x = 0$  - точка непрерывности

Строим график функции (рисунок 2):

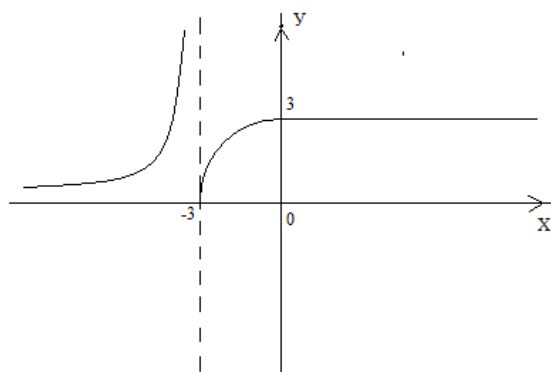
на промежутке  $(-\infty; -3)$  строим график функции  $y = \frac{-1}{x+3}$ . Это гипербола  $y = \frac{1}{x}$  смещенная влево на 3 ед, ветви которой расположены во второй и четвёртой четверти,

на промежутке  $[-3; 0]$  строим график функции  $y = \sqrt{9-x^2}$  - окружность с центром в точке  $(0;0)$ ,  $R=3$ , II четверть, т.к.  $y = \sqrt{9-x^2} \Rightarrow y^2 = 9-x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$ ,

на промежутке  $(0; +\infty)$  – график функции  $y = \frac{3|x|}{x}$ . Так как  $x > 0$ , то  $|x|=x \Rightarrow y = \frac{3|x|}{x} = 3$

- прямая параллельная оси ОХ, проходящая через точку  $(0;3)$

Рисунок 2



### Задания для самостоятельного решения

Исследовать функцию  $y=f(x)$  на непрерывность, найти точки разрыва и определить их тип. Построить график функции

$$y = \begin{cases} 4 & \\ - & ; x \leq 2 \\ x & \\ 1 & \begin{cases} 3x-2; x > 2 \end{cases} \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} -2; & x < 0 \\ -2 \cos x; & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi + x; & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

2  $y = \frac{|x-3|}{x-3}; x \leq 0$

$$y = \begin{cases} -\sqrt{9-x^2}; & 0 < x \leq 3 \\ \frac{1}{x-3}; & x > 3 \end{cases}$$

3

1. Приведите подробное письменное решение следующих упражнений:

1. Исследуйте следующие функции на непрерывность. Найдите точки разрыва, укажите их тип:

а)  $y = \frac{27-x^3}{3-x}$       б)  $y = \frac{-21 \cdot x^3}{x-3}$       в)  $y = \begin{cases} -4x, & \text{при } x \leq \frac{1}{3} \\ 2, & \text{при } \frac{1}{3} < x \leq 2 \\ 2x-2, & \text{при } x > 2 \end{cases}$

2. Выполните самостоятельно следующие задания, согласно Вашему варианту (вариант определяется согласно списку журнала)

Исследуйте следующие функции на непрерывность. Найдите точки разрыва, укажите их тип:

Номер варианта	Задание:	
1	1) $y = \frac{1000+x^3}{10+x}$	2) $y = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{при } x \leq \frac{\pi}{3} \\ \sqrt{3}, & \text{при } \frac{\pi}{3} < x \leq 36 \\ 2x, & \text{при } x > 36 \end{cases}$
2	1) $y = \frac{-4 \cdot x^2}{x-6}$	2) $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x < 2 \\ 2x, & x \geq 2 \end{cases}$
3	1) $y = \frac{-1+x^3}{-1+x}$	2) $y = \begin{cases} \cos x, & \text{при } x \leq \frac{\pi}{2} \\ -100, & \text{при } \frac{\pi}{2} < x \leq 52 \\ x, & \text{при } x > 52 \end{cases}$
4	1) $y = \frac{7 \cdot x^4}{x-6}$	2) $f(x) = \begin{cases} x^2-1, & x \leq 0 \\ 3^x, & 0 < x \leq 3 \\ \frac{9}{x}, & x \geq 3 \end{cases}$
5	1) $y = \frac{8+x^3}{2+x}$	2) $y = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{при } x \leq \frac{\pi}{4} \\ -30, & \text{при } \frac{\pi}{4} < x \leq 36 \\ x, & \text{при } x > 36 \end{cases}$

6	1) $y = \frac{4 \cdot x^3}{x-1}$	2) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ 2x, & 0 < x \leq 2 \\ \frac{3}{x-1}, & x \geq 2 \end{cases}$
7	1) $y = \frac{64-x^3}{4-x}$	2) $y = \begin{cases} \operatorname{ctg} x, & \text{при } x \leq \frac{\pi}{6} \\ -13, & \text{при } \frac{\pi}{6} < x \leq 16 \\ 4x, & \text{при } x > 16 \end{cases}$
8	1) $y = \frac{-36 \cdot x^2}{x-4}$	2) $f(x) = \begin{cases} 3-x, & x \leq 2 \\ x-2, & 2 < x \leq 4 \\ \sqrt{5+x}, & x > 4 \end{cases}$
9	1) $y = \frac{-14 \cdot x^2}{x-5}$	2) $y = \begin{cases} \sin x, & \text{при } x \leq \frac{\pi}{3} \\ 20, & \text{при } \frac{\pi}{3} < x \leq 32 \\ 2x, & \text{при } x > 32 \end{cases}$
10	1) $y = \frac{125+x^3}{5+x}$	2) $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ 2, & x \geq 1 \end{cases}$

### Контрольные вопросы

1. Определения односторонних пределов
2. Понятие непрерывности функции в точке и на промежутке
3. Классификация точек разрыва
4. Схема исследования функции на непрерывность

### ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №16.

**Тема:** «Дифференцирование функций».

#### ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Повторить знания по теме: «Дифференцирование функций».
2. Организовать деятельность обучающихся по переводу своих знаний от усвоения отдельных фактов и понятий к их обобщению в целостную систему знаний.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** инструкционно -технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

**Справочный материал:**

*Правила вычисления производных*



$$\begin{aligned}(cu)' &= cu' & (u \cdot v)' &= u'v + \\(u \pm v)' &= u' \pm & \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - v}{v^2}\end{aligned}$$

### Формулы производных

- 1)  $c' = 0$
- 2)  $x' = 1$
- 3)  $(kx)' = k$
- 4)  $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
- 5)  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- 6)  $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
- 7)  $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}$
- 8)  $\left(\frac{1}{x^3}\right)' = -\frac{3}{x^4}$
- 9)  $(\sin x)' = \cos x$
- 10)  $(\cos x)' = -\sin x$
- 11)  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- 12)  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- 13)  $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
- 14)  $(e^x)' = e^x$
- 15)  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- 16)  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

### Примеры

1.  $(x^5 + \sqrt[3]{x})' = (x^5)' + (\sqrt[3]{x})' = 5x^4 + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = 5x^4 + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = 5x^4 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
2.  $(x^3 \cdot \sin x)' = (x^3)' \cdot \sin x + x^3 \cdot \sin' x = 3x^2 \sin x + x^3 \cdot \cos x$
3.  $\left(\frac{3x}{1-x^2}\right)' = \frac{(3x)'(1-x^2) - 3x(1-x^2)'}{(1-x^2)'} = \frac{3(1-x^2) - 3x(-2x)}{(1-x^2)^2} =$   
 $= \frac{3 - 3x^2 + 6x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{3 + 3x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{3(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$
4.  $((2x-5)^8)' = 8(2x-5)^7 (2x-5)' = 8(2x-5)^7 \cdot 2 = 16(2x-5)^7$
5.  $(\sin^4 x)' = 4\sin^3 x \cdot (\sin x)' = 4\sin^3 x \cdot \cos x$
6.  $(\operatorname{tg}(3x-2))' = \frac{1}{\cos^2(3x-2)} \cdot (3x-2)' = \frac{3}{\cos^2(3x-2)}$

### Содержание работы:

#### Вариант 1

A1. Найдите производную функции  $y = 4x^3$ .

- 1)  $12x^2$                       2)  $12x$                       3)  $4x^2$                       4)  $12x^3$

A2. Найдите производную функции  $y = 6x - 11$ .

- 1)  $-5$                       2)  $11$                       3)  $6$                       4)  $6x$

A3. Найдите производную функции  $y = \frac{x-1}{x}$ .

- 1)  $-\frac{1}{x^2}$                       2)  $\frac{x-1}{x^2}$                       3)  $\frac{2x+1}{x^2}$                       4)  $\frac{1}{x^2}$

A4. Найдите производную функции  $y = x \sin x$ .

- 1)  $\sin x - x \cos x$                       2)  $\sin x + x \cos x$                       3)  $\cos x$                       4)  $x + x \cos x$

A5. Найдите производную функции  $y = x^2 + \sin x$  в точке  $x_0 = \pi$ .

- 1)  $\pi^2 - 1$                       2)  $2\pi + 1$                       3)  $2\pi - 1$                       4)  $2\pi$

A6. Вычислите значение производной функции  $y = \frac{x^4}{2} - \frac{3x^2}{2} + 2x$  в точке  $x_0 = 2$ .

- 1) 10                      2) 12                      3) 8                      4) 6

A7. Найдите производную функции  $y = \sin(3x + 2)$ .

- 1)  $\cos(3x + 2)$                       2)  $-3\cos(3x + 2)$                       3)  $3\cos(3x + 2)$                       4)  $-\cos(3x + 2)$

A8. Вычислите значение производной функции  $y = 3x^2 - 12\sqrt{x}$  в точке  $x_0 = 4$ .

- 1) 21                      2) 24                      3) 0                      4) 3,5

A9. Вычислите значение производной функции  $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(4x - \pi) + \frac{\pi}{4}$

в точке  $x_0 = \frac{\pi}{4}$ .                      1) 2                      2)  $\frac{\pi}{4}$                       3) 4                      4)  $\frac{\pi}{2}$

A10. Найдите производную функции  $y = x^2 \cos x$ .

- 1)  $2x \sin x$                       2)  $-2x \sin x$                       3)  $2x \cos x + x^2 \sin x$                       4)  $2x \cos x - x^2 \sin x$

B1. Вычислите значение производной функции  $y = 14\sqrt{2x-3}$  в точке  $x_0 = 26$ .

B2. Найдите значение  $x$ , при которых производная функции  $y = \frac{x-2}{x^2}$  равна 0.

### Вариант 2

A1. Найдите производную функции  $y = \frac{1}{3}x^6$ .

- 1)  $2x^6$                       2)  $2x^5$                       3)  $\frac{1}{3}x^5$                       4)  $6x^5$

A2. Найдите производную функции  $y = 12 - 5x$ .

- 1) 7                      2) 12                      3) -5                      4) -5x

A3. Найдите производную функции  $y = \frac{x+3}{x}$ .

- 1)  $\frac{3}{x^2}$  2)  $\frac{2x-3}{x^2}$  3)  $-\frac{3}{x^2}$  4)  $-\frac{3}{x}$
- A4. Найдите производную функции  $y = x \cos x$ .
- 1)  $\cos x - x \sin x$  2)  $\cos x + x \sin x$  3)  $-\sin x$  4)  $x - \sin x$
- A5. Найдите производную функции  $y = x^2 + \cos x$  в точке  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ .
- 1)  $\pi^2 - 1$  2)  $\pi + 1$  3)  $\frac{\pi}{2} - 1$  4)  $\pi - 1$
- A6. Вычислите значение производной функции  $y = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x$  в точке  $x_0 = 2$ .
- 1) 13 2) 3 3) 8 4) 27
- A7. Найдите производную функции  $y = \cos(5x - 2)$ .
- 1)  $-2 \sin(5x - 2)$  2)  $-5 \sin(5x - 2)$  3)  $5 \sin(5x - 2)$  4)  $\sin(5x - 2)$
- A8. Вычислите значение производной функции  $y = \frac{x^3}{3} - \sqrt{x}$  в точке  $x_0 = \frac{1}{4}$ .
- 1) -47 2) -49 3) 47 4) 11,5
- A9. Вычислите значение производной функции  $y = 1 + \operatorname{ctg}(2x + \pi)$  в точке  $x_0 = -\frac{\pi}{4}$ .
- 1) 2 2) -1 3) -2 4)  $-\frac{1}{2}$
- A10. Найдите производную функции  $y = x^2 \sin x$ .
- 1)  $2x \cos x$  2)  $2x \sin x - x^2 \cos x$  3)  $2x \sin x + x^2 \cos x$  4)  $-2x \cos x$
- B1. Вычислите значение производной функции  $y = 30\sqrt{4-3x}$  в точке  $x_0 = -7$ .
- B2. Найдите значение  $x$ , при которых производная функции  $y = \frac{x+2}{x^2}$  равна 0.

Ответы:

Вариант	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	B1	B2
1	1	3	4	2	3	2	3	1	1	4	2	4
2	2	3	3	1	4	1	2	2	3	3	-9	-4

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №17.

Тема: «Решение прикладных задач с помощью производной».

### ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Решение прикладных задач с помощью производной». Закрепить и систематизировать знания по теме.
2. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** инструкционно-технологические карты, таблицы производных элементарных функций, микрокалькуляторы.

### ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

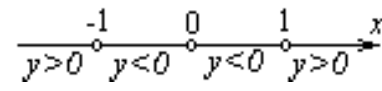
1. Ответить на контрольные вопросы:
  - а) Какую точку называют критической (стационарной) точкой функции?
  - б) Сформулируйте признак возрастания (убывания) функции.
  - в) Сформулируйте признак максимума (минимума) функции.
  - г) Опишите схему исследования функции.
2. С помощью обучающей таблицы повторить план исследования функции и изучить образцы решенных примеров.
3. Выполнить задания для самоконтроля (в таблице).
4. Изучить условие заданий для практической работы.
5. Оформить отчет о работе.


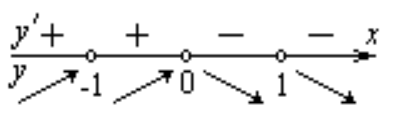
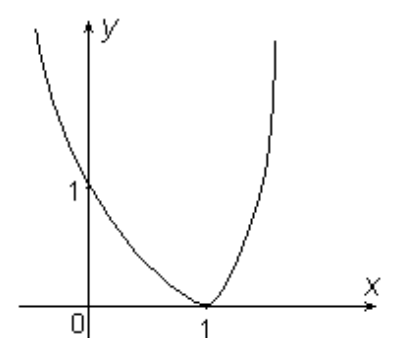
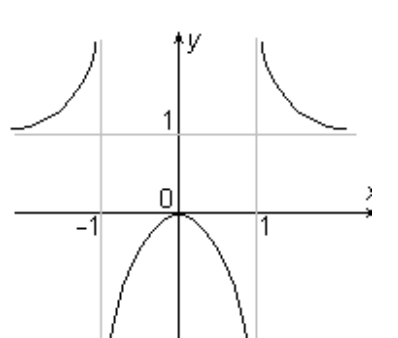
### ОБУЧАЮЩАЯ ТАБЛИЦА

*Задание.* Исследуйте и постройте графики функции:

а)  $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$ ;

б)  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ .

План		Пр	именение плана	
№ шаг	исследования Функции			
а		а) $f(x) = 3x^4 -$	$-4x^3 + 1$	
1	Находим область определения функции	$D(f) = R$		$x^2 - 1 =$ $D(f) = ($ $\cup (1; +\infty)$
2	Исследуем функцию на четность, четность	$+1 \neq \pm f(x)$ ая, ни	$f(-x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} = f(x) \Rightarrow$ нкция четная	
3	Находим нули функции и её постоянства	$x^4 - 3x^3) -$ $x - 1 = 0, x = 1 -$ нуль	$\frac{x^2}{x^2 - 1} = 0,$ $x = 0$ - нуль функции 	

4	Находим одну функцию и её критические точки	$f'(x) = (3x^4 - 4x^3 + 1)' = 12x^3 - 4x^2 = 4x^2(3x - 1)$ , $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0; 1$ - критические точки функции	$f'(x) = \left( \frac{x^2}{x^2 - 1} \right)' = \frac{2x(x^2 - 1) - 2x^3}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ - критическая точка функции
5	Находим знаки производной, знаки экстремума и монотонности функции	 <p> <math>y'(-1) &lt; 0, y'(0,5) &lt; 0, y'(2) &gt; 0</math>  <math>x=0</math> – не является точкой экстремума, <math>x=1</math> – точка минимума, <math>y_{min} = y(1) = 0</math> </p>	 <p> <math>y'(-2) &gt; 0, y'(-0,5) &gt; 0,</math>  <math>y'(0,5) &lt; 0, y'(2) &lt; 0,</math>  <math>x=0</math> – точка максимума, <math>y_{max} = y(0) = 0</math> </p>
6	Находим предел функции при $x \rightarrow \pm\infty$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (3x^4 - 4x^3 + 1) = \infty$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1$
7	Строим эскиз графика функции		

**Примеры.** Исследуйте и постройте графики функций:

1)  $y = x^2 - 3x + 2$ ;    2)  $y = 2x^2 - x^4 - 1$ ;    3)  $y = 6x - x^2 - 5$ ;    4)  $y = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^2}$ ;    5)  $y = 3x - x^3$ ;  
 6)  $y = x^3 - 3x^2 + 4$ ;    7)  $y = x^3 - 3x + 1$ ;    8)  $y = \frac{(x-3)^2}{x^2}$ ;    9)  $y = x^2 + \frac{1}{x}$ .

## ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ.

### Вариант 1.

- Исследуйте функцию  $f(x) = \frac{x}{2} - x^4$  на максимум и минимум.
- Исследуйте с помощью производной функцию  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$  и постройте ее график.

**Вариант 2.**

1. Исследуйте функцию

$$f(x) = x^3 - 3x \text{ на максимум и минимум.}$$

2. Исследуйте с помощью производной функцию  $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 1,5x^2$  и постройте ее график.

**Вариант 3.**

1. Исследуйте функцию

$$f(x) = \frac{x}{4} - 2x^2 + 5 \text{ на максимум и минимум.}$$

2. Исследуйте с помощью производной функцию  $f(x) = 2x^3 - 3x^2$  и постройте ее график.

**Вариант 4.**

1. Исследуйте функцию  $f(x) = 12x - x^3$  на максимум и минимум.

2. Исследуйте с помощью производной функцию  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5$  и постройте ее график.

**Вариант 5.**

1. Исследуйте функцию

$$f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 4 \text{ на максимум и минимум.}$$

2. Исследуйте с помощью производной функцию  $f(x) = -x^3 + 3x + 2$  и постройте ее график.

**Вариант 6.**

1. Исследуйте функцию

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 1 \text{ на максимум и минимум.}$$

2. Исследуйте с помощью производной функцию  $f(x) = x^3 - 3x$  и постройте ее график.

**Вариант 7.**

1. Исследуйте функцию

$$f(x) = x^3 - x^4 \text{ на максимум и минимум.}$$

2. Исследуйте с помощью производной функцию  $f(x) = -x^4 + 5x^2 + 4$  и постройте ее график.

**Вариант 8.**

1. Исследуйте функцию

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 5 \text{ на максимум и минимум.}$$

2. Исследуйте с помощью производной функцию  $f(x) = x^3 - x^2$  и постройте ее график.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №18.**

Тема: «Вычисление первообразных функций».

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:**

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Вычисление первообразной функции».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** инструкционно-технологические карты, таблицы первообразных некоторых функций, микрокалькуляторы.

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Ответить на контрольные вопросы: а) Что называется первообразной функции?  
б) Сформулируйте основное свойство первообразной.  
в) Сформулируйте три правила нахождения первообразных.
2. Изучить образцы решенных примеров.
3. Выполнить задания для самоконтроля.
4. Изучить условие заданий для практической работы.
5. Оформить отчет о работе.

## УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

**ПРИМЕР 1.** Выясните, является ли  $F(x) = \frac{2}{9}x^3 - 3x + \cos x - 1$  первообразной для функции  $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 3 - \sin x$  на  $\mathbf{R}$ ?

**РЕШЕНИЕ.** Находим

$$F'(x) = \left( \frac{2}{9}x^3 - 3x + \cos x \right)' = \frac{2}{9} \cdot 3x^2 - 3 \cdot 1 + (-\sin x) = \frac{2}{3}x^2 - 3 - \sin x = f(x).$$

Следовательно, по определению  $F(x) = \frac{2}{9}x^3 - 3x + \cos x - 1$  является первообразной для функции  $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 3 - \sin x$  на  $\mathbf{R}$ .

**ПРИМЕР 2.** Для функции  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\cos^2 x}$  найдите первообразную, график которой проходит через точку  $M\left(\frac{\pi}{4}; 1 + 2\sqrt{\pi}\right)$ .

**РЕШЕНИЕ.** По основному свойству первообразных любая первообразная функции  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\cos^2 x}$  записывается в виде  $F(x) = 2 \cdot 2\sqrt{x} - \operatorname{tg} x + C = 4\sqrt{x} - \operatorname{tg} x + C$ . Координаты точки  $M\left(\frac{\pi}{4}; 1 + 2\sqrt{\pi}\right)$  графика искомой первообразной должны удовлетворять уравнению:

$$1 + 2\sqrt{\pi} = 4\sqrt{\frac{\pi}{4}} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + C.$$

Отсюда находим, что

$$\begin{aligned} 1 + 2\sqrt{\pi} &= 2\sqrt{\pi} - 1 + C, \\ C &= 2. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение искомой первообразной имеет вид:  $F(x) = 4\sqrt{x} - \operatorname{tg} x + 2$ .

## ТЕСТ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ.

Выберите правильный вариант ответа.

1. Функция  $F(x) = 3x^2 + 0,5\cos 2x + 5$  является первообразной для функции:  
а)  $f(x) = 6x - \sin 2x$ ;    б)  $f(x) = 3x^3 + 0,5\cos 2x$ ;    в)  $f(x) = 9x^3 - 2\sin 2x$ .



2. Дана функция  $g(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{2}{\sqrt{x}}$ . Первообразная для функции  $g(x)$ , график которой проходит через точку  $\left(-\frac{\pi}{4}; 2\sqrt{\pi} - 1\right)$ , это:
- а)  $G(x) = -4\sqrt{x} - \operatorname{ctgx} + 4\sqrt{\pi}$ ; б)  $G(x) = \operatorname{ctgx} - 4\sqrt{x} + 2$ ; в)  $G(x) = -\operatorname{ctgx} - 4\sqrt{x} + 2$ .

## ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ.

### Вариант 1.

1. Является ли функция  $F(x) = x^2 + 3x + 1$  первообразной для функции  $f(x) = 2x + 3$  на  $\mathbf{R}$ ?
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции  $f(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{3}{x^2}$ .
- б) Для функции  $f(x) = \sin 2x$  найдите первообразную, график которой проходит через точку  $M\left(\frac{\pi}{4}; -2\right)$ .

### Вариант 2.

1. Является ли функция  $F(x) = -\frac{x^4}{4} + 5x + 2$  первообразной для функции  $f(x) = -x^3 + 5$  на  $\mathbf{R}$ ?
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции  $f(x) = \frac{3}{x^4} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .
- б) Для функции  $f(x) = (4 - 5x)^3$  найдите первообразную, график которой проходит через точку  $M\left(1; \frac{1}{20}\right)$ .

### Вариант 3.

1. Является ли функция  $F(x) = x^2 - x$  первообразной для функции  $f(x) = 2x - 1$  на  $\mathbf{R}$ ?
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции  $f(x) = \frac{7}{\cos^2 x} - 3x - x^3$ .
- б) Для функции  $f(x) = \sin 3x$  найдите первообразную, график которой проходит через точку  $M\left(\frac{\pi}{12}; 0\right)$ .

### Вариант 4.

1. Является ли функция  $F(x) = \frac{1}{x^2} - \sin x$  первообразной для функции  $f(x) = -\frac{1}{x^2} - \cos x$  на  $\mathbf{R}$ ?
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции  $f(x) = x(x+1)(x+2)$ .
- б) Для функции  $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x+1}}$  найдите первообразную, график которой проходит через точку  $M(0; 3)$ .

### Вариант 5.

1. Является ли функция  $F(x) = x^3 + 1$  первообразной для функции  $f(x) = \frac{x^4}{4} + x$  на  $\mathbf{R}$ ?

2. а) Найдите общий вид первообразных для функции  $f(x) = \left( x^{10} - \frac{1}{10} \right)^2$ .

б) Для функции  $f(x) = x - 10 \sin 2x$  найдите первообразную, график которой проходит через точку  $M(0; -5)$ .

### **Вариант 6.**

1. Является ли функция  $F(x) = x + \cos x$  первообразной для функции  $f(x) = 1 - \sin x$  на  $\mathbf{R}$ ?

2. а) Найдите общий вид первообразных для функции  $f(x) = 3e^x + 5 \cos x - 7x^4$ .

б) Для функции  $f(x) = \frac{1}{(2x-1)^3}$  найдите первообразную, график которой проходит через точку  $M(1; 2)$ .

### **Вариант 7.**

1. Является ли функция  $F(x) = 2x^3 + \frac{3}{4}x^4 + 5$  первообразной для функции  $f(x) = 3(x+2)x^2$  на  $\mathbf{R}$ ?

2. а) Найдите общий вид первообразных для функции  $f(x) = \sqrt[7]{x} + 7^x + 2x^2$ .

б) Для функции  $f(x) = -6 \sin 2x$  найдите первообразную, график которой проходит через точку  $M\left(\frac{\pi}{4}; -3\right)$ .

### **Вариант 8.**

1. Является ли функция  $F(x) = x + \frac{1}{2x^2}$  первообразной для функции  $f(x) = 1 - \frac{1}{x^3}$ ,  $x > 0$ ?

2. а) Найдите общий вид первообразных для функции  $f(x) = 2 \sin x + 2^x - \frac{1}{x^3}$ .

б) Для функции  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}$  найдите первообразную, график которой проходит через точку  $M\left(\frac{\pi}{2}; \sqrt{2}\right)$ .

## **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №19.**

Тема: «Неопределенный интеграл. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)».

### **ЦЕЛЬ РАБОТЫ:**

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Неопределенный интеграл. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)».

2. Закрепить и систематизировать знания по теме.

3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** инструкционно-технологические карты, таблицы первообразных некоторых функций, микрокалькуляторы.

**Справочный материал:**

войства неопределенного интеграла:

$$\left( \int f(x) dx \right)' = (F(x) + C)' = f(x);$$

$$d \left( \int f(x) dx \right) = f(x) dx;$$

$$\int dF(x) = F(x) + C;$$

$$\int (u + v - w) dx = \int u dx + \int v dx - \int w dx; \text{ где } u, v, w - \text{некоторые функции от } x.$$

$$C' \cdot \int f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx;$$

таблица основных интегралов.

интеграл	значение	интеграл	значение
$\int \cos x dx$	$ \sin x  + C$	$\int e^x dx$	$e^x + C$
$\int \sin x dx$	$- \cos x  + C$	$\int \cos x dx$	$\sin x + C$
$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \sin x dx$	$- \cos x + C$
$\int \frac{dx}{1+x^2}$	$\arctg \frac{x}{a} + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$\tan x + C$
$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x+a}{x-a} \right  + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	$- \cot x + C$
	$\int \frac{x}{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2} \ln  x^2 \pm a^2  + C$		

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\sin \frac{x}{a} + C$$

$$x^\alpha dx$$

$$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$$

$$\frac{1}{\cos x} dx$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C$$

$$\frac{dx}{x}$$

$$x| + C$$

$$\frac{1}{\sin x} dx$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$$

пособ подстановки (замены переменных).

**рема:** Если требуется найти интеграл  $\int f(x) dx$  (t) и ф, но сложно отыскать  
вообразную, то с помощью замены  $x = (t)dt$  получается:  $\int f(x) dx =$

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

имер 1.

Найти неопределенный интеграл  $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$ .

лаем замену  $t = \sin x, dt = \cos x dx$ .

$$\int t dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C.$$

имер 2.  $\int x(x^2 + 1)^{3/2} dx$ .

ена  $t = x^2 + 1; dt = 2x dx; dx = \frac{dt}{2x}$ ; Получаем:

$$\int x(x^2 + 1)^{3/2} dx = \frac{1}{2} \int t^{3/2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2 + 1)^{5/2}}{5} + C;$$

держание работы:

Вариант 1

1



$$1. y = \int x^3 - x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$2. y = \int \frac{\sqrt[3]{x}}{2 + x} dx$$

$$3. y = \int \left( \frac{1}{x} \right)$$

$$4. y = \int \frac{x^2 + \sqrt{x^3 + 3}}{x^2 \sqrt{x}} dx$$

$$5. y = \int \frac{-}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

$$6. y = \int \frac{e^x - e^{-x}}{1 + e^x} \cos x dx$$

$$7. y = \int \frac{1}{\sqrt{\sin x}} dx$$

$$8. y = \int \ln x dx$$

$$9. y = \int x \cdot \sin 2x dx$$

### Вариант 2

$$1. y = \int (4x^3 + 3x^2 - 3 + \frac{1}{x^4}) dx$$

$$2. y = \int 2\sqrt{x^3} dx$$

$$3. y = \int \frac{(x+1)^2}{3x^5 + 4x^2 - 2} dx$$

$$4. y = \int \frac{x^3}{(6x-5)^2} dx$$

$$5. y = \int \frac{\sqrt{3x^2 - 5x + 6}}{x} dx$$

$$6. y = \int \frac{\sin x}{\sin x} dx$$

$$7. y = \int e^{2x} dx$$

$$8. y = \int x \cdot e^x dx$$

$$9. y = \int \arcsin x dx$$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №20.

Тема: «Методы вычисления определенного интеграла».

### ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Методы вычисления определенного интеграла».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.

3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** инструкционно-технологические карты, таблицы первообразных некоторых функций, микрокалькуляторы.

### ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Ответить на контрольные вопросы: а) Что называется первообразной функции?  
б) Сформулируйте основное свойство первообразной.  
в) Сформулируйте три правила нахождения первообразных.  
г) Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
2. Изучить образцы решенных примеров.
3. Выполнить задания для самоконтроля.
4. Изучить условие заданий для практической работы.
5. Оформить отчет о работе.

### УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

**ПРИМЕР 1.** Вычислите интеграл  $\int_{-2}^2 (-4x + 4 + x^2) dx$ .

**РЕШЕНИЕ.** Найдем множество всех первообразных для функции  $-4x + 4 + x^2$ :

$$F(x) = -4 \cdot \frac{x^2}{2} + 4 \cdot x + \frac{x^3}{3} + C = -2x^2 + 4x + \frac{x^3}{3} + C.$$

Пользуясь формулой Ньютона-Лейбница, получаем:

$$\int_{-2}^2 (-4x + 4 + x^2) dx = \left| -2x^2 + 4x + \frac{x^3}{3} \right|_{-2}^2 = \left( -2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + \frac{2^3}{3} \right) - \left( -2 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + \frac{(-2)^3}{3} \right) = \left( -8 + 8 + \frac{8}{3} \right) - \left( -8 - 8 - \frac{8}{3} \right) = \frac{8}{3} + \frac{16}{3} = \frac{24}{3} = 8.$$

О т в е т:  $8$ .

**ПРИМЕР 2.** Выясните, при каком отрицательном значении переменной  $a$  верно равенство

$$\int_{-2a}^a 2x^3 dx = -7,5?$$

**РЕШЕНИЕ.** Поскольку для  $2x^3$  одной из первообразных является  $\frac{x^4}{2}$ ,

$$\int_{-2a}^a 2x^3 dx = \left( \frac{x^4}{2} \right)_{-2a}^a = \frac{a^4}{2} - \frac{(-2a)^4}{2} = -\frac{15a^4}{2}.$$

Следовательно, нужно решить уравнение:

$$-\frac{15a^4}{2} = -7,5,$$

$$-\frac{15a^4}{2} = -\frac{15}{2},$$

$$a^4 = 1,$$

$$a = \pm 1.$$

Отрицательный корень этого уравнения – это число  $-1$ .

О т в е т:  $-1$ .

### ТЕСТ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ.

Выберите правильный вариант ответа.

1. Значение  $\int_{-1}^2 (-6x + x^2 + 9) dx$  равно:

а)  $18\frac{1}{3}$ ; б)  $18\frac{2}{3}$ ; в)  $19\frac{1}{3}$ .

2. Равенство  $\int_a^{2a} x^3 dx = 3,75$  (где  $a > 0$ ) верно, если  $a$  равно:

а) 1; б) 2; в) 3.

### ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ.

#### Вариант 1.

1. Вычислите интегралы: а)  $\int_{-1}^2 x^2 dx$ ; б)  $\int_0^{\frac{\pi}{12}} (1 + \cos 2x) dx$ .

2. Докажите справедливость равенства:  $\int_0^1 (2x + 1) dx = \int_0^1 (x^3 - 1) dx$ .

#### Вариант 2.

1. Вычислите интегралы: а)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} -2 \sin x dx$ ; б)  $\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$ .

2. Докажите справедливость равенства:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \int_0^{\sqrt[3]{3}} x^2 dx$ .

#### Вариант 3.

1. Вычислите интегралы: а)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$ ; б)  $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)^2}$ .

2. Докажите справедливость равенства:  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = \int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ .

#### Вариант 4.

1. Вычислите интегралы: а)  $\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ ; б)  $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{2x}{9}\right)}$ .

2. Докажите справедливость равенства:  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_0^1 dx$ .

### **Вариант 5.**

1. Вычислите интегралы: а)  $\int_{-1}^2 -x^3 dx$ ; б)  $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) dx$
2. Верно ли неравенство:  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x} < \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^2}$  ?

### **Вариант 6.**

1. Вычислите интегралы: а)  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} -\frac{dx}{\sin x}$ ; б)  $\int_0^2 (1+3x)^4 dx$ .
3. Верно ли неравенство:  $\int_{-1}^1 x^4 dx < \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$  ?

### **Вариант 7.**

1. Вычислите интегралы: а)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos x dx$ ; б)  $\int_2^7 \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$ .
2. Верно ли неравенство:  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} > \int_1^8 \frac{dx}{3\sqrt[3]{x}}$  ?

### **Вариант 8.**

1. Вычислите интегралы: а)  $\int_1^5 x^4 dx$ ; б)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$ .
2. Верно ли неравенство:  $\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx > \int_2^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{x^2}$  ?

## **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №21.**

Тема: «Методы вычисления определенного интеграла».

### **ЦЕЛЬ РАБОТЫ:**

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Вычисление определенного интеграла».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** инструкционно-технологические карты, таблицы первообразных некоторых функций, микрокалькуляторы.



## Справный материал.

### 1. Определенный интеграл

Пусть функция  $f(x)$  определена на отрезке  $[a; b]$ . Разобьем этот отрезок на  $n$  частей точками  $a < x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ , выберем на каждом элементарном отрезке  $x_{k-1} \leq x \leq x_k$  произвольную точку  $\xi_k$  и обозначим через  $\Delta x_k$  длину каждого такого отрезка.

*Интегральной суммой* для функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  называется сумма вида:

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n$$

**Определение.** *Определенным интегралом* от функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

Для вычисления определенного интеграла от функции  $f(x)$  служит *формула Ньютона-Лейбница*:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

т. е. определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

### 2. Основные свойства определенного интеграла

**1<sup>0</sup>.** Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т. е. если  $a = \text{const}$ , то

$$\int_a^b a f(x) dx = a \int_a^b f(x) dx$$

**2<sup>0</sup>.** Определенный интеграл от алгебраической суммы двух непрерывных функций равен алгебраической сумме их интегралов, т. е.

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

**3<sup>0</sup>.** Если  $a < c < b$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

**4<sup>0</sup>.** Если функция  $f(x)$  неотрицательна на отрезке  $[a; b]$ , где  $a < b$ , то

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

**5<sup>0</sup>.** Если  $f(x) \geq g(x)$  для всех  $x \in [a; b]$ , где  $a < b$ , то

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

### 3. Методы вычисления определенного интеграла

#### Непосредственное интегрирование

Чтобы вычислить определенный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$ , нужно:

1) найти какую-нибудь первообразную  $F(x)$  для функции  $f(x)$  (найти неопределенный интеграл от функции  $f(x)$ , в котором можно принять  $C = 0$ );

2) в полученном выражении подставить вместо  $x$  сначала верхний предел  $a$ , а затем нижний предел  $b$ , и из результата первой подстановки вычесть результат второй.

**Пример 1.** Вычислить  $\int_{-1}^2 (x^2 - 3x + 7) dx$

*Решение.* По формуле Ньютона-Лейбница получаем:  $\int_{-1}^2 (x^2 - 3x + 7) dx = \left( \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 7x \right) \Big|_{-1}^2 = \left( \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 \right) - \left( \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - \frac{3}{2} \cdot (-1)^2 + 7 \cdot (-1) \right) = 19,5$

**Пример 2.** Вычислить  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

*Решение.* По формуле Ньютона-Лейбница:  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^1 = \arctg 1 - \arctg 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

**Пример 3.** Найти  $\int_a^b dx$

*Решение.*  $\int_a^b dx = x \Big|_a^b = b - a$

#### Метод замены переменной (метод подстановки)

При вычислении определенного интеграла методом подстановки новая переменная вводится подобно случаю неопределенного интеграла. Однако в отличие от неопределенного интеграла, где в полученном результате мы снова возвращались к прежнему переменному, здесь этого делать не надо.

**Пример.** Вычислить  $\int_1^2 (2x-1)^3 dx$

*Решение.* Введем новую переменную интегрирования с помощью подстановки  $2x-1 = t$ . Дифференцируя, имеем:

$$d(2x-1) = dt,$$

$$(2x-1)' dx = dt,$$

$$2 dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt$$

Находим новые пределы интегрирования. Для этого подставим в соотношение  $2x-1 = t$  значения  $x = 1$  и  $x = 2$ , соответственно получим:  $t_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

$$t_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

Следовательно,

$$\int_1^3 (2x-1)^3 dx = \frac{1}{2} \int_1^3 t^3 dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} t^4 \Big|_1^3 = \frac{1}{8} (3^4 - 1^4) = \frac{80}{8} = 10$$

### Интегрирование по частям

Если функции  $u(x)$  и  $v(x)$  и их производные  $u'(x)$  и  $v'(x)$  непрерывны в промежутке  $a \leq x \leq b$ , то формула интегрирования по частям для определенного интеграла имеет вид:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

**Пример.** Вычислить  $\int_0^1 x e^x dx$

*Решение.* Положим  $u=x$ ,  $dv=e^x dx$ ,

Тогда  $du=dx=(x)'dx=dx$ ,

$$v = \int e^x dx = e^x$$

Следовательно,  $\int_0^1 x e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = (1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0) - e^x \Big|_0^1 = e - (e^1 - e^0) = e - e + 1 = 1$

### **Упражнения**

Вычислить определенные интегралы:

1.  $\int_0^2 (5x^3 + 6) dx$

2.  $\int_{-1}^1 (x^3 + 2x) dx$

3.  $\int_0^{\pi/4} \frac{4 dx}{\cos^2 x}$

4.  $\int_{-0,5}^{0,5} 3(1+z^2) dz$

5.  $\int_3^6 \frac{dx}{x}$

6.  $\int_0^1 \frac{3 dx}{x+3}$

7.  $\int_4^5 (4-x)^3 dx$

8.  $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos(2x - \frac{\pi}{6}) dx$

9.  $\int_0^{\pi} \cos 4x dx$

10.  $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

11.  $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2}$

12.  $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$

13.  $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx$

14.  $\int_0^1 x e^{-x} dx$

15.  $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{4-x \sin x}{x} dx$

16.  $\int_0^1 \frac{dx}{e^{2x}}$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №22.

Тема: «Решение прикладных задач с помощью интеграла».

### ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

- 1.Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Решение прикладных задач с помощью интеграла».
- 2.Закрепить и систематизировать знания по теме.
- 3.Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** инструкционно-технологические карты, таблицы первообразных некоторых функций, микрокалькуляторы.

### Справный материал.

Пусть требуется найти значение какой – либо геометрической или физической величины  $A$  (площадь фигуры, объем тела, давление жидкости на вертикальную пластину и т. д.), связанной с отрезком  $[a, b]$  изменения переменной  $x$ . Для нахождения этой величины  $A$  можно руководствоваться методом интегральных сумм.

Искомая величина  $A = \int_a^b f(x)dx$ .

**Работа переменной силы.** Пусть материальная точка  $M$  перемещается вдоль оси  $Ox$  под действием переменной силы  $F = F(x)$ , направленной параллельно этой оси. Работа, произведенная силой при перемещении точки  $M$  из положения  $x = a$  в положение  $x = b$ , находится по формуле:  $A = \int_a^b F(x)dx$ .

**Пример.** Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м?

**Решение:** По закону Гука упругая сила, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению  $x$ , т. е.  $F = kx$ , где  $k$  — коэффициент пропорциональности. Согласно условию задачи, сила  $F = 100$  Н растягивает пружину на  $x = 0,01$  м; следовательно,  $100 = k \cdot 0,01$ , откуда  $k = 10000$ ; следовательно,  $F = 10000x$ .

Искомая работа  $A = \int_a^b F(x)dx = \int_0^{0,05} 10000x dx = 5000x^2 \Big|_0^{0,05} = 12,5(Дж)$ .

**Путь, пройденный телом.** Пусть материальная точка перемещается по прямой с переменной скоростью  $v = v(t)$ . Тогда путь  $S$ , пройденный ею за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$ . Можно определить по формуле:  $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$

**Пример.** Найти путь, пройденный телом за 4 секунды от начала движения, если скорость тела  $v(t) = 10t + 2$  (м/с).

**Решение:** Если  $v(t) = 10t + 2$  (м/с), то путь, пройденный телом от начала движения ( $t = 0$ ) до конца 4-й секунды, равен  $S = \int_0^4 (10t + 2)dt = 5t^2 \Big|_0^4 + 2t \Big|_0^4 = 80 + 8 = 88(м)$ .

### Вычисление массы стержня переменной плотности.

Будем считать, что отрезок  $[a; b]$  оси  $Ox$  имеет массу с переменной линейной плотностью  $\rho(x) \geq 0$ , где  $\rho(x)$  - непрерывная на отрезке  $[a; b]$  функция.

$$M = \int_a^b \rho(x) dx$$

Общая масса этого отрезка

**Пример.** Вычислить массу стержня на отрезке от 0 до 2, если его плотность задаётся функцией  $\rho(x) = x + 1$

Решение:  $M = \int_0^2 \rho(x) dx$ ,  $M = \int_0^2 (x + 1) dx = \left( \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^2 = 4$

**Задания.**

**1 вариант.**

1. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,08 м, если сила 120 Н растягивает пружину на 0,04 м?

2. Найти путь, пройденный телом за 4 секунды от начала движения, если скорость тела

$$v(t) = 8t - 3 \text{ (м/с)}.$$

3. Вычислить массу стержня на отрезке от 2 до 5, если его плотность задаётся функцией  $\rho(x) = 2x - 1$

**2 вариант.**

1. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,08 м, если сила 120 Н растягивает пружину на 0,04 м?

2. Найти путь, пройденный телом за 4 секунды от начала движения, если скорость тела

$$v(t) = 8t - 3 \text{ (м/с)}.$$

3. Вычислить массу стержня на отрезке от 2 до 5, если его плотность задаётся функцией  $\rho(x) = 2x - 1$

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №23.**

Тема: «Исследование сходимости числовых рядов».

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:**

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Исследование сходимости числовых рядов».

2. Закрепить и систематизировать знания по теме.

3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** инструкционно-технологические карты, таблицы первообразных некоторых функций, микрокалькуляторы.

**Справный материал.**

**Исследование сходимости числовых рядов**

Вид общего члена ряда $u_n$	Рекомендуемый признак сходимости
<p><b>I.</b> Если <b>весь</b> общий член ряда взведен в степень <b>n</b> (либо в степень, держащую <b>n</b>)</p> <p>к примеру: <math>u_n = \left(\frac{n}{5}\right)^{2n}</math></p>	<p><b>I. Радикальный признак Коши:</b></p> <p>Для ряда <math>\sum_{n=1}^{\infty} u_n</math> находят <math>c = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}</math></p> <p>если <math>c &lt; 1</math>, ряд сходится;</p> <p><math>c &gt; 1</math>, ряд расходится;</p> <p><math>c = 1</math>, другой признак.</p>
<p><b>II. а)</b> Если <b>только часть</b> общего члена ряда возведена в степень <b>n</b></p> <p>к примеру: <math>u_n = \frac{n}{5^n}</math>;</p> <p><b>б)</b> Если общий член ряда держит <b>n!</b></p>	<p><b>II. Признак Даламбера:</b></p> <p>Для ряда <math>\sum_{n=1}^{\infty} u_n</math> находят <math>d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}</math></p> <p>если <math>d &lt; 1</math>, ряд сходится;</p> <p><math>d &gt; 1</math>, ряд расходится;</p> <p><math>d = 1</math>, другой признак.</p>
<p><b>III.</b> Если общий член ряда <b>прост</b> <b>я интегрирования</b></p>	<p><b>III. 1) Необходимый признак сходимости (см. 2)Интегральный признак Коши:</b></p> <p>Для ряда <math>\sum_{n=1}^{\infty} f(n)</math> рассматривают соответствующий несобственный интеграл <math>\int_1^{\infty} f(x) dx</math></p> <p>если интеграл сходится (равен числу), то ряд сходится;</p> <p>если интеграл расходится (равен <math>\infty</math>), то ряд расходится.</p> $\int_1^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b f(x) dx$
<p><b>IV.</b> Если общий член ряда держит <b>(-1)<sup>n</sup></b>, т.е. задан <b>альтернующийся</b> ряд.</p>	<p><b>IV. Признак Лейбница сходимости</b></p> <p><b>альтернующихся рядов</b> <math>\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n</math>:</p> <p>если <math>\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0</math>, то ряд сходится;</p> <p>если <math>\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0</math>, то ряд расходится.</p>
<p><b>V.</b> Если общий член ряда не входит под описания <b>I – IV</b>.</p>	<p><b>V. Необходимый признак сходимости:</b></p> <p>если <math>\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0</math>, то ряд расходится;</p> <p>если <math>\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0</math>, то используйте другой признак.</p>

## Содержание работы:

### Вариант 1

#### I Ряды

1. Исследовать на сходимость числовые ряды а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n}$  ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$  .

+1

2. Исследовать ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$  на абсолютную и условную сходимость.

3. Найти интервал сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$  . Исследовать сходимость

ряда на концах интервала сходимости.

#### II Теория вероятностей

4. При наборе телефонного номера абонент забыл три последние цифры и набрал их наугад, помня только, что эти цифры разные. Найти вероятность того, что номер набран правильно.

5. Три стрелка сделали по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,75; для второго – 0,8; для третьего – 0,9. Найти вероятность того, что только один стрелок попадет в мишень.

6. Задан закон распределения дискретной случайной величины:

$X$	-3	-1	1	3	5
$p$	0,2	0,3	0,25	0,15	0,1

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

7. Вероятность появления события  $A$  при одном испытании равна 0,1. Найти вероятность того, что при трех независимых испытаниях оно появится хотя бы один раз.

8. Зная математическое ожидание  $m = 15$  и среднее квадратичное отклонение  $\sigma = 2$  нормально распределенной случайной величины  $X$ , найти вероятность того, что а)  $X$  примет значение из интервала (9; 19), б) абсолютная величина отклонения  $X$  от математического ожидания  $|X - m|$  окажется меньше 3.

#### III Элементы математической статистики

9. Дан протокол измерений случайной величины  $X$ . Для этой случайной величины требуется:

а) составить интервальную таблицу частот, б) получить точечные оценки для математического ожидания и дисперсии, в) с надежностью  $\gamma = 0,9545$  найти доверительный интервал для математического ожидания, г) построить гистограмму, д) аппроксимировать гистограмму теоретическим нормальным законом распределения.

Значения случайной величины:

354	427	489	448	503	460	551	519	312	444
460	533	481	378	473	409	506	328	489	370
469	403	395	417	460	450	378	471	548	414
396	397	368	475	486	419	417	411	400	431
484	458	519	520	446	396	447	387	464	352
412	369	459	436	417	416	467	392	377	396
397	440	419	400	382	434	418	433	429	377
514	393	437	452	432	481	454	444	384	347

370	426	436	439	437	460	431	493	422	454
507	435	510	470	408	413	400	418	343	492



## Вариант 2

### I Ряды

1. Исследовать на сходимость числовые ряды а)  $\sum_{n=1}^{\infty} (0,5 + (0,1)^n)$  ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$  .

2. Исследовать ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{10n}$  на абсолютную и условную сходимость.

3. Найти интервал сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} (2n^2 - 1)(x - 2)^n$  . Исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости.

### II Теория вероятностей

4. Найти вероятность того, что в наугад выбранном двузначном числе цифры одинаковы.

5. Вероятность того, что студент успешно напишет контрольную работу по математике, равна 0,6, по физике – 0,5, по информатике – 0,8. Найти вероятность того, что студент успешно справится с контрольной работой хотя бы по одному предмету.

6. Задан закон распределения дискретной случайной величины:

$X$	6	9	12	15	18
$p$	0,2	0,3	0,25	0,15	0,1

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

7. Найти вероятность того, что событие  $A$  произойдет не менее двух раз в 4 независимых испытаниях, если вероятность наступления события  $A$  в одном испытании равна 0,6.

8. Зная математическое ожидание  $m = 14$  и среднее квадратичное отклонение  $\sigma = 4$  нормально распределенной случайной величины  $X$ , найти вероятность того, что а)  $X$  примет значение из интервала (10; 20), б) абсолютная величина отклонения  $X$  от математического ожидания  $|X - m|$  окажется меньше 4.

### III Элементы математической статистики

9. Дан протокол измерений случайной величины  $X$ . Для этой случайной величины требуется:

- а) составить интервальную таблицу частот, б) получить точечные оценки для математического ожидания и дисперсии, в) с надежностью  $\gamma = 0,9722$  найти доверительный интервал для математического ожидания, г) построить гистограмму, д) аппроксимировать гистограмму теоретическим нормальным законом распределения.

Значения случайной величины:

615	598	541	647	531	658	591	584	617	599
558	601	548	582	512	639	574	616	550	616
587	589	595	620	605	573	597	548	518	745
502	637	559	626	562	541	611	623	688	531
567	601	649	576	583	584	548	593	547	556
511	531	607	436	663	565	589	498	704	513
581	613	500	643	513	556	557	583	635	599
539	693	592	527	583	581	571	506	599	644
659	609	576	582	644	562	614	434	496	614
557	496	501	555	471	565	511	530	614	636

## Вариант 3

### I Ряды

+3 1. Исследовать на сходимость числовые ряды а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-1}$  ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$  .

2. Исследовать ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\alpha$  на абсолютную и условную сходимость.

3. Найти интервал сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n+3} x^n$  . Исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости.

### II Теория вероятностей

4. Из пяти карточек с буквами А, Б, В, Г, Д наугад одна за другой выбираются три и располагаются в ряд в порядке появления. Найти вероятность того, что получится слово «ДВА».

5. Вероятность, что при нажмие стартера мотор машины заработает, равна примерно 5/6. Найти вероятность того, что мотор включится только при повторном нажмие стартера.

6. Задан закон распределения дискретной случайной величины:

$X$	9	11	13	15	17
$p$	0,2	0,3	0,25	0,15	0,1

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

7. В ящике имеется по одинаковому числу деталей, изготовленных заводами №1 и №2. Найти вероятность того, что среди пяти наудачу отобранных деталей менее двух изготовлены на заводе №1.

8. Зная математическое ожидание  $m = 13$  и среднее квадратичное отклонение  $\sigma = 4$  нормально распределенной случайной величины  $X$ , найти вероятность того, что а)  $X$  примет значение из интервала (11; 21), б) абсолютная величина отклонения  $X$  от математического ожидания  $|X - m|$  окажется меньше 8.

### III Элементы математической статистики

9. Дан протокол измерений случайной величины  $X$ . Для этой случайной величины требуется:

а) составить интервальную таблицу частот, б) получить точечные оценки для математического ожидания и дисперсии, в) с надежностью  $\gamma = 0,9876$  найти доверительный интервал для математического ожидания, г) построить гистограмму, д) аппроксимировать гистограмму теоретическим нормальным законом распределения.

Значения случайной величины:

371	377	405	319	330	368	371	356	366	339
344	400	368	363	360	385	346	416	366	384
455	230	332	319	309	325	361	298	284	309
268	321	346	361	354	352	301	324	283	426
423	343	291	453	385	361	371	412	333	357
385	335	335	331	394	413	361	363	416	357
393	331	312	437	269	327	300	354	411	329
352	279	350	308	444	386	378	430	351	397
290	414	379	388	247	306	460	377	351	364
436	343	413	426	350	292	448	454	377	327

## Вариант 4

### I Ряды

- + 4 1. Исследовать на сходимость числовые ряды а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$  ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{2}$  .
2. Исследовать ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5n+3}$  на абсолютную и условную сходимость.
3. Найти интервал сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{5^n}$  . Исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости.

### II Теория вероятностей

4. В вазе стоят 8 белых, 7 розовых и 5 красных гвоздик. Наугад берут 4 цветка. Найти вероятность, что все взятые гвоздики красные.
5. Охотник выстрелил три раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в нее в начале стрельбы равна 0,8, а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Найти вероятность того, что он промахнется все три раза.
6. Задан закон распределения дискретной случайной величины:

$X$	8	11	14	17	20
$p$	0,2	0,3	0,25	0,15	0,1

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

7. Вероятность появления события  $A$  при одном испытании равна 0,1. Найти вероятность того, что при трех независимых испытаниях оно появится хотя бы один раз.
8. Зная математическое ожидание  $m = 12$  и среднее квадратичное отклонение  $\sigma = 5$  нормально распределенной случайной величины  $X$ , найти вероятность того, что а)  $X$  примет значение из интервала (12; 22), б) абсолютная величина отклонения  $X$  от математического ожидания  $|X - m|$  окажется меньше 10.

### III Элементы математической статистики

9. Дан протокол измерений случайной величины  $X$ . Для этой случайной величины требуется:
- а) составить интервальную таблицу частот, б) получить точечные оценки для математического ожидания и дисперсии, в) с надежностью  $\gamma = 0,9545$  найти доверительный интервал для математического ожидания, г) построить гистограмму, д) аппроксимировать гистограмму теоретическим нормальным законом распределения.

Значения случайной величины:

493	454	451	584	480	467	574	551	474	523
470	519	456	459	467	501	486	554	452	471
507	442	474	481	455	595	404	500	454	445
493	487	578	481	599	584	474	415	515	479
441	534	525	443	485	480	495	510	471	468
425	506	454	510	565	506	484	485	458	461
489	512	470	486	436	486	569	484	435	499
443	432	505	463	575	493	410	489	548	462
438	505	520	454	404	418	500	437	380	439
498	474	543	491	506	529	486	451	475	354

## Вариант 5

### I Ряды

+5 1. Исследовать на сходимость числовые ряды а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n}$  ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$  .

2. Исследовать ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^n$  на абсолютную и условную сходимость.

3. Найти интервал сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{(n+1)!}$  . Исследовать

сходимость ряда на концах интервала сходимости.

### II Теория вероятностей

4. Наугад выбрано натуральное число, не превосходящее 20. Найти вероятность того, что это число кратно 10.

5. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу определенного продукта по каждому из трех центральных телевизионных каналов, равна 0,05. Предполагается, что эти события - независимы в совокупности. Чему равна вероятность того, что потребитель увидит рекламу хотя бы по одному из этих каналов?

6. Задан закон распределения дискретной случайной величины:

$X$	11	13	15	17	19
$p$	0,2	0,3	0,25	0,15	0,1

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

7. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие нестандартно, равна 0,1. Найти вероятность того, что среди трех проверенных изделий окажется не более одного нестандартного.

8. Зная математическое ожидание  $m = 11$  и среднее квадратичное отклонение  $\sigma = 4$  нормально распределенной случайной величины  $X$ , найти вероятность того, что а)  $X$  примет значение из интервала (13; 23), б) абсолютная величина отклонения  $X$  от математического ожидания  $|X - m|$  окажется меньше 6.

### III Элементы математической статистики

9. Дан протокол измерений случайной величины  $X$ . Для этой случайной величины требуется:

а) составить интервальную таблицу частот, б) получить точечные оценки для математического ожидания и дисперсии, в) с надежностью  $\gamma = 0,9722$  найти доверительный интервал для математического ожидания, г) построить гистограмму, д) аппроксимировать гистограмму теоретическим нормальным законом распределения.

Значения случайной величины:

704	639	703	718	678	727	682	685	649	701
628	674	647	707	754	677	751	684	750	680
650	667	692	676	716	707	647	680	681	662
685	688	637	698	606	716	676	689	667	694
707	719	661	641	733	745	643	680	706	644
721	668	669	612	686	664	644	670	605	689
685	680	679	673	726	647	679	732	701	705
670	670	681	748	640	668	672	702	711	721
722	735	736	722	717	660	667	732	682	693
703	741	638	697	725	682	717	712	667	673

## Вариант 6

### I Ряды

1. Исследовать на сходимость числовые ряды а)  $\sum_{n=1}^{\infty} (0,1)^n$  ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{3^n}$  .

2. Исследовать ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^6}$  на абсолютную и условную сходимость.

3. Найти интервал сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$  . Исследовать

сходимость ряда на концах интервала сходимости.

### II Теория вероятностей

4. Ребенок играет с буквами разрезной азбуки А, Г, И, К, Н. Найти вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово «КНИГА».

5. Из пяти ламп две неисправны (не горят). Путем включения в сеть выбирают исправную лампу. Найти вероятность того, что потребуется две попытки, если обнаруженную неисправную лампу выбрасывают.

6. Задан закон распределения дискретной случайной величины:

$X$	10	13	16	19	21
$p$	0,2	0,3	0,25	0,15	0,1

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

7. Вероятность того, что в течение гарантийного срока телевизор потребует ремонта, равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока из 6 телевизоров не более одного потребуют ремонта.

8. Зная математическое ожидание  $m = 10$  и среднее квадратичное отклонение  $\sigma = 8$  нормально распределенной случайной величины  $X$ , найти вероятность того, что а)  $X$  примет значение из интервала (14; 18), б) абсолютная величина отклонения  $X$  от математического ожидания  $|X - m|$  окажется меньше 2.

### III Элементы математической статистики

9. Дан протокол измерений случайной величины  $X$ . Для этой случайной величины требуется:

а) составить интервальную таблицу частот, б) получить точечные оценки для математического ожидания и дисперсии, в) с надежностью  $\gamma = 0,9876$  найти доверительный интервал для математического ожидания, г) построить гистограмму, д) аппроксимировать гистограмму теоретическим нормальным законом распределения.

Значения случайной величины:

610	556	671	690	617	478	463	426	547	535
577	412	604	474	702	516	605	639	579	731
432	683	592	582	559	505	542	636	545	572
597	706	612	689	621	597	487	525	562	626
558	562	627	534	510	655	688	579	479	559
592	514	456	595	625	534	604	561	626	542
593	544	452	535	473	738	637	564	640	643
539	636	543	499	614	603	605	550	562	621
511	662	552	552	502	422	626	631	502	512
525	661	498	565	566	606	650	465	689	630

## Вариант 7

### I Ряды

–1 1. Исследовать на сходимость числовые ряды а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n+1}$  ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$  .

2. Исследовать ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+2)$  на абсолютную и условную сходимость.

3. Найти интервал сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{4^n}$  . Исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости.

### II Теория вероятностей

4. Из полного набора домино наугад взяли одну кость. Найти вероятность того, что сумма очков на ней равна 6.

5. Фирма собирается заключить контракт на производство упаковочных материалов. Если основной конкурент не станет также претендовать на заключение контракта, то вероятность получения контракта оценивается в 0,45; в противном случае – в 0,25. По оценкам экспертов вероятность того, что конкурент также захочет заключить контракт, равна 0,40. Чему равна вероятность заключения контракта данной фирмой?

6. Задан закон распределения дискретной случайной величины:

$X$	13	15	17	19	21
$p$	0,2	0,3	0,25	0,15	0,1

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

7. Вероятность быть принятым на работу в некоторую фирму равна 0,8. Найти вероятность того, что из трех человек, пришедших на собеседование, только двое будут приняты на работу.

8. Зная математическое ожидание  $m = 9$  и среднее квадратичное отклонение  $\sigma = 3$  нормально распределенной случайной величины  $X$ , найти вероятность того, что а)  $X$  примет значение из интервала (9; 18), б) абсолютная величина отклонения  $X$  от математического ожидания  $|X - m|$  окажется меньше 6.

### III Элементы математической статистики

9. Дан протокол измерений случайной величины  $X$ . Для этой случайной величины требуется: а) составить интервальную таблицу частот, б) получить точечные оценки для математического ожидания и дисперсии, в) с надежностью  $\gamma = 0,9545$  найти доверительный интервал для математического ожидания, г) построить гистограмму, д) аппроксимировать гистограмму теоретическим нормальным законом распределения.

Значения случайной величины:

340	355	316	347	313	340	337	360	315	313
311	317	320	281	325	328	370	347	313	374
336	328	337	342	341	343	354	335	337	343
313	359	343	349	331	340	300	353	336	314
356	326	398	327	346	344	353	376	315	304
341	328	342	348	337	303	344	342	343	334
298	378	287	339	386	293	357	336	388	357
320	339	362	358	341	328	329	352	372	300
358	350	324	355	322	336	288	337	348	316
315	303	320	358	380	358	354	350	326	382

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №24.

Тема: «Раскрытие функции в тригонометрический ряд Фурье».

### ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Повторить знания по теме: «Раскрытие функции в тригонометрический ряд Фурье».
2. Организовать деятельность обучающихся по переводу своих знаний от усвоения отдельных фактов и понятий к их обобщению в целостную систему знаний.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** инструкционно - технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

### Справочный материал:

**Определение.** Тригонометрическим рядом называется функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

где действительные числа  $a_0, a_n, b_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) называются *коэффициентами ряда*.

Пусть  $f(x)$  – произвольная периодическая функция с периодом  $2\pi$ .

Предположим, что функция  $f(x)$  разлагается в тригонометрический ряд, т.е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (1)$$

Так как функция  $f(x)$  имеет период  $2\pi$ , то ее можно рассматривать в любом промежутке длины  $2\pi$ . В качестве основного промежутка возьмем отрезок

$[-\pi, \pi]$  и предположим, что ряд (1) на этом отрезке можно почленно интегрировать. Вычислим коэффициенты  $a_n, b_n$ . Для этого проинтегрируем обе части равенства (1) в пределах от  $-\pi$  до  $\pi$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right) = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \pi \cdot a_0$$

Отсюда

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (2)$$

Умножив обе части равенства (1) на  $\cos mx$  и проинтегрировав полученный ряд в пределах от  $-\pi$  до  $\pi$ , получим:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \sin nx dx \right) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = a_n \cdot \pi \end{aligned}$$

Отсюда

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n=1,2,3,4,\dots \quad (3)$$

Аналогично, умножив равенство (1) на  $\sin mx$  и проинтегрировав почленно на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , найдем:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n=1, 2, 3, 4, \dots \quad (4)$$

Числа  $a_0, a_n, b_n$ , определяемые по формулам (2)-(4), называются *коэффициентами Фурье* функции  $f(x)$ , а тригонометрический ряд с такими коэффициентами – **рядом Фурье** функции  $f(x)$ .

Для интегрируемой на отрезке  $[-\pi, \pi]$  функции  $f(x)$  записывают

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

и говорят: функции  $f(x)$  соответствует ее ряд Фурье.

б) Достаточное условие разложимости функции  $f(x)$  в ряд Фурье:

**Теорема (Дирихле).** Пусть  $2\pi$  – периодическая функция на отрезке  $[-\pi, \pi]$  удовлетворяет двум условиям:

1.  $f(x)$  кусочно-непрерывна;
2.  $f(x)$  кусочно-монотонна.

Тогда соответствующий функции  $f(x)$  ряд Фурье сходится на этом отрезке и при этом:

1. В точках непрерывности функции сумма ряда  $S(x)$  совпадает с самой функцией:  $S(x)=f(x)$ ;
2. В каждой точке  $x_0$  разрыва функции сумма ряда равна

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$$

3. В точках  $x = -\pi$  и  $x = \pi$  сумма ряда равна

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}$$

в) Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций.

Если разлагаемая на отрезке  $[-\pi, \pi]$  в ряд Фурье функция  $f(x)$  является четной или нечетной, то это отражается на формулах коэффициентов Фурье и на виде самого ряда.

Если функция четная, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (5)$$

где

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

Если функция нечетная, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (6)$$

где



$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

Ряды (5) и (6) называются *неполными тригонометрическими рядами*, или рядами по косинусам и по синусам соответственно.

4. Решение нескольких примеров на доске.

**Пример 1.** Разложить в ряд Фурье функцию  $f(x) = \sin^4 x$ .

□ Эта функция четная, значит, ряд Фурье будет иметь вид:  $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ .

Найдем его коэффициенты

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^4 x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos 4x \right) dx = \frac{3}{4} \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \right) \cos nx dx = \frac{3}{4 \cdot \pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 2x dx + \frac{1}{4 \cdot \pi} \int_0^{\pi} \cos^2 4x dx = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 4x}{2} dx + \frac{1}{4 \cdot \pi} \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 8x}{2} dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \\ f(x) &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x. \blacksquare \end{aligned}$$

**Пример 2.** Разложить в ряд Фурье функцию  $f(x) = x$  в интервале  $(-\pi, \pi)$

□ Эта функция нечетная, значит, ряд Фурье будет иметь вид:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \quad \text{Найдем его коэффициенты} \\ b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \sin nx dx = -\frac{2}{\pi \cdot n} \int_0^{\pi} x d(\cos nx) = -\frac{2}{n} \cdot (-1)^n = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n} \\ f(x) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\sin nx}{n}. \blacksquare \end{aligned}$$

**Пример 3.** Разложить в ряд Фурье функцию  $f(x) = |x|$  в интервале  $(-\pi, \pi)$

□ Эта функция четная, значит, ряд Фурье будет иметь вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \quad \text{Найдем его коэффициенты}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |x| dx = \pi \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2(-1 + (-1)^{n+1})}{\pi \cdot n^2}, \end{aligned}$$

если  $n$ -четное, то  $a_n = 0$

если  $n$ -нечетное, то  $a_n = -\frac{4}{\pi \cdot (2k+1)^2}$

$$\text{тогда } f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}. \blacksquare$$

**Пример 4.** Разложить в ряд Фурье функцию  $f(x) = \pi^2 - x^2$  в интервале  $(-\pi, \pi)$

□ Эта функция четная, значит, ряд Фурье будет иметь вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \quad \text{Найдем его коэффициенты}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) dx = 2 \cdot \pi^2 - \frac{2 \cdot \pi^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) \cos nx dx = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi \cdot n} \int_0^{\pi} 2x \sin nx dx = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}$$

тогда  $f(x) = \frac{2 \cdot \pi^2}{3} + 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right) \cos nx$ . ■

## Содержание работы.

**Задача №1.** Найти общий член ряда. Доказать, что этот ряд расходится:

1)  $1/2 + 2/5 + 3/8 + 4/11 + \dots$ ; 2)  $0.7 + 0.61 + 0.601 + 0.6001 + \dots$ ;

3)  $2/3 + 3/6 + 4/9 + 5/12 + \dots$ ; 4)  $1/3 + 2/5 + 3/7 + 4/9 + \dots$ ;

5)  $1/9 + 4/25 + 9/49 + 16/81 + \dots$ ; 6)  $1 + 4/5 + 6/8 + 8/11 + \dots$ ;

7)  $0.6 + 0.51 + 0.501 + 0.5001 + \dots$ ; 8)  $1/4 + 3/6 + 5/8 + 7/10 + \dots$ ;

9)  $1/5 - 3/10 + 5/15 - 7/20 + \dots$ ; 10)  $1 + 2/3 + 4/5 + 8/7 + \dots$ .

**Задача №2.** Исследовать сходимость положительного ряда, применяя какой – либо из достаточных признаков сходимости (сравнения, Даламбера, радикальный или интегральный):

10.a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 3n}$ ;

### Печатные и электронные издания

#### Основные учебные издания:

1. Алексеев, Г. В. Высшая математика. Теория и практика : учебное пособие для СПО / Г. В. Алексеев, И. И. Холявин. — Саратов : Профобразование, Ай Пи Эр Медиа, 2019. — 236 с. — ISBN 978-5-4486-0755-4, 978-5-4488-0253-9. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/81274>
2. Гончаренко, В.М. Элементы высшей математики: учебник / Гончаренко В.М., Липагина Л.В., Рылов А.А. — Москва : КноРус, 2021. — 363 с. — ISBN 978-5-406-08264-5. — URL: <https://book.ru/book/939287>
3. Гуляян, Б.Ш. Элементы высшей математики : учебное пособие / Гуляян Б.Ш., Гуляян Г.Б. — Москва : КноРус, 2021. — 436 с. — ISBN 978-5-406-06303-3. — URL: <https://book.ru/book/939826>
4. Фоминых, Е. И. Математика. Практикум: учебное пособие / Е. И. Фоминых. — 2-е изд. — Минск : Республиканский институт профессионального образования (РИПО), 2019. — 440 с. — ISBN 978-985-503-936-6. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование: [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/94307>

#### Дополнительные учебные издания:

5. Алпатов, А. В. Математика : учебное пособие для СПО / А. В. Алпатов. — 2-е изд. — Саратов : Профобразование, Ай Пи Эр Медиа, 2019. — 162 с. — ISBN 978-5-4486-0403-4, 978-5-4488-0215-7. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование: [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/80328>
6. Абдуллина, К. Р. Математика : учебник для СПО / К. Р. Абдуллина, Р. Г. Мухаметдинова. — Саратов : Профобразование, 2021. — 288 с. — ISBN 978-5-4488-0941-5. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/99917>
7. Аналитическая геометрия: практикум для СПО / О. Н. Казакова, О. Н. Конюченко, Т. А. Фомина, С. В. Харитоновна. — Саратов : Профобразование, 2020. — 116 с. — ISBN 978-5-4488-0577-6. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/92122>
8. Бахтина, Е.В. Комплект контрольно-измерительных материалов составлен для текущего контроля по дисциплине «Математика : монография / Бахтина Е.В., Корякина М.Л., Киселева И.И., Шулятьева Н.Н. — Москва : Русайнс, 2019. — 77 с. — ISBN 978-5-4365-3744-3. — URL: <https://book.ru/book/934593>
9. Новак, Е. В. Высшая математика. Алгебра : учебное пособие для СПО / Е. В. Новак, Т. В. Рязанова, И. В. Новак ; под редакцией Т. В. Рязановой. — 2-е изд. — Саратов, Екатеринбург : Профобразование, Уральский федеральный университет, 2019. — 115 с. — ISBN 978-5-4488-0484-7, 978-5-7996-2821-5. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/87795>
10. Основы математического анализа. Неопределенный интеграл : учебное пособие для СПО / И. К. Зубова, О. В. Острая, Л. М. Анциферова, Е. Н.

Рассоха. — Саратов : Профобразование, 2020. — 119 с. — ISBN 978-5-4488-0547-9. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/92135>

11. Основы математического анализа. Определенный интеграл и несобственные интегралы : учебное пособие для СПО / И. К. Зубова, О. В. Острая, Л. М. Анциферова, Е. Н. Рассоха. — Саратов : Профобразование, 2020.

— 129 с. — ISBN 978-5-4488-0548-6. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/92136>

12. Седых, И.Ю. Дискретная математика : учебное пособие / Седых И.Ю., Гребенщиков Ю.Б. — Москва : КноРус, 2020. — 329 с. — ISBN 978-5-406-01303-8. — URL: <https://book.ru/book/936135>

13. Сикорская, Г. А. Алгебра и теория чисел : учебное пособие для СПО / Г. А. Сикорская. — Саратов : Профобразование, 2020. — 303 с. — ISBN 978-5-4488-0612-4. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/91847>

### **Интернет ресурсы**

14. <http://window.edu.ru/window/catalog> Каталог Российского общеобразовательного портала;

15. <http://www.math.ru> Материалы по математике в Единой коллекции цифровых образовательных ресурсов;

16. <http://www.bymath.net> Вся элементарная математика: Средняя математическая интернет-школа;

17. <http://www.math.ru> Портал Math.ru: библиотека, медиатека, олимпиады, задачи, научные школы, учительская, история математики;

18. <http://www.exponenta.ru> Образовательный математический сайт Exponenta.ru

### **Электронно-библиотечная система:**

19. ЭБС «elibrary», ООО «РУНЭБ»

20. ЭБС «IPRbooks», ООО «Ай Пи Ар Медиа»

21. ЭБС «Лань», ООО «Издательство Лань»

22. ЭБС «PROФобразование»

23. ЭБС «Book.ru»

