

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Саратовский государственный технический университет имени
Гагарина Ю.А.»


Филиал федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
«Саратовский государственный технический университет имени
Гагарина Ю.А.» в г. Петровске



МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по дисциплине
ОП.10 «Численные методы»
специальности
09.02.07 «Информационные системы и программирование»

Методические указания рассмотрены
на заседании предметной (цикловой) комиссии
общепрофессиональных дисциплин
и профессиональных модулей
«16» июня 2025 года, протокол № 13

Председатель ПЦК  /Табарова Ю.А./

Петровск 2025

Пояснительная записка

Методические указания по выполнению практических работ подготовлены на основе рабочей программы учебной дисциплины ОП.10 «Численные методы», разработанной на основе ФГОС СПО по специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование» и соответствующих общих (ОК) компетенций:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

Целью освоения учебной дисциплины «Численные методы» является:

- развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, для продолжения образования и самообразования;
- овладение знаниями и умениями, необходимыми для построения алгоритмов вычислений на современных структурных языках, изучение основных алгоритмов работы с дискретными объектами, структурами данных и методов их исследования.

При выполнении практических работ студент должен **уметь**:

- использовать основные численные методы решения математических задач;
- выбирать оптимальный численный метод для решения поставленной задачи;
- давать математические характеристики точности исходной информации и оценивать точность полученного численного решения;
- разрабатывать алгоритмы и программы для решения вычислительных задач, учитывая необходимую точность получаемого результата.

При выполнении практических работ студент должен **знать**:

- методы хранения чисел в памяти электронно-вычислительной машины (далее – ЭВМ) и действия над ними, оценку точности вычислений;
- методы решения основных математических задач – интегрирования, дифференцирования, решения линейных и трансцендентных уравнений и систем уравнений с помощью ЭВМ.

Содержание практических занятий определено рабочей программой и тематическим планированием, соответствует теоретическому материалу изучаемых разделов учебной дисциплины.

Объём практических занятий по дисциплине определяется учебным планом по данной специальности.

Продолжительность практического занятия - 2 академических часа. Перед проведением практического занятия преподавателем организуется инструктаж, а по ее окончании – обсуждение итогов.

Комплект методических указаний по выполнению практических работ дисциплины «Численные методы» содержит 16 практических занятия.

Перечень практических работ по дисциплине «Численные методы»

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1.

Тема: Приближённые решения алгебраических и трансцендентных уравнений.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2.

Тема: Приближённые решения алгебраических и трансцендентных уравнений.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3.

Тема: Приближённые решения алгебраических и трансцендентных уравнений.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4.

Тема: Приближённые решения алгебраических и трансцендентных уравнений.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5.

Тема: Приближённые решения алгебраических и трансцендентных уравнений.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6.

Тема: Приближённые решения алгебраических и трансцендентных уравнений.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7.

Тема: Приближённые решения алгебраических и трансцендентных уравнений.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №8.

Тема: Приближённые решения алгебраических и трансцендентных уравнений.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №9.

Тема: Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 10.

Тема: Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №11.

Тема: Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №12.

Тема: Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №13.

Тема: Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №14.

Тема: Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №15.

Тема: Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №16.

Тема: Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений.

ИНСТРУКЦИИ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

Прежде чем приступить к выполнению заданий, внимательно прочитайте данные рекомендации. Практические работы включают в себя задания следующих видов:

Решение математических задач.

Одних вопросов и советов преподавателя студенту недостаточно для обучения решению задач. Нельзя забывать, что "умение решать задачи есть искусство, приобретаемое практикой".

Вопросы и советы студенту условно можно подразделить на четыре группы. Нужно помнить что вопросы, рекомендуемые для первого этапа, окажут помощь и на втором этапе, а рекомендуемые для второго этапа - на третьем и т. п. Дело в том, что этапы решения задачи не могут быть строго изолированы один от другого, между ними существует определенная связь, в их единстве заключается процесс решения задачи.

1. Вопросы и советы для усвоения содержания задачи (1-й этап).

Нельзя приступать к решению задачи, не уяснив четко, в чем заключается задание, т. е. не установив, каковы данные и искомые или посылки и заключения. **Первый совет:** не спешить начинать решать задачу. Этот совет не означает, что задачу надо решать как можно медленней. Он означает, что решению задачи должна предшествовать подготовка, заключающаяся в следующем:

- а) сначала следует ознакомиться с задачей, внимательно прочитав ее содержание. При этом схватывается общая ситуация, описанная в задаче;
- б) ознакомившись с задачей, необходимо вникнуть в ее содержание. При этом нужно следовать такому совету: выделить в задаче данные и искомые, а в задаче на доказательство - посылки и заключения.
- в) Если задача геометрическая или связана с геометрическими фигурами, полезно сделать чертеж к задаче и обозначить на чертеже данные и искомые г) В том случае, когда данные (или искомые) в задаче не обозначены, надо ввести подходящие обозначения. При решении текстовых задач алгебры и начал анализа вводят обозначения искомого или других переменных, принятых за искомые.
- д) Уже на первой стадии решения задачи, стадии понимания задания, полезно попытаться ответить на вопрос: "Возможно ли удовлетворить условию?" Не всегда сразу удастся ответить на этот вопрос, но иногда это можно сделать. Отвечая на вопрос: "Возможно ли удовлетворить условию?", полезно выяснить, однозначно ли сформулирована задача, не содержит ли она избыточных или противоречивых данных. Одновременно выясняется, достаточно ли данных для решения задачи.

2. Составление плана решения задачи (2-й этап). Составление плана решения задачи является главным шагом на пути ее решения. Правильно составленный план решения задачи почти гарантирует правильное ее решение.

Но составление плана может оказаться сложным и длительным процессом. Поэтому попробуйте ответить на вопросы, которые помогут вам лучше и быстрее составить план решения задачи, "открыть" идею ее решения:

а) Известна ли вам какая-либо родственная задача? Аналогичная задача? Если такая или родственная задача известна, то составление плана решения задачи не будет затруднительным. Но далеко не всегда известна задача, родственная решаемой. В этом случае может помочь в составлении плана решения совет.

б) Подумайте, известна ли вам задача, к которой можно свести решаемую. Если такая задача известна вам, то путь составления плана решения данной задачи очевиден: свести решаемую задачу к решенной ранее. Может оказаться, что родственная задача неизвестна вам и вы не можете свести данную задачу к какой-либо известной. План же сразу составить не удастся.

Стоит воспользоваться советом: "Попытайтесь сформулировать задачу иначе". Иными словами, попытайтесь перефразировать задачу, не меняя ее математического содержания.

При переформулировании задачи пользуйтесь либо определениями данных в ней математических понятий (заменяют термины их определениями), либо их признаками (точнее сказать, достаточными условиями). Надо отметить, что способность учащегося переформулировать текст задачи является показателем понимания математического содержания задачи.

Переформулировка задачи – это перевод ее на язык математики, т. е. язык алгебры, геометрии или анализа. Это, скорее, формализация задачи, "математизация" ее. К такому приему и приходится часто прибегать при решении многих текстовых задач.

г) Составляя план решения задачи, всегда следует задавать себе вопрос: "Все ли данные задачи использованы?" Выявление неучтенных данных задачи облегчает составление плана ее решения.

д) При составлении плана задачи иногда бывает полезно следовать совету: "Попытайтесь преобразовать искомые или данные". Часто преобразование искомого или данных способствует более быстрому составлению плана решения. При этом искомые преобразуют так, чтобы они приблизились к данным, а данные – так, чтобы они приблизились к искомым. Так, при каждом случае тождественных преобразований данные преобразуются, постепенно приближаясь к результату (искомому). Аналогично уравнение, систему уравнений, неравенство или систему неравенств преобразуют в равносильные, чтобы найти их корни или множество решений.

е) Нередко случается так, что, вы все же не можете составить план ее решения. Тогда может помочь еще один совет: "Попробуйте решить лишь часть задачи", т. е. попробуйте сначала удовлетворить лишь части условий, с тем чтобы далее искать способ удовлетворить оставшимся условиям задачи.

ж) Нередко в составлении плана решения задачи помогает ответ на вопрос: "Для какого частного случая возможно достаточно быстро решить эту задачу?" Обнаружив такой частный случай, вы ставите перед собой новую цель – воспользоваться решением задачи в найденном частном случае для более общего (но, может быть, не самого общего) случая. Так можно поступить,

постепенно обобщая задачу до исходной, решаемой задачи. Предполагаемый вариант рассуждений - явное применение полной индукции. Итак, совет: "Рассмотрите частные случаи задачной ситуации, решите задачу для какого-нибудь частного случая, примените индуктивные рассуждения".

3. Реализация плана решения задачи (3-й этап). План указывает лишь общий контур решения задачи. При реализации плана решающий задачи рассматриваются все детали, которые вписываются в этот контур. Эти детали надо рассматривать тщательно и терпеливо. Но при этом (решающему задачу) полезно следовать некоторым советам:

а) Проверяйте каждый свой шаг, убеждайтесь, что он совершен правильно. Иными словами, нужно доказывать правильность каждого шага ссылками на соответствующие, известные ранее математические факты, предложения.

б) При реализации плана поможет и совет: "Замените термины и символы их определениями". Так, термин "параллелограмм" заменяется его определением: "Четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны", термин "предел числовой последовательности" для доказательства, например, того предложения, что предел суммы двух последовательностей, имеющих пределы, равен сумме пределов этих последовательностей, можно заменить, и вполне успешно, его определением.

в) При решении некоторых задач помогает совет: "Воспользуйтесь свойствами данных в условии объектов".

4. Анализ и проверка правильности решения задачи (4-й этап). Даже очень хорошие студенты, получив ответ и тщательно изложив ход решения, считают задачу решенной. А ведь получение результата не означает еще, что задача решена правильно. Тем более не означает, что для решения выбран лучший, наиболее удачный, изящный, если можно так выразиться, вариант. По В. М. Брадису, задачу можно считать решенной, если найденное решение:

- безошибочно,
- обоснованно,
- имеет исчерпывающий характер.

Поэтому анализ решения задачи, проверка решения и достоверности результата должны быть этапом решения задачи. Итак, два совета: "Проверьте результат", "Проверьте ход решения". Проверка результата может производиться различными способами. Проверая правильность хода решения, мы тем самым убеждаемся и в правильности результата. Значит, надо выполнить совет: "Проверьте все узловые пункты решения", еще раз убедитесь в истинности проведенных рассуждений.

Второй способ проверки результата заключается в получении того же результата применением другого метода решения задачи, поэтому полезно всегда задавать решающему вопрос: "Нельзя ли тот же результат получить иначе?" Иными словами, стоит последовать совету: "Решите задачу другим способом". Если при решении задачи другим способом получен тот же результат, что и в первом случае, задачу можно считать решенной правильно. К тому же получение различных вариантов решения одной и той же задачи имеет важное обучающее значение.

Выполнение контрольных работ.

1. При подготовке к любой контрольной работе рекомендуется сначала внимательно разобраться с теоретическим материалом по учебнику, затем закрепить свои знания, решая задачи.
2. Подготовиться к работе означает: вы внимательно просматриваете тексты задач и прикидываете, какие из предложенных задач вам по силам и выполняете их в первую очередь.
3. Если вы переоценили свои силы — взяли трудную задачу — и не решили, то не отчаивайтесь. Дома в спокойной обстановке разберитесь, в чем причина вашей неудачи, и решите эту же задачу.
4. Если у вас пока нет большой любви к определенной дисциплине, и вас нервируют трудные задачи, то не расстраивайтесь: для начала выберите задачи начального уровня. Решая самые простые задачи, вы постепенно приобретаете уверенность в своих силах.
5. Если вы успешно решили легкую задачу на уроке, то попросите у преподавателя более трудную задачу. Если на уроке не успели, то обратитесь к преподавателю с просьбой дать вам возможность решить более трудную задачу во внеурочное время.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1

Тема: «Приближённые решения алгебраических и трансцендентных уравнений»

Цель: научиться решать алгебраические и трансцендентные уравнения.

Оборудование: справочные пособия.

Справочный материал

Мы прекрасно решаем квадратные и биквадратные уравнения, наипростейшие тригонометрические и степенные. Еще водятся "мастодонты", знающие о существовании формул Кардано для кубических уравнений. Однако доказано, что даже алгебраическое уравнение выше четвертой степени неразрешимо в элементарных функциях. Поэтому решение уравнения проводят численно в два этапа (здесь разговор идет лишь о вещественных корнях уравнения). На первом этапе производится *отделение корней* - поиск интервалов, в которых содержится только по одному корню. Второй этап решения связан с *уточнением корня* в выбранном интервале (определением значения корня с заданной точностью).

Уточнение корней можно выполнить:

- методом половинного деления (дихотомии)
- методом хорд

- методом касательных (Ньютона)
- методом простой итерации

Содержание работы

Использование графического метода для приближенного решения уравнений в электронных таблицах.

Смысл графического метода в построении графика функции $y = \cos(x) - x$ на некотором отрезке, абсцисса точки пересечения графика с осью ОХ является корнем уравнения $\cos(x) = x$.)

Для построения графика нужно определить отрезок, на котором существует корень. Сделаем это математическим методом. Множеством значений левой части уравнения, функции $y = \cos(x)$, является отрезок $[-1; 1]$. Поэтому уравнение может иметь корень только на этом отрезке.

Итак, найдем приближенный корень уравнения $\cos(x) = x$ на отрезке $[-1; 1]$ с шагом, например, 0,1 в программе Microsoft Excel.

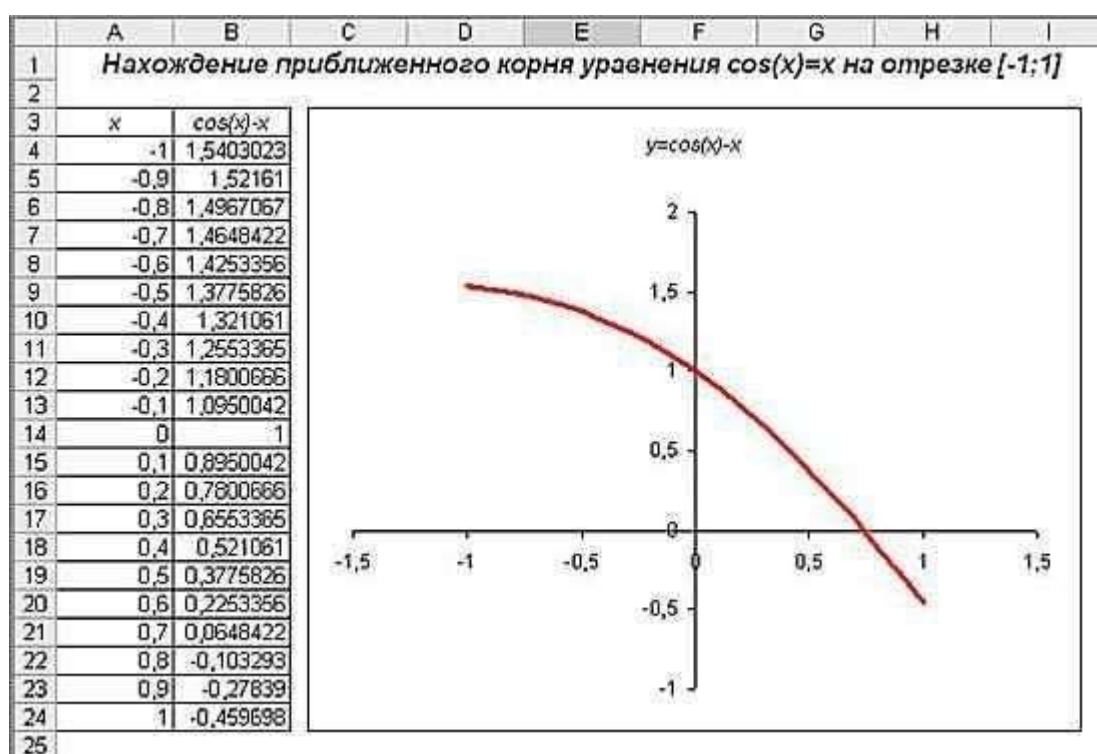


Рисунок 1

Приближенный корень уравнения $x=0,75$. Однако это приближение не обладает высокой точностью. Для нахождения приближенного корня уравнения с указанной заранее точностью используются математические методы, в частности, метод половинного деления.

Поиск приближенного решения уравнения методом *Подбор параметра*.

- Определить по графику отрезок, где расположен корень (значение функции меняет знак);
- Из двух значений функции на концах этого отрезка определить ближайшее к нулю значение (минимальное по модулю)
- В таблице значений функции выделить ячейку с этим значением;
- Перейти на вкладку **Данные|Анализ «что-если»|Подбор параметра...** ;
- В открывшемся диалоговом окне *Подбор параметра* (Рис. 1) в поле *Значение* ввести требуемое значение функции – 0.
- В поле *Изменяя значение ячейки:* ввести адрес ячейки соответствующего значения аргумента (щелкнув по ячейке левой кнопкой мыши).
- Щелкнуть по кнопке ОК.

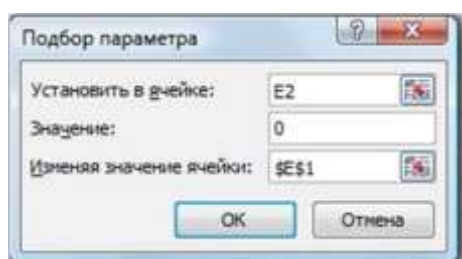
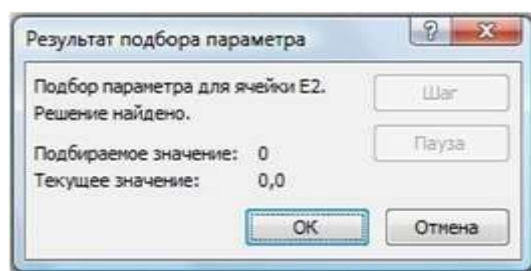


Рис. 1. (Пример, для случая, когда значение функции расположено в ячейке **E2**, а значение аргумента в ячейке **E1**)



- В окне **Результат подбора** (Рис. 2) выводится информация о величине подбираемого и выбранного значения функции;
- в ячейке значения аргумента выводится подобранное значение аргумента с заданной точностью
- Задать точность можно путем установки в ячейках таблицы точности представления чисел – числа знаков после запятой (**Главная|Число|Числовой**).

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2

Тема: «Приближённые решения алгебраических и трансцендентных уравнений»

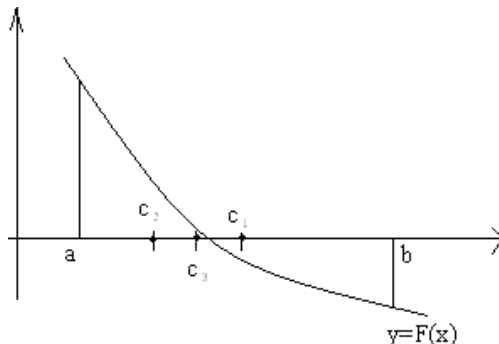
Цель: научиться решать алгебраические и трансцендентные уравнения.

Оборудование: справочные пособия.

Содержание работы

Изучение метода половинного деления при решении уравнений.

Идея метода половинного деления состоит в сведении первоначального отрезка $[a; b]$, на котором существует корень уравнения, к отрезку заданной точности h .



Процесс сводится к последовательному делению отрезка пополам точкой $c=(a+b)/2$ и отбрасыванию половины отрезка ($[a; c]$ или $[c; b]$), на которой корня нет. Выбирается тот отрезок, на концах которого функция принимает значения разных знаков, т.е. произведение этих значений отрицательно.

Функция на этом отрезке пересекает ось абсцисс. Концам этого отрезка вновь

присваивают обозначения a, b .

Это деление продолжается до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше удвоенной точности, т.е. пока не выполнится неравенство $(b-a)/2 < h$. Деление такого отрезка пополам даст значение корня $x=(a+b)/2$ с заданной точностью.

Приближенный корень уравнения $x=0,75$ найден с точностью 0,5.

Теперь найдем корень уравнения $\cos(x)=x$ с точностью 0,001. Решим поставленную задачу с использованием Microsoft Excel.

Моделирование листа электронных таблиц для приближенного решения уравнения методом половинного деления.

Исходные значения границ отрезка a и b запишем в ячейки A4 и B4, в ячейке C4 получим середину заданного отрезка, в ячейках D4 и E4 — значения функции $f(x)$ на концах отрезка $[a; c]$, в ячейке F4 будем определять длину отрезка $[a; b]$, необходимую точность укажем в ячейке H4. В ячейку G4 запишем формулу нахождения корня по правилу: если длина текущего отрезка соответствует требуемой точности, то в качестве корня уравнения примем значение середины этого отрезка. Мы уже знаем, что корень в нашем случае не найдется за один шаг, поэтому чтобы при копировании формулы из ячейки G4 адрес ячейки H4 не менялся используем абсолютную адресацию.

В пятой строке запишем значения, полученные после первого шага деления исходного отрезка пополам. В ячейки A5 и B5 нужно вписать формулы

определения границ нового отрезка. В ячейки C4, D4, E4, F4, G4 формулы копируются из ячеек C5, D5, E5, F5, G5 соответственно.

Таким образом, в режиме формул лист электронной таблицы примет следующий вид:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Решение уравнения $\cos(x)=x$ методом деления отрезка пополам							
2								
3	a	b	c	f(a)	f(c)	Длина	Значение корня	Точность
4	-1	1	$=(A4+B4)/2$	$=\cos(A4) \cdot A4$	$=\cos(C4) \cdot C4$	$=B4 \cdot A4$	$=\text{Если}(F4/2 < \$H\$4; C4; "")$	0,001
5	$=\text{Если}(D4 \cdot E4 < 0, A4; C4)$	$=\text{Если}(D4 \cdot E4 < 0, C4; B4)$	$=(A4+B4)/2$	$=\cos(A4) \cdot A4$	$=\cos(C4) \cdot C4$	$=B4 \cdot A4$	$=\text{Если}(F4/2 < \$H\$4; C4; "")$	
6								

Рисунок 2

Далее нужно будет копировать формулы в очередную строку до тех пор, пока в столбце G не появится искомое значение корня.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3

Тема: «Приближённые решения алгебраических и трансцендентных уравнений»

Цель: научиться решать алгебраические и трансцендентные уравнения.

Оборудование: справочные пособия.

Содержание работы

Задание 1. Найдите корень уравнения $\cos(x)=x$ с точностью 0.001.

Сравните результаты решения уравнения $\cos(x)=x$, полученные с использованием разных инструментальных средств.

Задание 2. Найти значение корня уравнения: $x^5 - 4x^2 + x - 2 = 0$, с точностью $d=0.001$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4

Тема: «Приближённые решения алгебраических и трансцендентных уравнений»

Цель: Изучение возможностей пакета Ms Excel 2007 при решении нелинейных уравнений. Приобретение навыков решения нелинейных уравнений и систем средствами пакета.

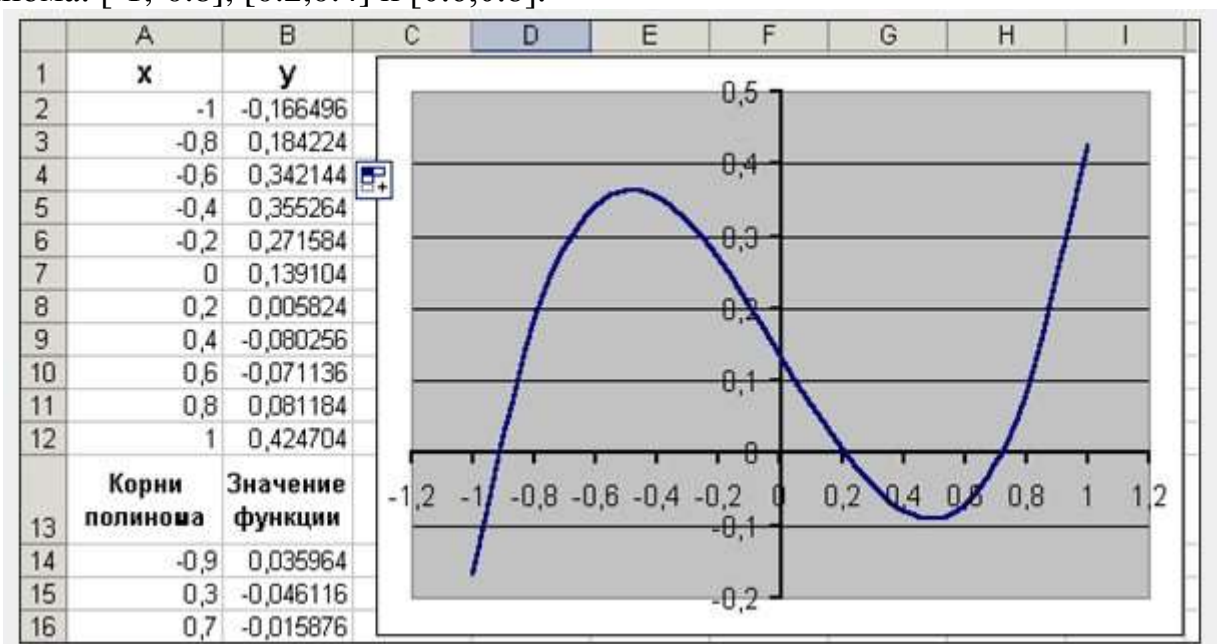
Оборудование: справочные пособия, Ms Excel.

Содержание работы

Задание 1. Найти корни полинома $x^3 - 0,01x^2 - 0,7044x + 0,139104 = 0$.

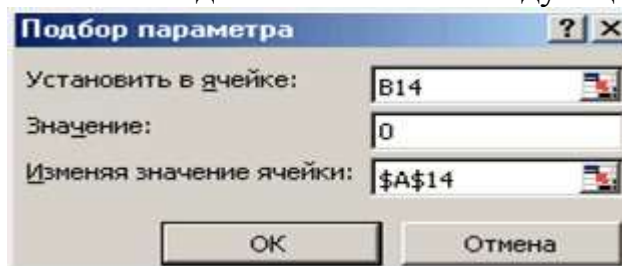
Для начала решим уравнение графически. Известно, что графическим решением уравнения $f(x)=0$ является точка пересечения графика функции $f(x)$ с осью абсцисс, т.е. такое значение x , при котором функция обращается в ноль.

Проведем табулирование нашего полинома на интервале от -1 до 1 с шагом 0,2. Результаты вычислений приведены на ри., где в ячейку B2 была введена формула: $=A2^3 - 0,01*A2^2 - 0,7044*A2 + 0,139104$. На графике видно, что функция три раза пересекает ось Oх, а так как полином третьей степени имеет не более трех вещественных корней, то графическое решение поставленной задачи найдено. Иначе говоря, была проведена локализация корней, т.е. определены интервалы, на которых находятся корни данного полинома: $[-1,-0.8]$, $[0.2,0.4]$ и $[0.6,0.8]$.



Теперь можно найти корни полинома методом последовательных приближений с помощью команды **Данные→Работа с данными→Анализ «Что-Если»→Подбор параметра**.

После ввода начальных приближений и значений функции можно обратиться к команде **Данные→Работа с данными→Анализ «Что-Если»→Подбор параметра** и заполнить диалоговое окно следующим образом.



В поле **Установить в ячейке** дается ссылка на ячейку, в которую введена формула, вычисляющая значение левой части уравнения (уравнение должно быть записано так, чтобы его правая часть не содержала переменную). В поле **Значение** вводим правую часть уравнения, а в поле **Изменяя значения ячейки**

дается ссылка на ячейку, отведенную под переменную. Заметим, что вводить ссылки на ячейки в поля диалогового окна **Подбор параметров** удобнее не с клавиатуры, а щелчком на соответствующей ячейке.

После нажатия кнопки ОК появится диалоговое окно Результат подбора параметра с сообщением об успешном завершении поиска решения, приближенное значение корня будет помещено в ячейку A14.



Два оставшихся корня находим аналогично. Результаты вычислений будут помещены в ячейки A15 и A16.

	А	В
	Корни полинома	Значение функции
13		
14	-0,92034081	-0,000632
15	0,210213539	-0,000123
16	0,720718302	0,0006019

Задание 2. Решить уравнение $e^x - (2x - 1)^2 = 0$.

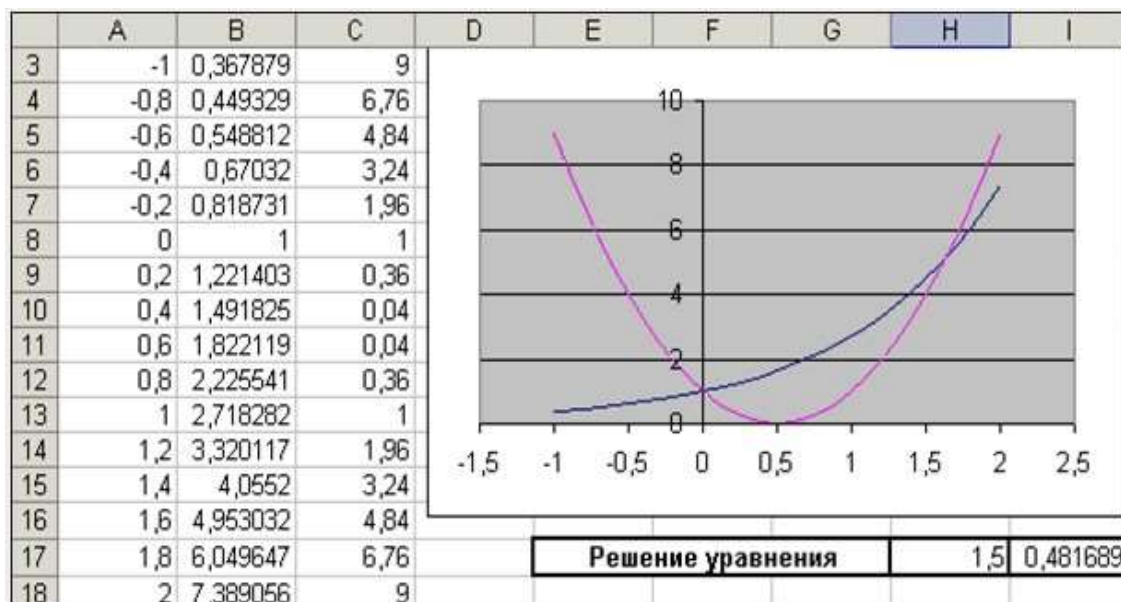
Проведем локализацию корней нелинейного уравнения.

Для этого представим его в виде $f(x) = g(x)$, т.е. $e^x = (2x - 1)^2$ или $f(x) = e^x$, $g(x) = (2x - 1)^2$, и решим графически.

Графическим решением уравнения $f(x) = g(x)$ будет точка пересечения линий $f(x)$ и $g(x)$.

Построим графики $f(x)$ и $g(x)$. Для этого в диапазон A3:A18 введем значения аргумента. В ячейку B3 введем формулу для вычисления значений функции $f(x)$: $=\text{EXP}(A3)$, а в C3 для вычисления $g(x)$: $=(2*A3-1)^2$.

Результаты вычислений и построение графиков $f(x)$ и $g(x)$:



На графике видно, что линии $f(x)$ и $g(x)$ пересекаются дважды, т.е. данное уравнение имеет два решения. Одно из них тривиальное и может быть вычислено точно:

$$(x = 0) \Rightarrow \begin{cases} e^x = 1 \\ (2x - 1)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow y(x) = 1.$$

Для второго можно определить интервал изоляции корня: $1,5 < x < 2$.

Теперь можно найти корень уравнения на отрезке $[1,5, 2]$ методом последовательных приближений.

Введём начальное приближение в ячейку $H17 = 1,5$, и само уравнение, со ссылкой на начальное приближение, в ячейку $I17 = \text{EXP}(H17) - (2 * H17 - 1)^2$.

Далее воспользуемся командой **Данные → Работа с данными → Анализ «Что-Если» → Подбор параметра**.

и заполним диалоговое окно **Подбор параметра**.

Подбор параметра

Установить в ячейке:

Значение:

Изменяя значение ячейки:

Результат поиска решения будет выведен в ячейку $H17$.

	E	F	G	H	I
17	Решение уравнения			1,629052	3,14E-06
18					

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5

Тема: «Приближённые решения алгебраических и трансцендентных уравнений»

Цель: Изучение возможностей пакета Ms Excel 2007 при решении нелинейных уравнений. Приобретение навыков решения нелинейных уравнений и систем средствами пакета.

Оборудование: справочные пособия, Ms Excel.

Содержание работы

Задание. Найти корни полинома

1. $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0$
2. $3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 10 = 0$
3. $x^4 - 18x^2 + 6 = 0$
4. $x^3 + 0.4x^2 + 0.6x - 1.6 = 0$
5. $x^3 + 2x + 4 = 0$
6. $x^3 + 0.1x^2 + 0.4x - 1.2 = 0$
7. $2x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 1 = 0$
8. $2x^4 - x^2 - 10 = 0$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6

Тема: «Приближённые решения алгебраических и трансцендентных уравнений»

Цель: Изучение возможностей пакета Ms Excel 2007 при решении нелинейных уравнений. Приобретение навыков решения нелинейных уравнений и систем средствами пакета.

Оборудование: справочные пособия, Ms Excel.

Содержание работы

Задание. Найдите решение нелинейного уравнения.

1. $e^{-2x} - 2x + 1 = 0$
2. $\arctg(x-1) + 2x = 0$
3. $2\sin(x + \frac{\pi}{3}) = 0.5x^2 - 1$
4. $x - \sin x = 0.25$
5. $2e^x + 1 = (x-2)^2$
6. $(x+2)\log_2 x = 1$
7. $x = \sqrt{\lg(x+2)}$
8. $x\lg(x+1) = 1$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 7

Тема: «Приближённые решения алгебраических и трансцендентных уравнений»

Цель: повторение и закрепление графического способа решения уравнений; закрепление навыков записи и копирования формул, построения графиков функций в электронных таблицах Excel 2007; формирование и первичное закрепление знаний о решении уравнений с использованием возможностей электронных таблиц Excel 2007.

Оборудование: справочные пособия, Ms Excel.

Содержание работы

Графический способ решения уравнений вида $f(x)=0$ в Excel.

Пример: Используя средства построения диаграмм в Excel, решить графическим способом уравнение $-x^2+5x-4=0$.

Для этого: построить график функции $y=-x^2+5x-4$ на промежутке $[0; 5]$ с шагом 0,25; найти значения x точек пересечения графика функции с осью абсцисс.

Выполнение задания можно разбить на этапы:

1 этап: Представление функции в табличной форме:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1 x		0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5	2,75	3	
2 y		-4,0	-2,5	-1,5	-0,8	0,0	0,7	1,3	1,7	2,0	2,2	2,3	2,2	2,0	
3															

Для этого:

- в ячейку **A1** ввести текст **X**, в ячейку **A2** — **Y**;
- в ячейку **B1** ввести число 0, в ячейку **C1** – число 0,25;
- выделить ячейки **B1:C1**, подвести указатель мыши к маркеру выделения, и в тот момент, когда указатель мыши примет форму черного крестика, протянуть маркер выделения вправо до ячейки **V1**.

	A	B	C	D	E	F
1 x		0	0,25			
2						
3						

до ячейки V1

- в ячейку **B2** ввести формулу **=-(B1^2)+5*B1-4**;

При вводе формулы можно вводить адрес ячейки с клавиатуры (не забыть переключиться на латиницу), а можно просто щелкнуть мышью на ячейке с нужным адресом.

После ввода формулы в ячейке окажется результат вычисления по формуле, а в поле ввода строки формул - сама формула:

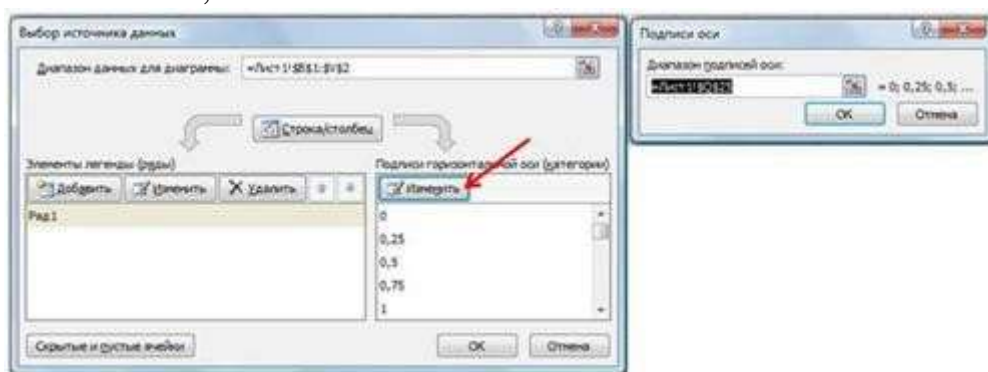
		B2		fx		=-(B1^2)+5*B1-4	
	A	B	C	D	E	F	G
1 x		0	0,25	0,5	0,75	1	1,25
2 y		-4,0					
3							

- скопировать содержимое ячейки **B2** в ячейки **C2:V2** за маркер выделения. Весь ряд выделенных ячеек заполнится содержимым первой ячейки. При этом ссылки на ячейки в формулах изменятся относительно смещения самой формулы.

2 этап: Построение диаграммы типа График.

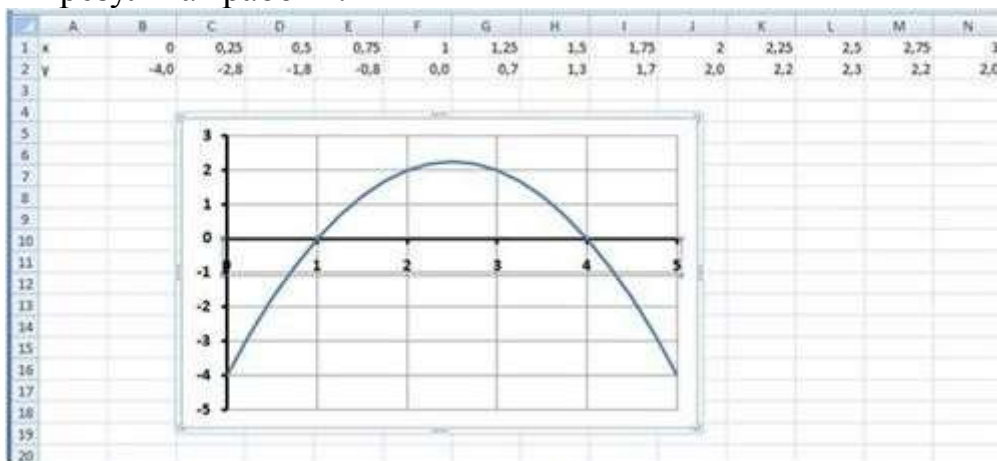
Для этого:

- выделить диапазон ячеек **B2:V2**;
- на вкладке *Вставка*|*Диаграммы*|*График* выбрать вид *График*;
- на вкладке *Конструктор*|*Выбрать данные* в открывшемся окне «Выбор источника данных» щелкнуть по кнопке *Изменить* в поле *Подписи горизонтальной оси* - откроется окно «Подписи оси». Выделить в таблице диапазон ячеек **B1:V1** (значения переменной x). В обоих окнах щелкнуть по кнопкам *ОК*;



- на вкладке *Макет*|*Оси*|*Основная горизонтальная ось*|*Дополнительные параметры основной горизонтальной оси* выбрать:
Интервал между делениями: 4;
Интервал между подписями: *Единица измерения интервала*: 4;
Положение оси: по делениям;
Выбрать ширину и цвет линии (Вкладки *Тип линии* и *Цвет линии*);
- самостоятельно изменить ширину и цвет линии для вертикальной оси;
- на вкладке *Макет*|*Сетка*|*Вертикальные линии сетки по основной оси* выбрать *Основные линии сетки*.

Примерный результат работы:



3 этап: Определение корней уравнения.

График функции $y = -x^2 + 5x - 4$ пересекает ось абсцисс в двух точках и, следовательно, уравнение $-x^2 + 5x - 4 = 0$ имеет два корня: $x_1 = 1$; $x_2 = 4$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8

Тема: «Приближённые решения алгебраических и трансцендентных уравнений»

Цель: повторение и закрепление графического способа решения уравнений; закрепление навыков записи и копирования формул, построения графиков функций в электронных таблицах Excel 2007; формирование и первичное закрепление знаний о решении уравнений с использованием возможностей электронных таблиц Excel 2007.

Оборудование: справочные пособия, Ms Excel.

Содержание работы

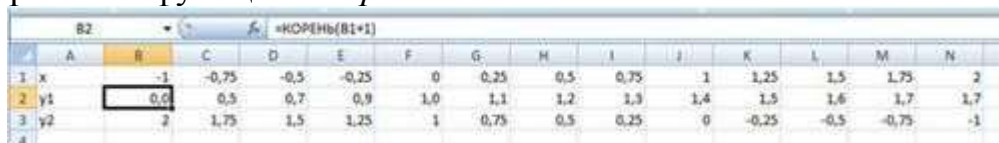
Графический способ решения уравнений вида $f(x) = g(x)$ в Excel.

Пример: Решить графическим способом уравнение $\sqrt{x+1} = 1 - x$.

Для этого: в одной системе координат построить графики функций $y_1 = \sqrt{x+1}$ и $y_2 = 1 - x$ на промежутке $[-1; 4]$ с шагом 0,25; найти значение x точки пересечения графиков функций.

1 этап: Представление функций в табличной форме:

- Перейти на Лист2.
- Аналогично *Примеру 1*, применив приемы копирования, заполнить таблицу. При табулировании функции $y_1 = \sqrt{x+1}$ воспользоваться встроенной функцией *Корень*.

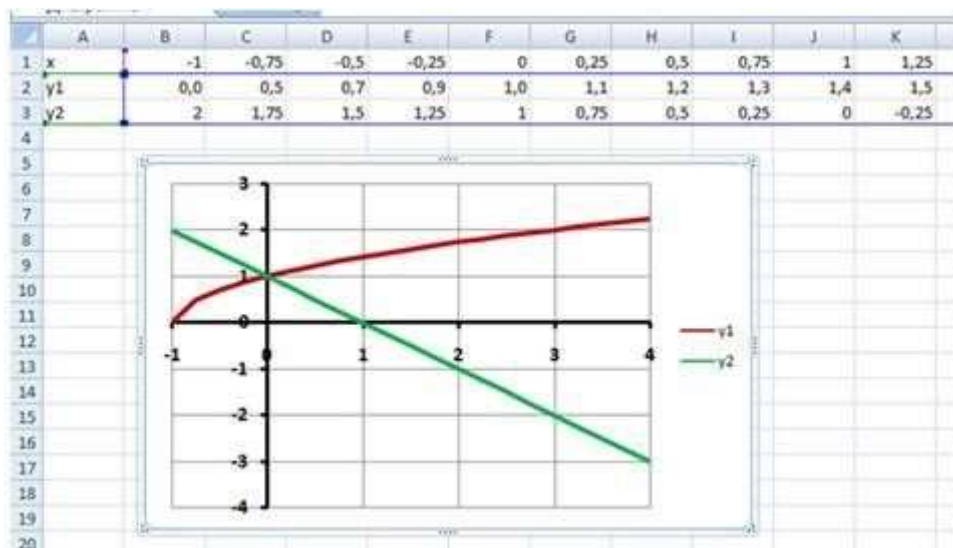


	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	x	-1	-0,75	-0,5	-0,25	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
2	y1	0,0	0,5	0,7	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,7
3	y2	2	1,75	1,5	1,25	1	0,75	0,5	0,25	0	-0,25	-0,5	-0,75	-1
4														

2 этап: Построение диаграммы типа График.

- Выделить диапазон ячеек (A2:V3);
- Аналогично *Примеру 1* вставить и отформатировать диаграмму типа *График*, выбрав дополнительно в настройках горизонтальной оси: *вертикальная ось пересекает в категории с номером 5*.

Примерный результат работы:



3 этап: Определение корней уравнения.

Графики функций $y_1 = \sqrt{x+1}$ и $y_2 = 1-x$ пересекаются в одной точке (0;1) и, следовательно, уравнение $\sqrt{x+1} = 1-x$ имеет один корень – абсцисса этой точки: $x=0$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 9

Тема: «Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений»

Цель: научиться решать обыкновенные дифференциальные уравнения, познакомиться с методами решения дифференциальных уравнений.

Оборудование: справочные пособия.

Справочный материал

При построении математических моделей большинства реальных физических, химических, биологических процессов возникают обыкновенные дифференциальные уравнения или уравнения с частными производными. Мы рассмотрим приближенные способы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, ограничившись при этом для простоты лишь уравнениями первого порядка, разрешенными относительно производной.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задано уравнение $Y'=f(x,Y)$ и начальное условие $Y(x_0)=Y_0$. Требуется найти с заданной степенью точности приближенное решение $Y=Y(x)$, удовлетворяющее начальному условию и уравнению на некотором отрезке $[a,b]$, где $a=X_0$.

Метод Пикара.

Напомним известные теоремы Пикара и Пеано о существовании и единственности решения данной задачи (задачи Коши).

Теорема ПЕАНО утверждает, что решение задачи Коши существует в некоторой окрестности точки X_0 , если функция $f(x,Y)$ непрерывна в окрестности точки (X_0, Y_0) .

Теорема ПИКАРА гласит, что если не только функция $f(x,Y)$, но и ее частная производная $f_y(x,Y)$ также непрерывна в окрестности точки (X_0, Y_0) , то решение задачи Коши единственно на некотором отрезке, содержащем точку X_0 .

Доказательство теоремы Пикара следует из общего принципа сжимающих отображений, оно весьма непросто, но обладает существенным преимуществом - оно конструктивно. Причем последовательность функций $Y_n(x)$, которая строится в нем, сходится к решению равномерно на отрезке со скоростью геометрической прогрессии. В методе Пикара последовательность функций $Y_n(x)$ строится по рекуррентной формуле:

$$Y_{n+1}(x) = Y_0 + \int_{x_0}^x f(t, Y_n(t)) dt \quad \text{при } n = 0, 1, 2, \dots,$$

а за нулевое приближение берется константа Y_0 : $Y_0(x) \equiv Y_0$.

Для того, чтобы стало понятно происхождение этой рекуррентной формулы, заметим, что интегральное уравнение

$$Y(x) = Y_0 + \int_{x_0}^x f(t, Y(t)) dt$$

эквивалентно исходной задаче Коши, поскольку любая функция $Y(x)$, являющаяся его решением, удовлетворяет начальному условию $Y(X_0) = Y_0$ и уравнению $Y'(x) = f(x, Y(x))$ и наоборот.

Вопрос: Почему это действительно так?

Пример 1. Применим метод Пикара для решения уравнения $Y' = Y$ с начальным условием $Y(0) = 1$. Такая задача эквивалентна поиску решения интегрального уравнения $Y = 1 + \int Y(t) dt$.

В качестве начального приближения берем функцию $Y_0 = 1$.

Тогда $Y_1 = 1 + \int Y_0(t) dt = 1 + \int dt = 1 + x$.

Далее, $Y_2 = 1 + \int Y_1(t) dt = 1 + \int (1+t) dt = 1 + x + x^2/2$.

$Y_3 = 1 + \int Y_2(t) dt = 1 + \int (1+t+t^2/2) dt = 1 + x + x^2/2 + x^3/6$.

Можно убедиться, что $Y_n = 1 + x + x^2/2 + \dots + x^n/n!$.

Упражнение 1. Доказать последнее равенство строго, используя принцип математической индукции.

Упражнение 2. В примере 1 найти точное решение $Y(X)$ и оценить скорость равномерной сходимости $Y_n(x) \rightarrow Y(X)$ на отрезке $[0, 1]$.

В целом, приближенные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений можно разбить на 3 типа:

- **аналитические**, позволяющие получить приближенное решение $Y(x)$ в виде формулы,
- **графические**, дающие возможность приближенного построения графика решения $Y(x)$, т.е. интегральной кривой,

- **численные**, в результате применения которых получается таблица приближенных значений функции $Y(x)$, хотя такое деление и несколько условно.

Кроме метода Пикара, к аналитическим методам относится и **метод разложения неизвестной функции $Y(x)$ в ряд**, на котором мы сейчас остановимся.

Напишем формальное разложение $Y(X)$ в ряд Тейлора в точке a :

$$Y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^k}{k!} Y^{(k)}(a)$$

В это равенство входят производные неизвестной функции $Y(X)$ в точке a , однако именно в этой точке, пользуясь условиями задачи, мы можем последовательно найти любое число производных и получить необходимое приближение решения. В общем виде это выглядит так: $Y_0(a)=Y(a)= Y_0$; $Y'(a)=f(a, Y(a))= f(a, Y_0)$

Дифференцируя данное нам уравнение по X , получим $Y''(X)=f'_x(x, Y(x))+f'_y(x, Y(x))*Y'(x)$, откуда $Y''(a)= f'_x(a, Y_0)+f'_y(a, Y_0)*f(a, Y_0)$.

Аналогично получается и значения третьей и дальнейших производных в точке a - дифференцируем нужное число раз исходное уравнение и подставляем полученные ранее значения производных в точке a .

Пример 2. Выпишем первые члены разложения в ряд функции $Y(x)$, удовлетворяющей уравнению $Y'=2xY$ и начальному условию $Y(0)=1$.

Ясно, что $Y(0)=1$ и $Y'(0)=2*0*1= 0$. Далее, $Y''(x)=2Y+2x*Y'(x)$, откуда $Y''(0)=2$.

$Y'''(x)=2 Y'(x)+2 Y'(x)+2x*Y''(x)= 4Y'(x)+2xY''(x)$, откуда $Y'''(0)=0$.

$Y^{(4)}(x)=4Y''(x)+2xY'''(x)$, откуда $Y^{(4)}(0)=6$.

Получаем приближенное решение $Y(x) \approx 1+x^2+0.5x^4$.

Упражнение 3. Пользуясь формулой Лейбница для нахождения n -ой производной произведения функций, написать разложение искомой в примере 2 функции в ряд Тейлора.

Упражнение 4. Найти точное решение в примере 2 и оценить качество приближения в примере 2 на отрезке $[-0.5, 0.5]$.

Описанные выше методы не часто применяются на практике, поскольку в методе Пикара на каждом шаге приходится вычислять интеграл, что осложняет вычисления и ухудшает точность, а в методе разложения в ряд крайне сложно формализовать на любом из языков процесс нахождения производных высокого порядка, а при малом количестве членов разложения этот метод дает хорошее приближение лишь вблизи от точки a .

Контрольные вопросы:

1. Какие типы приближенных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений Вы знаете? Назовите по одному примеру каждого типа.

2. В чем суть метода Пикара? Объясните происхождение рекуррентной формулы метода.

3. В чем суть метода разложения функции $Y(x)$ в ряд?

Содержание работы

Задание. Ознакомиться со справочным материалом. Разобрать примеры. Ответить на контрольные вопросы.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 10

Тема: «Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений»

Цель: научиться решать обыкновенные дифференциальные уравнения, познакомиться с графическими методами решения дифференциальных уравнений.

Оборудование: справочные пособия.

Справочный материал

Графические методы.

Метод Эйлера.

Суть его состоит в последовательном построении ломаной, начинающейся в точке (X_0, Y_0) , заданной начальным условием и дающей приблизительный вид графика искомой функции $Y(x)$. Для построения первого (а затем и каждого следующего) участка ломаной в этом методе мы вычисляем значение $f(X_0, Y_0)$, проводим прямую из данной точки с полученным угловым коэффициентом. Поскольку $Y'(X_0) = f(X_0, Y_0)$, то эта прямая будет касательной к интегральной кривой в точке (X_0, Y_0) . Поэтому мы и заменяем часть графика функции на отрезок касательной к ней. Далее, из новой полученной точки мы делаем следующий такой же шаг и т.д.

Метод Эйлера хорош тем, что он прост и нагляден, но к сожалению, он очень плох в смысле точности приближения и дает лишь приблизительный вид интегральной кривой.

Говоря о **численных** методах решения обыкновенных дифференциальных уравнений, мы ограничимся еще более частным случаем постановки задачи, в которой требуется лишь определить значение неизвестной функции $Y(x)$ в одной точке b .

Общая схема численных методов.

1. Делим отрезок $[a, b]$ на n -равных частей точками $a = X_0 < X_1 < X_2 < \dots < X_n = b$ или $X_i = a + ih$

2. Последовательно, при $i = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ осуществляем переход от точки (X_i, Y_i) к точке (X_{i+1}, Y_{i+1}) по формуле $Y_{i+1} = Y_i + \Delta Y_i$, где на каждом отрезке величина ΔY_i вычисляется по одному и тому же закону, задающему метод решения уравнений.

Метод Эйлера, который мы рассматривали как графический, легко интерпретировать и как численный метод. Из описания этого метода сразу же видно, что приращение ΔY_i вычисляется как линейное приращение функции. На отрезке длины h формула для приращения функции примет вид $\Delta Y_i = h f(X_i, Y_i)$, откуда и получаем закон перехода в методе Эйлера: $Y_{i+1} = Y_i + hf(X_i, Y_i)$.

Как уже отмечалось, погрешность этого метода очень велика, она достигает величин порядка h , т.е. метод Эйлера -первого порядка точности. Для улучшения точности вычислений применяют многошаговую систему перехода от точки (X_i, Y_i) к следующей.

Методы Рунге-Кутта.

Например, в одном из усовершенствований метода Эйлера, который также называют методом Рунге-Кутта второго порядка, переход осуществляют в два этапа по формулам:

$$Z_i = Y_i + h/2 * f(X_i, Y_i)$$

$$Y_{i+1} = Y_i + h * f(X_i + h/2, Z_i).$$

При этом получается погрешность порядка h^2 .

А самый распространенный на практике метод - метод Рунге-Кутта четвертого порядка, в котором точность имеет порядок величины h^4 , а переход к следующей точке осуществляется с помощью четырех вспомогательных величин:

$$k_1 = h * f(X_i, Y_i)$$

$$k_2 = h * f(X_i + h/2, Y_i + k_1/2)$$

$$k_3 = h * f(X_i + h/2, Y_i + k_2/2)$$

$$k_4 = h * f(X_i + h, Y_i + k_3)$$

После вычисления этих вспомогательных величин переход от точки (X_i, Y_i) к следующей точке осуществляется по формуле $Y_{i+1} = Y_i + 1/6 * (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$.

Упражнение 1. Выяснить геометрический смысл перехода к следующей точке по формулам усовершенствованного метода Эйлера.

Оценка точности в методах Рунге-Кутта второго и четвертого порядков на практике производится с помощью метода двойного счета, сформулированного в предыдущем параграфе.

Упражнение 2. Выписать и объяснить формулы оценки точности в методах Рунге-Кутта второго и четвертого порядков.

Поясним происхождение формул в методах Рунге-Кутта. Для получения закона вычисления значения $Y(x)$ в каждой следующей точке поступают приблизительно так: выписывают разложение неизвестной функции в ряд Тейлора в точке X_i , как мы проделывали это выше, затем берут несколько первых членов этого разложения, и преобразуют полученную формулу Тейлора. После подставления X_i вместо переменной X и получают окончательное правило перехода к следующей точке.

Легко убедиться, что при выписывании разложения в ряд Тейлора только до линейного члена и подстановки значения X мы получим формулу метода Эйлера, т.е. и он является частным случаем общих методов Рунге-Кутта.

Пример 1. Применим формулы разобранных методов для нахождения значения функции $Y(x)$ в точке 1, если эта функция удовлетворяет уравнению $y' = y$ с начальным условием $y(0) = 1$.

При решении методом Эйлера ($n=2$) имеем:

$$Y_1 = Y_0 + hf(X_0, Y_0) = 1 + 0.5f(0, 1) = 1.5,$$

$$Y(b) = Y_2 = Y_1 + hf(X_1, Y_1) = 1.5 + 0.5f(0.5, 1.5) = 2.25.$$

При решении методом Рунге-Кутты 2-го порядка ($n=1$) имеем:

$$Z_0 = Y_0 + h/2 * f(X_0, Y_0) = 1 + 0.5f(0, 1) = 1.5,$$

$$Y(b) = Y_1 = Y_0 + hf(X_0 + h/2, Z_0) = 1 + f(0.5, 1.5) = 2.5.$$

При решении методом Рунге-Кутты 4-го порядка ($n=1$) имеем:

$$k_1 = h * f(X_0, Y_0) = 1 * f(0, 1) = 1$$

$$k_2 = h * f(X_0 + h/2, Y_0 + k_1/2) = 1 * f(0.5, 1.5) = 1.5$$

$$k_3 = h * f(X_0 + h/2, Y_0 + k_2/2) = 1 * f(0.5, 1.75) = 1.75$$

$$k_4 = h * f(X_0 + h, Y_0 + k_3) = 1 * f(1, 2.75) = 2.75$$

$$Y(b) = Y_1 = Y_0 + 1/6 * (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1 + 1/6 * (1 + 3 + 3.5 + 2.75) = 65/24$$

Упражнение 3. Найти точный ответ и сравнить погрешности, полученные при решении тремя различными методами.

Контрольные вопросы:

1. В чем суть метода Эйлера? Поясните графически.
2. Какова общая схема численных методов решения дифференциальных уравнений первого порядка?
3. Каков порядок точности при решении дифференциальных уравнений методами Эйлера, Рунге-Кутты второго и четвертого порядков?
4. Каким образом на практике следят за точностью при решении дифференциальных уравнений методами Рунге-Кутты второго и четвертого порядков? Обоснуйте этот способ.

Содержание работы

Задание. Ознакомиться со справочным материалом. Разобрать примеры. Ответить на контрольные вопросы.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 11

Тема: «Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений»

Цель: научиться решать обыкновенные дифференциальные уравнения.

оборудование: справочные пособия.

Содержание работы

Постановка задачи: По заданному обыкновенному дифференциальному уравнению на фиксированном отрезке и значению искомой функции в левом конце определить значение в правом конце с требуемой точностью.

Предварительная работа.

1. Для своего уравнения найти дома точное решение в заданных точках.

2. Найти методом Пикара третье приближение к решению своего уравнения, подставить заданные точки и найти погрешность.
3. С помощью метода разложения в ряд найти для своей задачи ответы с точностью 0.01.
4. Нарисовать для своей задачи с помощью метода Эйлера 5 звеньев ломаной, дающей представление об интегральной кривой.

Порядок работы:

1. Ответить на вопросы контролирующей программы.
2. Ввести в ЭВМ и отладить программы для вычисления ответа тремя способами численного решения уравнений: методами Рунге-Кутты 1-го, 2-го и 4-го порядков. Отладку производить на уравнении $y' = y$ с начальным условием $y(0) = 1$ и правым концом отрезка, равным 1.
3. Исполнить программу для своего варианта и записать ответы.
4. Дополнить программу вычисления по формуле Рунге-Кутты 4-го порядка так, чтобы по введенному ε она с помощью метода двойного счета выдавала результат с требуемой точностью.
5. Оформить и сдать работу.

ОТЧЕТ должен содержать

1. название и цель работы,
2. домашнее исследование своей задачи методами Пикара, Эйлера и разложения в ряд.
3. тексты программ для всех трех методов,
4. ответы для своего варианта, точное аналитическое решение задачи.

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Постановка задачи и ее качественный анализ.

Одной из самых распространенных задач вычислительной математики является задача статистической обработки данных, и, в частности, составление эмпирических формул для нахождения зависимости одной величины от другой, когда известна таблица их значений, полученных в результате некоторой серии экспериментов.

Общей ЗАДАЧЕЙ здесь является нахождение функции определенного вида, которая наилучшим образом отражает зависимость между величинами. Важнейшее отличие постановки данной задачи от задачи интерполирования состоит в том, что не требуется обязательное совпадение данных, полученных в результате измерений со значениями искомой функции в выделенных точках.

Такая постановка задачи кажется нам более естественной, поскольку:

- результаты измерений могут быть неточными,
- выделенные точки (узлы), как правило, ничем не отличаются от всех остальных и непонятно, почему именно в них мы должны требовать точного совпадения данных.

Для того, чтобы сравнивать, какая же из функций лучше отражает данную зависимость, нам надо договориться, как мы будем измерять степень приближения искомой функцией данной нам зависимости. В качестве меры приближения обычно выбирают одну из следующих:

1. Максимальное по модулю отклонение искомой функции в узлах от данных значений.

2. Сумма модулей отклонений искомой функции в узлах от данных значений.

3. Сумма квадратов отклонений искомой функции в узлах от данных значений.

Первый из перечисленных случаев соответствует приближению искомой функцией в равномерной метрике, второй - в интегральной метрике, а последний - приближению в метрике пространства функций с интегрируемым квадратом. Как видно даже из названия лекции, нас будет больше всего интересовать последний случай, который является самым употребляемым на практике, а, кроме того, он проще остальных в смысле организации вычислений, в том числе и автоматизированной обработки данных.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Дана таблица зависимости функции Y от аргумента X :

X	X_1	X_2	X_n
			...	
Y	Y_1	Y_2	Y_n
			...	

Надо среди функций одного из указанных ниже видов определить такую (найти значения соответствующих параметров), что сумма квадратов разностей значений этой функции в узлах и величин Y_i минимальна.

Обычно ограничиваются функциями одного из следующих видов:

1. $Y=ax+b$
2. $Y=ax^2+bx+c$ (реже полином более высокой степени)
3. $Y=ax^n$
4. $Y=a e^x$
5. $Y=1/(ax+b)$
6. $Y=a \ln(x)+b$
7. $Y=a/x+b$
8. $Y=x/(ax+b)$

Нахождение наилучшей линейной приближающей функции.

Разберем подробно решение задачи, когда решение ищется в виде линейной функции (вид1). Цель - определить коэффициенты a и b таким образом, чтобы величина

$$F(a,b) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$$

приняла наименьшее значение.

Функция $F(a,b)$ представляет из себя многочлен второй степени относительно величин a и b с неотрицательными значениями, поэтому решение всегда существует. Более того, оно единственно, если узлов больше одного и все они разные.

Задача 1. Почему это действительно так? Какую поверхность задает $F(a,b)$?

Известно, что для поиска экстремумов гладких функций нескольких переменных нужно находить критические точки, т.е. те точки, в которых все частные производные функции равны нулю. В нашем случае необходимо решить следующую систему:

$$\begin{cases} F'_b(a,b) = \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i) = 0 \\ F'_a(a,b) = \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i) * x_i = 0 \end{cases}$$

Это система двух линейных уравнений с двумя неизвестными a и b .

Перепишем ее в следующем виде:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + bn = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

Введем стандартные в статистике обозначения для моментов:

$$M_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; M_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i; M_{xx} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2; M_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Тогда наша система переписывается в следующем виде:

$$\begin{cases} aM_{xx} + bM_x = M_{xy} \\ aM_x + b = M_y \end{cases}$$

которая решается стандартным образом.

Далее, осталось отметить, что раз критическая точка одна, а мы предварительно определили, что у нашей задачи решение есть, то задача решена полностью.

Разберем ПРИМЕР 1. нахождения наилучшей линейной функции.

Пусть зависимость задана таблицей

X	-3	-1	1	3	5
Y	3	4	6	8	10

Для ручного вычисления моментов M_x , M_y , M_{xx} , M_{xy} построим таблицу:

	X	Y	X ²	XY
	-3	3	9	-9
	-1	4	1	-4
	1	6	1	6
	3	8	9	24
	5	10	25	50
Сумма	5	31	45	67
Среднее значение (M)	1	6.2	9	13.4

Отсюда получаем систему

$$\begin{aligned} 9a+b &= 13.4 & a &= 0.9 \\ a+b &= 6.2 & \text{или} & \\ & & b &= 5.3 \end{aligned}$$

Итак, наилучшая линейная функция имеет вид $y=0.9x+5.3$

Упражнение 1. Проверьте, что если исходные данные удовлетворяют линейной зависимости $Y_i=a \cdot X_i+b$, то и коэффициенты a и b , полученные при решении указанным методом совпадут с исходными.

Упражнение 2. Аналогично приведенному выше методу сделайте выкладки и получите систему уравнений для поиска коэффициентов a , b , c при подборе эмпирической квадратичной зависимости (функция вида 2).

Сведение поиска функций другого вида к поиску линейной функции.

При поиске функций другого вида (3-8) задача сводится к рассмотренной выше задаче нахождения наилучшей линейной функции. Для этого производится некоторая замена переменных, которая подбирается таким образом, чтобы вновь полученная задача свелась к нахождению линейной зависимости, а после применения описанной конструкции происходит обратная замена.

Рассмотрим на конкретных примерах, как это происходит.

При поиске, скажем, функции $y=1/(ax+b)$ (вид 5) для сведения задачи к линейной мы производим замену $t=1/y$, после которой задача сводится к нахождению наилучшей линейной функции $t=ax+b$. А коэффициенты, найденные при ее решении и будут искомыми в первоначальной задаче. Тем самым, поиск наилучшей функции вида 5 надо осуществлять так:

1. заменяем в исходной таблице переменную Y на t , а все числа, записанные в нижней строке - на обратные
2. для получившейся таблицы находим линейную зависимость
3. получившиеся значения a и b берем без изменения.

Аналогичные действия мы производим при поиске наилучшей приближающей функции вида 6. Но замена, которую необходимо произвести для сведения к линейной задаче, в этом случае имеет вид $u=\ln(x)$. Итак, мы получим такое правило поиска наилучшей функции вида 6:

1. заменяем в исходной таблице переменную X на u , а все числа, записанные в верхней строке - на их логарифмы
2. для получившейся таблицы находим линейную зависимость
3. получившиеся значения a и b берем без изменения.

Упражнение 3. Провести подобные рассуждения и сформулировать способ решения задачи для функций вида 7.

Для того, чтобы найти наилучшую функцию вида 3, нужно прологарифмировать соотношение $y=ax^n$. При этом получится $\ln(Y)=\ln(a)+n \cdot \ln(x)$, откуда и вытекает способ решения:

1. заменяем в исходной таблице переменную X на $u=\ln(X)$, переменную Y на $t=\ln(y)$, а все числа, записанные в таблице - на их логарифмы
2. для получившейся таблицы находим линейную зависимость
3. по получившимся значениям a и b находим нужные нам числа применяя формулы $n=a$, $a=e^b$.

Упражнение 4. Провести подобные рассуждения и сформулировать способ решения задачи для функций вида 4.

Упражнение 5. Провести подобные рассуждения и сформулировать способ решения задачи для функций вида 8.

Контрольные вопросы

1. Какова общая постановка задачи нахождения эмпирических формул?
2. Каким образом можно оценивать качество приближения?
3. Каким образом графически можно интерпретировать постановку задачи нахождения эмпирических формул?
4. В чем сходство и различие постановки задачи метода наименьших квадратов и задачи интерполяции?
5. Какие виды приближающих функций обычно применяются?
6. В чем суть метода приближения таблично заданной функции по методу наименьших квадратов линейной функцией?
7. Как сводится задача построения различных эмпирических формул к задаче нахождения линейной функции?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 12

Тема: «Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений»

Цель: научиться решать обыкновенные дифференциальные уравнения.

Оборудование: справочные пособия.

Содержание работы

Задание. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

1) $y' = x^2 \sqrt{y}$

2) $y' = (x - y)^2 + 1$

3) $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 13

Тема: «Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений»

Цель: научиться решать обыкновенные дифференциальные уравнения.

Оборудование: справочные пособия.

Содержание работы

Задание. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

1) $(2x - y + 4)y' + x - 2y + 5 = 0$

2) $(1 - xy)xy' + y(1 + xy) = 0$

3) $xy' + 3y = x^2$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 14

Тема: «Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений»

Цель: научиться решать обыкновенные дифференциальные уравнения.

Оборудование: справочные пособия.

Содержание работы

Задание. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

1) $(x^2 + y^2 + 2y - 2x)y' = 2(1 - x)$

2) $xy' + y = y^2x^5$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 15

Тема: «Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений»

Цель: научиться решать обыкновенные дифференциальные уравнения.

Оборудование: справочные пособия.

Содержание работы

Задание. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

1) $(xy + x_2^2y^3)y' = 1$

2) $(\frac{1}{x} - \frac{y}{(x-y)^2})dx + (\frac{x}{(x-y)^2} - \frac{1}{y})dy = 0$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 16

Тема: «Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений»

Цель: научиться решать обыкновенные дифференциальные уравнения.

Оборудование: справочные пособия.

Содержание работы

Задание. Найти решение дифференциальных уравнений методом последовательного интегрирования:

1) $(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0$

2) $2xdy + ydx + xy^2(xdy + ydx) = 0$

3) $xy' = \sqrt{1 + (y')^2}$

4) $y' = e^{y^F} \sin y'$

Информационное обеспечение обучения

Печатные и электронные издания

Основные учебные издания

1. Гателюк О.В. Численные методы: учебное пособие для среднего профессионального образования / О.В. Гателюк, Ш.К. Исмаилов, Н.В. Манюкова. – Москва: Издательство Юрайт, 2023. – 140 с. – (Профессиональное образование). – Текст: непосредственный.

Дополнительные учебные издания:

2. Колдаев В.Д. Численные методы и программирование: учебное пособие / В.Д. Колдаев; под ред. Л.Г. Гагариной. – М.: ИД ФОРУМ: НИЦ Инфра-М, 2021. – 336 с.

Электронно-библиотечная система:

3. ЭБС «Znanium»
4. ЭБС «PROFобразование»
5. ЭБС «Book.ru»