

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.»

Филиал федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
«Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.»
в г. Петровске



МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по дисциплине
ЕН.03 «Теория вероятностей и математическая статистика»

по специальности
09.02.07 «Информационные системы и программирование»

Методические указания рассмотрены
на заседании предметной (цикловой) комиссии
общеобразовательных, социально-гуманитарных
и естественнонаучных дисциплин
«16» июня 2025 года, протокол № 13

Председатель ПЦК Мед /Медведева О.В./

Петровск 2025

Пояснительная записка

Методические указания по выполнению практических работ подготовлены на основе рабочей программы учебной дисциплины ЕН.03 «Теория вероятностей и математическая статистика», разработанной на основе ФГОС СПО по специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование» и соответствующих общих (ОК) компетенций:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 04. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 09. Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности.

При выполнении практических работ студент должен **уметь**:

- применять стандартные методы и модели к решению вероятностных и статистических задач;
- использовать расчетные формулы, таблицы, графики при решении статистических задач;
- применять современные пакеты прикладных программ многомерного статистического анализа.

При выполнении практических работ студент должен **знать**:

- элементы комбинаторики;
- понятие случайного события, классическое определение вероятности, вычисление вероятностей событий с использованием элементов комбинаторики, геометрическую вероятность;
- алгебру событий, теоремы умножения и сложения вероятностей, формулу полной вероятности;
- схему и формулу Бернулли, приближенные формулы в схеме Бернулли. Формулу (теорему) Байеса;
- понятия случайной величины, дискретной случайной величины, ее распределение и характеристики, непрерывной случайной величины, ее распределение и характеристики;
- законы распределения непрерывных случайных величин;
- центральную предельную теорему, выборочный метод математической статистики, характеристики выборки;

– понятие вероятности и частоты.

Содержание практических занятий определено рабочей программой и тематическим планированием, соответствует теоретическому материалу изучаемых разделов учебной дисциплины.

Объём практических занятий по дисциплине определяется учебным планом по данной специальности.

Продолжительность практического занятия - 2 академических часа. Перед проведением практического занятия преподавателем организуется инструктаж, а по ее окончании – обсуждение итогов.

Комплект методических указаний по выполнению практических работ дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» содержит 7 практических занятий.

Перечень практических работ по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика»

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1. Тема: «Элементы комбинаторики».

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2. Тема: «Основы теории вероятностей».

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3. Тема: «Основы теории вероятностей».

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4. Тема: «Дискретные случайные величины (ДСВ)».

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5. Тема: «Дискретные случайные величины (ДСВ)».

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6. Тема: «Непрерывные случайные величины (далее - НСВ)».

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 7. Тема: «Математическая статистика».

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1

Тема: «Элементы комбинаторики»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться решать задачи на размещения, перестановки и сочетания.

ОБОРУДОВАНИЕ: справочные пособия.

Справочный материал

Комбинаторика – это раздел математики, в котором изучается, сколько различных комбинаций, подчинённых тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

Основными понятиями комбинаторики являются размещения, перестановки и сочетания.

1. **Размещением из n элементов по m** называется любое упорядоченное подмножество, состоящее из m различных элементов данного множества.

а) Число размещений (без повторений) из n элементов по m элементам равно $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

Пример 1. Сколькими способами можно выбрать председателя, заместителя и профорга из 9 человек?

Решение. $n = 9$, $m = 3$.

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = \frac{9 * 8 * 7 * 6!}{6!} = 504$$

б) Число размещений (с повторением) из n элементов по m равно $\bar{A}_n^m = n^m$.

Пример 2. Сколькими способами можно рассадить 7 человек по 9 вагонам?

Решение. Так как в один вагон могут сесть несколько человек, и рассадка зависит от того кто в каком вагоне находится, то используем формулу размещения с повторениями: $\bar{A}_9^7 = 9^7$

2. **Перестановкой из n элементов** называется размещение из n элементов по n элементам.

а) Число перестановок n различных элементов (без повторений) равно $P_n = n!$

Пример 3. В соревнованиях по фигурному катанию принимали участие россияне, итальянцы, украинцы, немцы, китайцы и французы. Сколькими способами могут распределиться места по окончании соревнований?

Решение. Используем формулу перестановки без повторения для $n = 6$:

$$P_6 = 6! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 = 720$$

б) Число перестановок (с повторениями) равно $\bar{P}_i = \frac{k!}{i_1! i_2! \dots i_n!}$

Пример 4. Сколько перестановок можно получить из букв слова КОЛОКОЛА?

Решение. Так как буквы в слове повторяются, то используем формулу перестановок с повторениями.

$i_1 = 2$ (количество букв «к»)

$i_2 = 3$ (количество букв «о»)

$i_3 = 2$ (количество букв «л»)

$i_4 = 1$ (количество букв «а»)

$$k = i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 2 + 3 + 2 + 1 = 8$$

$$\bar{P} = \frac{8!}{2! 3! 2! 1!} = \frac{8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}{2 * 1 * 3 * 2 * 1 * 2 * 1} = 8 * 7 * 5 * 3 * 2 = 1680$$

3. **Сочетанием из n элементов по m** называется любое подмножество, состоящее из m различных элементов данного множества

а) Число сочетаний из n элементов по m (без повторений) равно $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Пример 5. Из учащихся 25 человек нужно выбрать троих дежурных. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. $n = 25$, $m = 3$.

$$C_{25}^3 = \frac{25!}{3!(25-3)!} = \frac{25!}{3!22!} = \frac{25 * 24 * 23 * 22!}{3 * 2 * 1 * 22!} = 25 * 4 * 23 = 2300$$

б) Число сочетаний с повторениями равно $\bar{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$

Пример 6. Сколькими способами можно купить 6 пирожных, если имеются 2 сорта пирожных по 5 в каждом?

Решение. Поскольку при покупке пирожных порядок их расположения не важен, то используем для подсчета формулу сочетаний с повторениями, при этом $n = 5 + 5 = 10$, $m = 6$.

$$\bar{C}_{10}^6 = C_{10+6-1}^6 = C_{15}^6 = \frac{15!}{6!(15-6)!} = \frac{15!}{6!9!} = \frac{15 * 14 * 13 * 12 * 11 * 10 * 9!}{6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 * 9!} = 5005$$

Содержание работы

1. В классе учатся 16 мальчиков и 10 девочек. Сколькими способами можно назначить одного дежурного?
2. Необходимо выбрать в подарок 4 из 10 имеющихся различных книг. Сколькими способами можно это сделать?
3. В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?
4. В некоторой газете 12 страниц. Необходимо на страницах этой газеты поместить четыре фотографии. Сколькими способами можно это сделать, если ни одна страница газеты не должна содержать более одной фотографии?
5. Сколько разных буквосочетаний можно сделать из букв слова «Миссисипи»?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2

Тема: «Основы теории вероятностей»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться вычислять вероятность события.

ОБОРУДОВАНИЕ: справочные пособия.

Справочный материал

Согласно классическому определению вероятности **вероятностью события A** называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу. Вероятность события A определяется формулой:

$$P(A) = m/n,$$

где m – число элементарных исходов, благоприятствующих A ;

n – число всех возможных элементарных исходов испытания.

Пример 1. В ящике имеется 10 красных и 8 синих шаров. Наудачу вынимают один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется синим.

Решение.

Дано:

$$m = 7$$

$$n = 10 + 8 = 18$$

$P(A)$ - ?

Решение

A – извлеченный шар синего цвета

$$P(A) = m/n = 8/18 = 0,44$$

Ответ: $P(A) = 0,44$.

Пример 2. Бросаются два игральных кубика. Какова вероятность, что сумма выпавших очков равна 5.

Решение.

Дано:

$k = 6$ –

количество

граней

кубика.

Решение

A – сумма выпавших очков на двух кубиках равна 5.

$$P(A) = m/n$$

Событию A благоприятствуют следующие исходы: (1,4), (4,1), (2,3), (3,2) →

$$m = 4$$

Каждый из кубиков можно бросить шестью способами. Тогда два кубика по правилу умножения могут упасть $6 \cdot 6 = 36$ способами →

$$n = 36$$

$$P(A) = 4/36 = 1/9 = 0,11 = 11\%$$

$P(A)$ - ?

Ответ: $P(A) = 11\%$

Содержание работы

1. Из урны, в которой находится 3 белых, 4 черных и 5 красных шаров наудачу вынимают один. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется
а) белым, б) черным, в) красным, г) желтым?

2. В ящике находится два белых и три черных шара. Наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что: а) вынут белый шар, б) если шар черный, в) шар зеленый, г) белый или черный шар.
3. В ящике находится два белых, три черных и четыре красных шара. Наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что этот шар: а) белый, б) черный, в) красный, г) не белый, д) не черный, е) не красный.
4. На одинаковых карточках написаны числа от 1 до 10. На каждой карточке одно число. Карточки положили на стол, перевернули числами вниз и перемешали. Какова вероятность того, что на вынутой карточке окажется число: а) 7, б) четное число, в) число, кратное 3, г) число, кратное 4, д) делящееся на 5, е) простое число.
5. В лотерее 1000 билетов, среди которых 20 выигрышных. Приобретается один билет. Какова вероятность того, что этот билет:
а) выигрышный, б) невыигрышный.
6. Студент при подготовке к экзамену не успел выучить один из тех 25 билетов, которые будут предложены на экзамене. Какова вероятность того, что студенту достанется выученный им билет?
7. В коробке 5 синих, 4 красных и 3 зеленых карандаша. Наудачу вынимают 3 карандаша. Какова вероятность того, что:
а) все они одного цвета, б) все они разных цветов, в) среди них 2 синих и 1 зеленый карандаш?
8. В урне 5 белых и 3 черных шара. Из урны вынимают сразу два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.
9. На пяти карточках написаны цифры: 1, 2, 3, 4, 5. Две из них, одна за другой, вынимаются. Найти вероятность того, что число на второй карточке будет больше, чем на первой.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3

Тема: «Основы теории вероятностей»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться вычислять вероятности для сложных событий.

ОБОРУДОВАНИЕ: справочные пособия.

Справочный материал

Сумма и произведение случайных событий

Задача 1. В некоторой местности наблюдения показали:

1. Если июньское утро ясное, то вероятность дождя в этот день составляет 0,1.
2. Если июньское утро пасмурное, то вероятность дождя в течение дня равна 0,4.
3. Вероятность того, что утро в июне будет пасмурным, равна 0,3.

Найдите вероятность того, что в случайно взятый июньский день дождя не будет.

Решение.

Рассмотрим два несовместных события:

A : июньский день пасмурный, но дождь не пошел;

B : июньский день ясный и дождь не пошел.

По условию задачи нужно найти вероятность события $C = A + B$ того, что дождь не пойдет ни в пасмурный, ни в ясный день. Найдем вероятности событий A и B . Событие A включает в себя два независимых события: день пасмурный и дождь не пошел. Вероятность того, что день пасмурный дано по условию задачи и равна 0,3. Вероятность того, что дождь не пойдет в пасмурный день, равна обратной вероятности того, что дождь пойдет, т.е. $1 - 0,4 = 0,6$. Таким образом, вероятность события A , равна

$$P(A) = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18.$$

Аналогичны рассуждения и для события B . Вероятность того, что день будет ясный, равна 0,7. Вероятность того, что дождь не пойдет в ясный день, равна $1 - 0,1 = 0,9$. Окончательно, для события B имеем:

$$P(B) = 0,7 \cdot 0,9 = 0,63.$$

Искомая вероятность события C , равна

$$P(C) = P(A) + P(B) = 0,18 + 0,63 = 0,81.$$

Ответ: 0,81.

Задача 2. Игральную кость бросают 2 раза. Найдите вероятность того, что оба раза выпало число, большее 3.

Решение.

При бросании игральной кости могут выпадать числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6 с равной вероятностью $1/6$. Нас интересует выпадение одного из чисел 4, 5 или 6 при первом бросании игральной кости и выпадение таких же чисел при втором бросании. Вероятность появления одного из чисел 4, 5 или 6 равна сумме вероятности этих событий, т.е.

$$P_1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

при втором бросании

$$P_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Тогда вероятность того, что и при первом бросании, и при втором будут выпадать числа 4, 5 и 6, равна произведению вероятностей этих независимых событий:

$$P = P_1 P_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Ответ: 0,25.

Задача 3. Игральную кость (кубик) бросают 2 раза. Найдите вероятность того, что один раз выпало число, большее 3, а другой раз – меньше 3.

Решение.

Для решения данной задачи выделим два независимых события:

A – при бросании выпало число или 4, или 5, или 6;

B – при бросании выпало число или 1, или 2.

Решением задачи будет нахождение вероятности произведения этих двух событий:

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Найдем вероятность события A . Так как вероятность выпадения какого-либо числа у игрального кубика равна $1/6$, то вероятность появления одного из 3 чисел 4, 5 или 6, равна

$$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Здесь учтено, что события, связанные с выпадением того или иного числа несовместны, т.е. не происходят одновременно.

Вероятность события B выпадения какого-либо числа 1 или 2, вычисляется аналогично

$$P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

И решение задачи равно

$$P(AB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Сложение и умножение вероятностей

Задача 1. Случайно смешаны кусты рассады двух сортов томатов: 9 кустов рассады сорта Белый налив и 7 - сорта Верлиока. Найти вероятность того, что первые три, посаженные друг за другом куста томатов, являются рассадой сорта Белый налив.

Решение. Испытание состоит в посадке одного куста рассады томата.

Рассмотрим события:

A_1 - куст, посаженный первым, - рассада томата сорта Белый налив;

A_2 - куст, посаженный вторым, - рассада томата сорта Белый налив;

A_3 - куст, посаженный третьим, - рассада томата сорта Белый налив;

A - все три посаженные друг за другом куста являются рассадой томата сорта Белый налив.

Событие A состоит в том, что и первый, и второй, и третий кусты - рассада томата сорта Белый налив. Это означает, что событие A является произведением событий A_1, A_2, A_3 : $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$.

Найдем вероятность события A по теореме умножения вероятностей.

События A_1, A_2, A_3 - зависимые, так как вероятность каждого последующего события (начиная со второго) изменяется в зависимости от того, произойдет или не произойдет предыдущее событие. По формуле (1) получим, что вероятность события A_1 равна $P(A_1) = 9/16$. Условная вероятность события A_2 , вычисленная при условии, что событие A_1 произошло, равна $P_{A_1}(A_2) = 8/15$.

Условная вероятность события A_3 , вычисленная при условии, что произошли предыдущие два события, т. е. произошли и событие A_1 , и событие A_2 равна $P_{A_1 A_2}(A_3) = 7/14$. В соответствии с формулой (14) при $n=3$ получим:

$$P(C) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 A_2}(A_3) = 9/16 \cdot 8/15 \cdot 7/14 = 0,15.$$

Задача 2. В урне 4 белых, 6 черных и 5 красных шаров. Из нее извлекают наугад один за другим два шара. Найти вероятность того, что оба шара одного цвета.

Решение. Рассмотрим события:

A_1 - первым извлечен белый шар;

B_1 - вторым извлечен белый шар;

A_2 - первым извлечен черный шар;

B_2 - вторым извлечен черный шар;

A_3 - первым извлечен красный шар;

B_3 - вторым извлечен красный шар;

C - извлечены два шара одного цвета.

Событие C представляет собой сумму следующих несовместных событий:

C_1 - извлечены два белых шара;

C_2 — извлечены два черных шара;

C_3 - извлечены два красных шара.

Таким образом, $C = C_1 + C_2 + C_3$.

Событие C_1 заключается в том, что и первый, и второй, извлеченные из урны шара, являются белыми. Это означает, что событие C_1 представляет собой произведение событий A_1 и B_1 : $C_1 = A_1 \cdot B_1$. Аналогично получим, что $C_2 = A_2 \cdot B_2$ и $C_3 = A_3 \cdot B_3$.

Вероятности событий C_1 , C_2 и C_3 найдем по теореме умножения вероятностей. Событие B_1 является зависимым от события A_1 , так как его вероятность изменяется при наступлении события A_1 . Используя классическое определение

вероятности, получим, что вероятность события A_1 равна $P(A_1)=415$. Условная вероятность события B_1 , вычисленная при условии, что событие A_1 произошло, равна $P_{A_1}(B_1)=314$. Согласно формуле (12) получим:

$$P(C_1)=P(A_1 \cdot B_1)=P(A_1) \cdot P_{A_1}(B_1)=415 \cdot 314=235.$$

Рассуждая аналогично, найдем

$$P(C_2)=P(A_2 \cdot B_2)=P(A_2) \cdot P_{A_2}(B_2)=615 \cdot 514=17.$$

$$P(C_3)=P(A_3 \cdot B_3)=P(A_3) \cdot P_{A_3}(B_3)=515 \cdot 414=221.$$

Вычислив $P(C_1)$, $P(C_2)$ и $P(C_3)$, найдем искомую вероятность $P(C)$ по теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(C)=P(C_1)+P(C_2)+P(C_3)=235+17+221=31105 \approx 0,2952.$$

Формула полной вероятности позволяет определить вероятность события A , которое может наступить при условии появления одного из несовместных событий B_1, B_2, \dots, B_n , образующих полную группу.

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$$

Чтобы оценить вероятности гипотез B_1, B_2, \dots, B_n , после того как стал известен результат испытания, используется формула Байеса.

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)}$$

Пример 1. В первом ящике содержится 20 деталей, из них 15 стандартных; во втором 30 деталей, из них 24 стандартных; в третьем – 10 деталей, из них 6 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящика – стандартная.

Решение

1. Обозначим через A – событие «взятая наудачу деталь стандартна»

Событие B_1 – деталь извлечена из первого ящика;

Событие B_2 – деталь извлечена из второго ящика

Событие B_3 – деталь извлечена из третьего ящика

2. Определим вероятности событий B_1, B_2 и B_3 .

Вероятность того, что деталь взята из первого ящика $P(B_1) = 1/3$

Вероятность того, что деталь взята из второго ящика $P(B_2) = 1/3$

Вероятность того, что деталь взята из третьего ящика $P(B_3) = 1/3$

3. Определим условные вероятности.

Условная вероятность того, что из 1 ящика была извлечена стандартная деталь:

$$P_{B_1}(A) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

Условная вероятность того, что из 2 ящика была извлечена стандартная деталь:

$$P_{B_2}(A) = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$$

Условная вероятность того, что из 3 ящика была извлечена стандартная деталь:

$$P_{B_3}(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

4. По формуле полной вероятности определим вероятность события A :

$$P(A) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{4}{15} + \frac{1}{5} = \frac{43}{60} = 0,72. \text{ Ответ: } P(A) = 0,72$$

Пример 2. На заводе, изготавлиющем болты, первая машина производит 25%, вторая - 35%, третья - 40% всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5, 4 и 2%. Случайно выбранный из продукции болт оказался дефектным. Какова вероятность того, что он был произведен первой машиной?

Решение

1. Обозначим через A – событие «выбран болт с дефектом»

B_1 – болт произведен 1 машиной; B_2 – болт произведен 2 машиной; B_3 – болт произведен 3 машиной

2. По условию задачи имеем:

$$P(B_1) = 0,25$$

$$P_{B_1}(A) = 0,05$$

$$P(B_2) = 0,35$$

$$P_{B_2}(A) = 0,04$$

$$P(B_3) = 0,4$$

$$P_{B_3}(A) = 0,02$$

По формуле Байеса определим вероятность гипотезы B , при условии что выбран болт с дефектом:

$$P_A(B_1) = \frac{0,25 \cdot 0,05}{0,25 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,04 + 0,4 \cdot 0,02} = \frac{0,0125}{0,0345} = 0,36 = 36\%$$

Ответ: $P_A(B_1) = 36\%$

Содержание работы

1. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 35 % этих стекол, вторая — 65%. Первая фабрика выпускает 4% бракованных стекол, а вторая — 2%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

2. Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,62. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,2. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выигрывает оба раза.

3. На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,3. Вероятность того, что это вопрос на тему «Параллелограмм», равна 0,25. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

4. Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,9. Найдите вероятность того, что биатлонист первые четыре раза попал в мишени, а последний промахнулся. Результат округлите до сотых.

5. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,07 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4

Тема: «Дискретные случайные величины (ДСВ)»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться решать задачи на распределение ДСВ; находить функции ДСВ.

ОБОРУДОВАНИЕ: справочные пособия.

Справочный материал

Дискретной (прерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Для задания дискретной случайной величины необходимо перечислить все возможные ее значения и указать их вероятности.

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями. Его можно задать таблично, аналитически в виде функции распределения и графически с помощью многоугольника распределения.

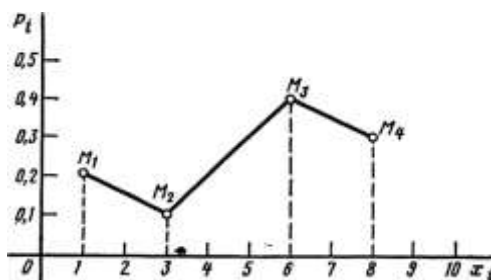
Пример 1. Возможные значения случайной величины таковы: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 8$. Известны вероятности первых двух возможных значений: $p_1 = 0,4$; $p_2 = 0,15$. Найти вероятность x_3 .

Решение. Так как в одном испытании случайная величина принимает одно и только одно возможное значение, то события x_1 , x_2 , x_3 образуют полную группу; следовательно сумма вероятностей этих событий равна единице: $p_1 + p_2 + p_3 = 1$; $p_3 = 1 - p_1 - p_2 = 1 - 0,4 - 0,15 = 0,45$.

Пример 2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения. Построить многоугольник распределения.

x	1	3	6	8
p	0,2	0,1	0,4	0,3

Решение. Для построения многоугольника распределения в прямоугольной системе координат построим точки (x_i, p_i) , а затем соединим их отрезками прямых.



Функция распределения случайной величины X – это функция $F(x)$, которая при каждом значении своего аргумента x численно равна вероятности того, что случайная величина X кажется меньше, чем значение аргумента x : $F(x) = P\{X < x\}$

Содержание работы

1. Дан ряд распределения случайной величины

x_i	1	3	4	6
p_i	0,3	0,2	0,1	0,4

X :

Найти

функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

2. Функция распределения случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1, \\ 0,3 & \text{при } 1 < x \leq 3, \\ 0,6 & \text{при } 3 < x \leq 5, \\ 0,8 & \text{при } 5 < x \leq 9, \\ 1 & \text{при } x > 9. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что X примет значение:

а) не меньшее 3 и меньшее 5; б) не меньшее 5 и меньшее 9.

3. Функция распределения случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ x/4 & \text{при } 0 < x \leq 5, \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что случайная величина примет значение:

а) в интервале $[1;6)$; б) в интервале $[3;6)$.

4. Случайная величина X , все возможные значения которой принадлежат интервалу $(0, 2)$, задана в этом интервале дифференциальной функцией распределения $f(x) = \frac{1}{3}x$. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины X .

5. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 3, \\ (x-3)^2 & \text{при } 3 < x \leq 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Найти:

- а) плотность распределения вероятностей $f(x)$;
б) графики функций $F(x)$ и $f(x)$;

в) по известной функции $F(x)$ и по найденной функции $f(x)$ вероятность того, что в результате испытания X примет значение, не меньшее 3,2 и меньшее 3,5.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5

Тема: «Дискретные случайные величины (ДСВ)»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться вычислять характеристики ДСВ: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

ОБОРУДОВАНИЕ: справочные пособия.

Справочный материал

1. Математическое ожидание случайной величины X определяется по формуле:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

Пример 1. Найти математическое ожидание случайной величины X , зная ее закон распределения.

X	3	5	2
p	0,1	0,6	0,3

Решение

$$M(X) = 3 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,3 = 3,9$$

2. Дисперсия случайной величины определяется по формуле:

$$D(X) = M(x - M(X))^2 \text{ или } D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

Пример 2. Найти дисперсию случайной величины X , которая задана следующим законом распределения:

X	2	3	5
p	0,1	0,6	0,3

Решение. Найдем математическое ожидание $M(X)$: M

$$(X) = 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,6 + 5 \cdot 0,3 = 3,5$$

$$\text{Математическое ожидание } M(X^2) = 4 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,6 + 25 \cdot 0,3 = 13,3$$

$$\text{Искомая дисперсия: } D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 13,3 - (3,5)^2 = 1,05$$

3. Среднее квадратичное отклонение случайной величины определяется по формуле: $\delta(X) = \sqrt{D(X)}$

Содержание работы

1. Найдите математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратичное отклонение $\delta(X)$.

X	-1	-2	-5	-9	-12	-15	-20	-25
P	0,2	0,3	0,1	0,06	0,1	0,006	0,2	0,034

2. Найдите математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратичное отклонение $\delta(X)$.

X	-2	-4	-7	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,1	0,1	0,2	0,06	0,2	0,006	0,3	0,034

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6

Тема: «Непрерывные случайные величины (далее - НСВ)»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться решать задачи на НСВ.

ОБОРУДОВАНИЕ: справочные пособия.

Справочный материал

Непрерывной случайной величиной называют случайную величину, которая может принимать любые значения на числовом интервале.

Примеры непрерывных случайных величин: возраст студентов, длина ступни ноги человека, масса детали и т. д. Это положение относится ко всем случайным величинам, измеряемым на непрерывной шкале, таким как меры веса, длины, времени, температуры, расстояния. Измерение может быть проведено с точностью до какого-нибудь десятичного знака, но случайная величина – теоретически непрерывная величина. В экономическом анализе находят широкое применение относительные величины, различные индексы экономического состояния, которые также вычисляются с определенной точностью, скажем, до двух знаков после запятой, хотя теоретически их значения – непрерывные случайные величины.

У непрерывной случайной величины возможные значения заполняют некоторый интервал (или сегмент) с конечными или бесконечными границами.

Непрерывной случайной величиной называется такая величина, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Очевидно, что число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Например: дальность полёта артиллерийского снаряда; расход электроэнергии на предприятии за месяц.

Равномерно распределённая НСВ

Непрерывная случайная величина имеет *равномерное* распределение на отрезке $[a, b]$, если на этом отрезке плотность распределения случайной величины постоянна, а вне его равна нулю.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ C, & a \leq x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

Постоянная величина C может быть определена из условия равенства единице площади, ограниченной кривой распределения. Построим график равномерного распределения непрерывной случайной величины (см. рисунок).

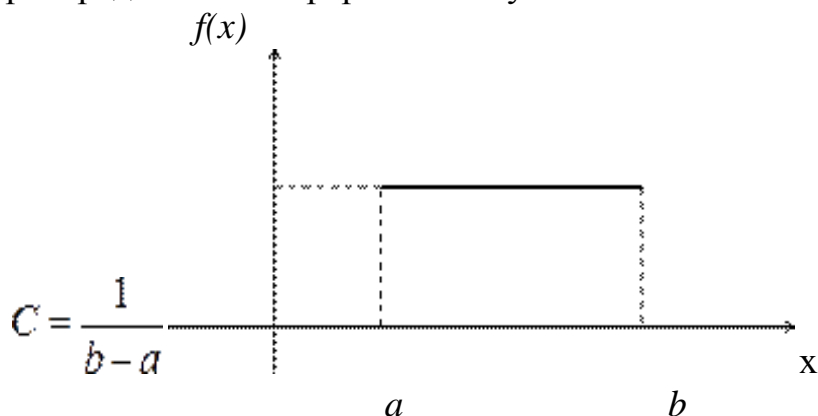


График равномерного распределения

Для того чтобы случайная величина подчинялась закону равномерного распределения необходимо, чтобы ее значения лежали внутри некоторого определенного интервала, и внутри этого интервала значения этой случайной величины были бы равновероятны.

Закон распределения непрерывной случайной величины можно задать в виде **интегральной функции распределения**, являющейся наиболее общей формой задания закона распределения случайной величины, а также в виде **дифференциальной функции** (плотности распределения вероятностей), которая используется для описания распределения вероятностей только непрерывной случайной величины.

Функция распределения (или интегральная функция) $F(x)$ – универсальная форма задания закона распределения случайной величины. Для непрерывной случайной величины функция распределения также определяет вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее фиксированного действительного числа x , т. е.

$$F(x) = P(X < x).$$

При изменении x меняются вероятности $P(X < x) = F(x)$. Поэтому $F(x)$ и рассматривают как функцию переменной величины. Принято считать, что случайная величина X известна, если известна ее функция распределения $F(x)$. Теперь можно дать более точное определение непрерывной случайной величины: **случайную величину называют непрерывной, если ее функция распределения есть непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция с непрерывной производной.**

1. Функция распределения есть неотрицательная функция, заключенная между 0 и 1, т.е. $0 \leq F(x) \leq 1$.

2. Функция распределения есть неубывающая функция, т. е. $F(x_2) \geq F(x_1)$, если $x_2 > x_1$. Тогда $P(x_1 \leq X < x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1) = F(x_2) - F(x_1)$.

Так как любая вероятность есть число неотрицательное, то $P(x_1 \leq X < x_2) \geq 0$, а следовательно, $F(x_2) - F(x_1) \geq 0$ и $F(x_2) \geq F(x_1)$.

Следствие 1. Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (α, β) , равна приращению функции распределения на этом интервале, т. е.

$$P(\alpha \leq X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Следствие 2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю.

$$P(X = x_1) = 0.$$

Согласно сказанному, равенство нулю вероятности $P(X = x_1)$ не всегда означает, что событие $X = x_1$ невозможно. Говоря о вероятности события $X = x_1$, априорно пытаются угадать, какое значение примет случайная величина в опыте.

Если x_1 лежит в области возможных значений непрерывной случайной величины X , то с некоторой уверенностью можно предсказать область, в которую случайная величина может попасть. В то же время невозможно хотя бы с малейшей степенью уверенности угадать, какое конкретное значение из бесконечного числа возможных примет непрерывная случайная величина.

Например, если метеослужба объявляет, что температура воздуха в полдень составила 5°C , то это не означает, что температура будет точно равна этому значению. Вероятность такого события равна нулю.

3. Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (α, β) , то

$$F(x) = 0 \text{ при } x \leq \alpha; F(x) = 1 \text{ при } x > \beta.$$

В самом деле, $F(x) = 0$ для всех значений $x \leq \alpha$ и $F(x) = 1$ при $x > \beta$, поскольку события $X < x$ для любого значения $x \leq \alpha$, являются в этом случае невозможными, а для любого значения $x > \beta$ – достоверными.

Следствие. Если возможные значения непрерывной случайной величины расположены на всей оси OX , то справедливы следующие предельные соотношения:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1,$$

или $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = 1$. Это следствие справедливо и для дискретных случайных величин

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называется функция $W(x)$, равная первой производной от функции распределения $F(x)$,

$$W(x) = F'(x),$$

где $W(x)$ – дифференциальная функция распределения. Дифференциальная функция применяется только для описания распределения вероятностей непрерывных случайных величин.

Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал.

Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу (α, β) , равна определенному интегралу от дифференциальной функции, взятому в пределах от α до β ,

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} W(x) dx.$$

Используя соотношения (5.2) и (5.1), получим $P(\alpha \leq X < \beta) = P(\alpha < X < \beta)$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} W(x) dx.$$

Геометрически этот результат равен площади криволинейной трапеции, ограниченной осью OX , кривой распределения $W(x)$ и прямыми $x = \alpha$, $x = \beta$. Зная плотность распределения $W(x)$, можно найти функцию распределения $F(x)$ по формуле

$$F(x) = \int_{-\infty}^x W(x) dx.$$

В самом деле, так как неравенство $X < x$ можно записать в виде двойного

неравенства $-\infty < X < x$, то $F(x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^x W(x) dx$ (рис. 1).

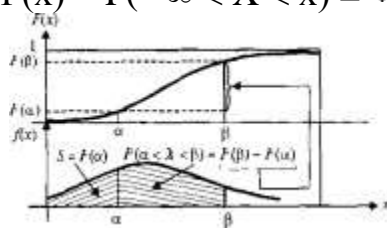


Рис. 1. Связь функции распределения с плотностью распределения вероятностей

Таким образом, для полной характеристики непрерывной случайной величины достаточно задать функцию распределения или плотность ее вероятности.

Математическое ожидание случайной величины

Математическое ожидание характеризует среднее ожидаемое значение случайной величины, т.е. приближенно равно ее среднему значению (вероятностный смысл математического ожидания). Иногда знания этой характеристики достаточно для решения задачи. Например, при оценке покупательной способности населения вполне может хватить знания среднего дохода, при анализе выгодности двух видов деятельности можно ограничиться сравнением их средних прибыльностей. Знание того, что выпускники данного университета зарабатывают в среднем больше выпускников другого, может послужить основанием для принятия решения о поступлении в данный ВУЗ и т.п.

Математическое ожидание **дискретной** случайной величины определяется соотношением:

$$M(X) = M_x = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \text{ где } \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Математическое ожидание **непрерывной** случайной величины равно

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

где $f(x)$ – плотность вероятности.

Свойства математического ожидания

Прежде чем формулировать свойства математического ожидания необходимо пояснить смысл арифметических операций $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$ и т.п., где x и y – дискретные случайные величины.

Например, под суммой $x + y$ понимается случайная величина z , значениями которой являются все допустимые суммы $z_j = x_i + y_j$, где x_i и y_j – все возможные значения соответственно случайных величин x и y .

Свойства математического ожидания:

1. Математическое ожидание постоянной величины c равно этой величине.

$$M(c) = c \cdot 1 = c.$$

2. Математическое ожидание суммы (разности) двух или нескольких случайных величин x и y равно сумме (разности) их математических ожиданий:

$$M(x \pm y) = M(x) \pm M(y).$$

Следствие. Если c – постоянная величина, то

$$M(x + c) = M(x) + c$$

3. Математическое ожидание произведения двух **независимых** случайных величин x и y равно произведению их математических ожиданий:

$$M(x \cdot y) = M(x) \cdot M(y).$$

Следствие. Математическое ожидание произведения нескольких **взаимно независимых** случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин.

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, т.е. $M(cx) = c \cdot M(x)$.

Дисперсия случайной величины и ее свойства.

На практике часто требуется оценить рассеяние случайной величины вокруг ее среднего значения. Например, акции двух компаний могут приносить в среднем одинаковые дивиденды, однако вложение денег в одну из них может быть гораздо более рискованной операцией, чем в другую. Поэтому возникает необходимость в числовой характеристике, оценивающей разброс возможных значений случайной величины относительно ее среднего значения (математического ожидания). Такой характеристикой является **дисперсия**.

Дисперсией (рассеянием) случайной величины x называют математическое ожидание квадрата отклонения этой величины от ее математического ожидания.

$$D(x) = M((x - M(x))^2).$$

Легко показать, что вышеприведенное выражение может быть записано в виде

$$D(x) = M(x^2) - (M(x))^2$$

Действительно, используя основные теоремы о математическом ожидании, получим

$$\begin{aligned} D(x) &= M((x - M(x))^2) = M(x^2 - 2xM(x) + M(x)^2) = \\ &= M(x^2) - 2M(x)M(x) + (M(x))^2 = M(x^2) - (M(x))^2 \end{aligned}$$

В случае **дискретной** случайной величины, имеющей закон распределения $\{x_i, p_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 p_i.$$

Для **непрерывной** случайной величины формула для расчета дисперсии имеет вид

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx$$

Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю.

$$D(C) = 0$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

3. Дисперсия суммы (разности) двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

Следствие 1. Дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

Следствие 2. Если C – постоянная величина, то $D(X + C) = D(X)$.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины являются ее основными числовыми характеристиками.

Пример. Пусть закон распределения дискретной случайной величины имеет вид

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,07	0,21	0,55	0,16	0,01

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .

Решение: Рассчитаем вначале математическое ожидание

$$M(X) = 1 \cdot 0,07 + 2 \cdot 0,21 + 3 \cdot 0,55 + 4 \cdot 0,16 + 5 \cdot 0,01 = 2,83$$

Дисперсия равна

$$D(X) = (1 - 2,83)^2 \cdot 0,07 + (2 - 2,83)^2 \cdot 0,21 + (3 - 2,83)^2 \cdot 0,55 + (4 - 2,83)^2 \cdot 0,16 + (5 - 2,83)^2 \cdot 0,01 = 0,661$$

Пример. Плотность вероятности непрерывной случайной величины равна

$$f(x) = \exp(-x), \text{ где } x > 0$$

Найти ее математическое ожидание и дисперсию.

Решение: Найдем математическое ожидание:

$$M(X) = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = \int_0^{\infty} \frac{U}{dV} \frac{dU}{V} = \int_0^{\infty} \frac{U}{e^{-x}} \frac{dU}{V} = \int_0^{\infty} U e^x \frac{dU}{V} = \int_0^{\infty} U e^x \frac{dU}{e^{-x}} = \int_0^{\infty} U^2 dx = 1$$

Далее,

$$M(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = \int_0^{\infty} \frac{U}{dV} \frac{dU}{V} = \int_0^{\infty} \frac{U}{e^{-x}} \frac{dU}{V} = \int_0^{\infty} U^2 dx = 2$$

Найдем дисперсию, используя формулу

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 2 - 1 = 1.$$

Среднее квадратическое отклонение.

Для оценки рассеяния возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения кроме дисперсии служат и некоторые другие характеристики. К их числу относится среднее квадратическое отклонение.

Средним квадратическим отклонением σ (или стандартом) случайной величины x называется корень квадратный из дисперсии $D(X)$ этой величины: $\sigma(x) = \sqrt{D(X)}$.

Легко показать, что дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины. Поэтому размерность $\sigma(x)$ совпадает с размерностью x . В тех случаях, когда желательно, чтобы оценка рассеяния имела размерность случайной величины, вычисляют среднее квадратическое отклонение, а не дисперсию.

Понятие дисперсии и среднего квадратического отклонения широко используется практически во всех областях человеческой деятельности, связанных с процессами измерений. Так, например, в технике, они характеризуют точность измерительной аппаратуры (чем выше среднеквадратическое отклонение (разброс) при измерениях, тем хуже качество прибора).

Примерами использования данных параметров в экономике могут служить изучение риска различных действий со случайным исходом, в частности, при анализе риска инвестирования в ту или иную отрасль, при оценивании различных активов в портфеле ценных бумаг и т.д.

Пример.

Пусть имеется два варианта инвестирования со следующими характеристиками

Вероятности возможной чистой прибыли								
	Сравнение вариантов решений							
Чистая прибыль, млн.д.е.	-3	-	-1	0	1	2	3	4
Вероятности:								
Инвестиция 1	0	0	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2	0
Инвестиция 2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2

Ожидаемая чистая прибыль инвестирования определяется математическим ожиданием и составляет:

Инвестиция 1: $M(X) = \sum x_i \cdot p_i = 1,2 \text{ млн.}$

Инвестиция 2: $M(X) = \sum x_i \cdot p_i = 1,1 \text{ млн.}$

По ожидаемой прибыли предпочтительнее 1-й вариант. Однако мы не учли риск, связанный с инвестициями. Этот риск может быть определен с помощью дисперсии и (или) среднего квадратического отклонения. Используя результаты таблицы, получим

Инвестиция 1: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 1,25$

Инвестиция 2: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 2,385$

Т.е. риск по варианту для инвестиции 1 меньше. Выбор – за ЛПР.

Содержание работы

1. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 5.
2. В ящике 10 деталей, среди которых 2 нестандартных. Найти вероятность того, что в наудачу отобранных 6 деталях окажется не более одной нестандартной детали.
3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(X)$.

$$F(X) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -1 \\ \frac{x+1}{3}, & \text{при } -1 < x \leq 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятности, математическое ожидание, дисперсию исключаемой величины.

4. Монету подбрасывают 8 раз. Какова вероятность, что она упадет 4 раз верхом вверх.

5. Дискретная случайная величина задана таблицей. Найти P_5 , математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

x_i	-3	-2	-1	1	2
P_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{48}$	P_5

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 7

Тема: «Математическая статистика»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться находить статистические оценки параметров распределения.

ОБОРУДОВАНИЕ: справочные пособия.

Справочный материал

Предметом математической статистики является изучение случайных событий и случайных величин по результатам наблюдений. Совокупность предметов или явлений, объединенных каким-либо общим признаком, называется **статистической совокупностью**. Результатом наблюдений над статистической совокупностью являются **статистические данные** – сведения о том, какие значения принял в итоге наблюдений интересующий нас признак (случайная величина X).

Обработка статистических данных методами математической статистики приводит к установлению определенных закономерностей, присущих массовым

явлениям. При этом **точность** статистических выводов повышается с ростом числа наблюдений.

Статистические данные, как правило, представляют собой ряд значений $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ некоторой случайной величины. Обработка этого ряда значений представляет собой первый этап исследования случайной величины.

Первая задача математической статистики – указать **способы сбора и группировки статистических данных**, полученных в результате наблюдений или в результате специально поставленных экспериментов.

Второй задачей математической статистики является разработка **методов анализа** статистических данных в зависимости от целей исследования. К этой задаче относятся:

- Оценка неизвестной **вероятности события**; оценка неизвестной **функции распределения**; оценка **параметров распределения**, вид которого известен; оценка зависимости случайной величины от одной или нескольких случайных величин и т.п.

- Проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения или о величине параметров распределения, вид которого известен.

В современной математической статистике есть много общего с **наукой о принятии решений в условиях неопределенности**, так как она разрабатывает способы определения числа необходимых испытаний до начала исследования (планирование эксперимента), в процессе исследования (последовательный анализ) и решает многие другие аналогичные задачи.

Выборочный метод и его основные понятия. Случайная выборка, объем выборки.

Пусть требуется изучить совокупность **однородных** объектов относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты. Например, для партии деталей качественным признаком может служить стандартность детали, а количественным – контролируемый размер детали.

В принципе, возможно проведение сплошного обследования, т.е. обследование всех объектов. На практике такое обследование применяется редко, например,

- из-за большого числа объектов
- из-за дороговизны проведения операции контроля,
- из-за того, что контроль часто связан с разрушением объекта (проверка электролампы на долговечность ее работы), и т.д.

В таких случаях случайно отбирается и изучается **ограниченное** число объектов из совокупности.

Выборочной совокупностью или **случайной выборкой** называют совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называют совокупность объектов, из которых производится выборка.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности. Например, если из 1000 деталей отбирается для

обследования 100, то объем генеральной совокупности $N=1000$, а объем выборки $n = 100$.

Пример. Число единиц товара N , произведенного некоторым предприятием в течение года, есть генеральная совокупность. Для исследования качества продукции на практике рассматривается выборка, состоящая из n единиц товара. Признаком, или случайной величиной, может быть число единиц товара, удовлетворяющих сертификационным требованиям.

При составлении выборки можно поступать двумя способами: после того как объект отобран и исследован, его можно возвратить или не возвращать в генеральную совокупность. В связи с этим выборки подразделяются на **повторные** и **бесповторные**.

Повторной называют выборку, при которой отобранный объект (перед отбором следующего) возвращается в генеральную совокупность.

При **бесповторной** выборке отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

Для того чтобы по данным выборки можно было достаточно уверенно судить об интересующем признаке генеральной совокупности, необходимо, чтобы объекты выборки правильно его представляли. Выборка должна правильно представлять пропорции генеральной совокупности, т.е. выборка должна быть репрезентативной (представительной). **Пример** – изучение общественного мнения.

В силу закона больших чисел можно утверждать, что выборка будет репрезентативной, если ее осуществить случайно: каждый объект выборки отобран случайно из генеральной совокупности, если все объекты имеют одинаковую вероятность попасть в выборку.

Если объем выборки достаточно велик, а выборка составляет лишь незначительную часть совокупности, то различие между повторной и бесповторной выборкой стирается.

Способы отбора На практике применяются различные способы отбора, которые можно подразделить на два вида:

- Отбор, не требующий расчленения генеральной совокупности на части. Сюда относятся а) простой случайный бесповторный отбор и б) простой случайный повторный отбор.
- Отбор, при котором генеральная совокупность разбивается на части. Сюда относятся а) **типический отбор**, б) **механический отбор** и в) **серийный отбор**.

Простым случайным называют отбор, при котором объекты извлекаются по одному из генеральной совокупности. Осуществить такой отбор для генеральной совокупности из N объектов можно, например, посредством записи на карточках номеров от 1 до N , последующем перемешивании карточек и выниманием их наугад. При этом обследованию подлежат объекты, имеющие номера, совпадающие с номерами карточек. Если карточки возвращаются в пачку, то имеем простую случайную повторную выборку, в противном случае – простую бесповторную. При большом объеме генеральной

совокупности более рациональным является использование таблиц случайных чисел. Например, чтобы выбрать 50 объектов из пронумерованной генеральной совокупности, открывают любую страницу таблицы случайных чисел и выписывают 50 чисел подряд; в выборку попадают те объекты, номера которых совпадают с выписанными случайными числами. Если случайное число таблицы превосходит число N , такое число пропускают. При проведении бесповторной выборки пропускают также случайные числа, уже встречавшиеся раньше.

Типическим называют отбор, при котором объекты отбираются не из всей генеральной совокупности, а из каждой ее “типической” части. Например, если детали изготовлены на нескольких станках, то отбор производят из продукции каждого станка в отдельности.

Механическим называют отбор, при котором генеральная совокупность механически делится на столько групп, сколько объектов должно войти в выборку, а из каждой группы выбирается один объект. Например, если нужно отобрать 20% изготовленных станком деталей, то отбирают каждую пятую деталь.

Серийным называют отбор, при котором объекты отбирают из генеральной совокупности не по одному, а “сериями”, которые подвергаются сплошному обследованию. Например, если изделия производятся большой группой станков-автоматов, то подвергают сплошному обследованию продукцию только нескольких станков. Этим видом отбора пользуются тогда, когда обследуемый признак колеблется в различных сериях незначительно.

На практике часто применяют **комбинированный отбор**, при котором сочетаются указанные выше способы. Например, разбивают генеральную совокупность на серии одинакового объема, затем простым случайным отбором выбирают несколько серий и, наконец, из каждой серии простым случайным отбором извлекают отдельные объекты.

Вариационный ряд для дискретных и непрерывных случайных величин.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем значение исследуемого параметра x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 – n_2 раз и т.д. При этом $\sum_{i=1}^k n_i = n$ – объем выборки. Наблюдаемые значения x_i называют **вариантами**, а последовательность вариантов, записанных в возрастающем порядке – **вариационным рядом**. Числа наблюдений называют **частотами**, а их отношения к объему выборки n_i/n – **относительными частотами**. **Статистическим распределением выборки** называют перечень вариантов и соответствующих им относительных частот.

Заметим, что в теории вероятностей под распределением понимают соответствие между возможными значениями случайной величины и их **вероятностями**, а в математической статистике – соответствие между наблюдаемыми **вариантами** и их **частотами** или **относительными частотами**.

Приведенный способ представления статистических данных применяют в случае дискретных случайных величин. Для непрерывных случайных величин

удобнее разбить отрезок $[a, b]$ возможных значений случайной величины на частичные полуинтервалы $\Delta_k = [a_{k-1}, a_k)$, $(k=1, \dots, m)$ (Δ_m замкнут также и справа) с помощью некоторой системы точек $a = a_0 < a_1 < \dots < a_m = b$. Часто разбиение $[a, b]$ производят на равные части, тогда $\Delta_k = [a + (k-1)h, a + kh)$, $k=1, \dots, m$, где $h = \frac{b-a}{m}$.

В качестве частот теперь надо брать количество наблюдаемых значений, попавших на каждый из частичных интервалов. Число интервалов часто выбирают на основании формулы Стерджерса $k = 1 + 1,4 \ln n$.

Полигон и гистограмма

Графически статистическое распределение представляется в частности, с помощью **полигона** и **гистограммы**.

Полигоном частот называют ломаную линию, отрезки которой соединяют точки $(x_1; n_1), (x_2; n_2), \dots, (x_k; n_k)$. Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x , а на оси ординат – соответствующие им частоты n и соединяют точки $(x_i; n_i)$ отрезками прямых.

Полигон относительных частот строится аналогично, за исключением того, что на оси ординат откладываются относительные частоты w_i .

В случае непрерывного признака строится **гистограмма**, для чего интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько частичных интервалов длиной h и находят для каждого частичного интервала n_i – сумму частот вариантов, попавших в i -й интервал.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которой служат частичные интервалы длиной h , а высоты равны отношению n_i/h . Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии (высоте) n_i/h . Площадь i -го прямоугольника равна $h n_i/h = n_i$ – сумме частот вариантов i -го интервала, поэтому площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т.е. **объему выборки**. В случае гистограммы **относительных** частот по оси ординат откладываются относительные частоты w_i , на оси абсцисс – частичные интервалы, над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на высоте w_i/h . Площадь i -го прямоугольника равна относительной частоте вариантов w_i , попавших в i -й интервал. Поэтому площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, то есть **единице**.

Содержание работы

1. Через каждый час измерялось напряжение тока в электросети. При этом были получены следующие значения (в В):
227; 219; 215; 230; 232; 223; 220; 222; 218; 219; 222; 221; 227; 226; 226;
209; 211; 215; 218; 220; 216; 220; 220; 221; 225; 224; 212; 217; 219; 220.
Построить статистическое распределение и начертить полигон.
2. Построить вариационный ряд и начертить полигон распределения 60 абитуриентов по числу баллов, полученных ими на приемных экзаменах:

20; 19; 22; 24; 21; 18; 23; 17; 20; 16; 15; 23; 21; 24; 21; 18; 23; 21; 19; 20; 24; 21; 20; 18; 17; 22; 20; 16; 22; 18; 20; 17; 21; 17; 19; 20; 20; 21; 18; 22; 23; 21; 25; 22; 20; 19; 21; 24; 23; 21; 19; 22; 21; 19; 20; 23; 22; 25; 21; 21.

3. Найти эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

а)

x_i	2	4	5	7
n_i	1	2	4	3

б)

x_i	3	5	8
n_i	4	3	3

4. Заполнив предварительно последний столбец таблицы, построить гистограмму частот по данному распределению выборки:

Номер интервала i	Частичный интервал $x_i -$ x_{i+1}	Сумма частот вариант интервала n_i	Плотность частоты n_i / h
1	2 – 7	5	
2	7 – 12	10	
3	12 – 17	25	
4	17 – 22	6	
5	22 – 27	4	

5. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n=40$:

варианта	x_i	2	3	5	8
частота	n_i	12	8	15	5

Найти несмещенную оценку генеральной средней.

6. Найти выборочную среднюю по данному распределению выборки объема $n=20$:

x_i	1530	1550	1560	1590	1600
n_i	2	3	6	5	4

Указание. Перейти к условным вариантам $u_i = x_i - 1560$.

7. В итоге семи измерений некоторой величины одним и тем же прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты: 12; 15; 20; 21; 25; 29; 30. Найти: а) выборочную среднюю результатов измерений; б) выборочную и исправленную дисперсии ошибок прибора.

Информационное обеспечение обучения

Печатные и электронные издания

Основные учебные издания

1. Денежкина И. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие / И. Е. Денежкина, С. Е. Степанов, И. И. Цыганок. — Москва: КноРус, 2022. — 302 с. — ISBN 978-5-406-09716-8. — URL: <https://book.ru/book/943653>
2. Спирина М.С., Спирин П.А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник. – Москва: Академия, 2021. – 352 с.

Интернет ресурсы

3. www.fcior.edu.ru (Информационные, тренировочные и контрольные материалы).
4. www.school-collection.edu.ru (Единая коллекции цифровых образовательных ресурсов).

Электронно-библиотечная система:

5. ЭБС «Znanium»
6. ЭБС «PROFобразование»
7. ЭБС «Book.ru»