

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Саратовский государственный технический университет  
имени Гагарина Ю.А.»

Филиал федерального государственного бюджетного образовательного  
учреждения высшего образования  
«Саратовский государственный технический университет  
имени Гагарина Ю.А.» в г. Петровске

УТВЕРЖДАЮ  
Директор филиала СГТУ  
имени Гагарина Ю.А. в г. Петровске  
Е.А.Бесшапошникова  
«15» июня 2024 г.




## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по дисциплине  
МДК.02.03 «Математическое моделирование»

направление подготовки  
09.02.07 «Информационные системы и программирование»

Методические указания рассмотрены  
на заседании предметной (цикловой) комиссии  
обще профессиональных дисциплин,  
профессиональных модулей специальностей  
технического профиля  
«14» июня 2024 года, протокол №12

Председатель ПЦК  /Ю.А.Табарова/

Петровск 2024

### **Пояснительная записка**

Методические указания по выполнению практических работ подготовлены на основе рабочей программы учебной дисциплины МДК.02.03 «Математическое моделирование», разработанной на основе ФГОС СПО по специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование» и соответствующих общих (ОК) и профессиональных (ПК) компетенций:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных общечеловеческих ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях

ОК 08. Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

ОК 10. Использовать знания по финансовой грамотности, планировать предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере

ПК 2.1. Разрабатывать требования к программным модулям на основе анализа проектной и технической документации на предмет взаимодействия компонент.

ПК 2.4. Осуществлять разработку тестовых наборов и тестовых сценариев для программного обеспечения

ПК 2.5. Производить инспектирование компонент программного обеспечения на предмет соответствия стандартам кодирования

При выполнении практических работ студент должен *знать*:

- модели процесса разработки программного обеспечения;
- основные принципы процесса разработки программного обеспечения;
- основные подходы к интегрированию программных модулей;
- основы верификации и аттестации программного обеспечения

При выполнении практических работ студент должен *уметь*:

- использовать выбранную систему контроля версий;
- использовать методы для получения кода с заданной функциональностью и степенью качества

Содержание практических занятий определено рабочей программой и тематическим планированием, соответствует теоретическому материалу изучаемых разделов учебной дисциплины.

Объем практических занятий по дисциплине определяется учебным планом по данной специальности.

Продолжительность практического занятия – 2 академических часа. Перед проведением практического занятия преподавателем организуется инструктаж, а по ее окончании – обсуждение итогов.

Комплект методических указаний по выполнению практических работ по дисциплине МДК.02.03 «Математическое моделирование» содержит 9 практических занятий.

**Перечень практических работ  
по дисциплине МДК.02.03 «Математическое моделирование»**

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1**

Тема: Построение простейших математических моделей. Построение простейших статистических моделей. Решение простейших однокритериальных задач.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2**

Тема: Сведение произвольной задачи линейного программирования к основной задаче линейного программирования. Решение задач линейного программирования симплекс–методом

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3**

Тема: Нахождение начального решения транспортной задачи. Решение транспортной задачи методом потенциалов

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4**

Тема: Задача о распределении средств между предприятиями. Задача о замене оборудования

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5**

Тема: Составление систем уравнений Колмогорова. Нахождение финальных вероятностей. Нахождение характеристик простейших систем массового обслуживания

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6**

Тема: Решение задач массового обслуживания методами имитационного моделирования

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 7**

Тема: Моделирование прогноза. Построение прогнозов

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8**

Тема: Решение матричной игры методом итераций

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 9**

Тема: Выбор оптимального решения с помощью дерева решений.

## **ИНСТРУКЦИИ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ**

Прежде чем приступить к выполнению заданий, внимательно прочитайте данные рекомендации. Практические работы включают в себя задания следующих видов.

В ходе выполнения практических работ студент должен:

- выполнять требования по охране труда
- соблюдать инструкцию по правилам и мерам безопасности в кабинете информационных технологий
- строго выполнять весь объем работы, указанный в задании
- соблюдать требования эксплуатации компьютерной техники (правила включения и выключения)
- предоставить отчет о проделанной работе по окончании выполненной работы, который должен содержать:

1. Название работы.
2. Цель работы.
3. Задание и его решение.
4. Вывод о проделанной работе.

Текст отчета по практической работе должен быть набран на компьютере шрифтом Times New Roman размером 14 пт. (при оформлении текста используется текстовый редактор MS Word). Шрифт, используемый в иллюстративном материале (таблицы и рисунки), рекомендуется уменьшить до 12 пт. Межстрочный интервал в основном тексте - полуторный. В иллюстративном материале межстрочный интервал рекомендуется сделать одинарным. Поля страницы должны быть: левое поле - 30 мм; правое поле - 15 мм; верхнее и нижнее поле - 20 мм.

Каждый абзац должен начинаться с красной строки. Отступ абзаца – 1,25 см от левой границы текста.

Студент должен выполнить практическую работу самостоятельно (или в группе, если это предусмотрено заданием). Практическая работа выполняется согласно заданию и методическим рекомендациям. После выполнения практической работы обучающийся самостоятельно себя контролирует путем ответов на вопросы. Результат работы представляется преподавателю в виде файла (файлов) в личном каталоге, защищается обучающимися.

По ходу выполнения работы при возникновении вопросов обучающийся может получить консультацию у преподавателя или самостоятельно воспользоваться лекционным материалом, рекомендуемой литературой.

### **1. Оформление текстовых документов**

Текст работы печатается на одной стороне листа формата А4, должен быть только чёрного цвета и иметь поля (верхнее, нижнее – 2 см, левое – 3 см, правое – 1,5 см). Шрифт Times New Roman размером 14, межстрочный интервал 1,5, абзацный отступ 1,25.

## Правила оформления таблиц, рисунков, графиков

Все таблицы и рисунки должны иметь названия и порядковую нумерацию (например, Таблица 1, Рисунок 3). Нумерация таблиц и рисунков должна быть сквозной для всего текста до приложений. Таблицы, рисунки каждого приложения обозначают отдельной нумерацией арабскими цифрами с добавлением перед цифрой обозначения приложения (напр., Таблица В.1).

### Оформление таблицы.

Название таблицы помещается слева над таблицей без абзацного отступа, в одной строке с ее номером через тире (14 шрифтом).

В каждой таблице следует указывать единицы измерения показателей. Если единица измерения в таблице является общей для всех числовых табличных данных, то ее приводят в заголовке таблицы после ее названия.

При переносе: слово “Таблица” указывают один раз слева над первой частью таблицы, над другими частями пишут слова “Продолжение таблицы” или “Окончание таблицы” справа, с указанием номера (обозначения) таблицы. Если в конце страницы таблица прерывается и ее продолжение будет на следующей странице, то в первой части таблицы нижнюю горизонтальную черту, ограничивающую таблицу, не проводят.

Таблица 1 – Распределение ответов респондентов на вопросы анкеты по возрастным группам (в процентах)

Варианты ответов	Возрастные группы				Всего по выборке
	18-24 года	25-29 лет	30-45 лет	старше 45 лет	

Не допускается прямое копирование в текст Диплома выходных таблиц отчета компьютерной программы STATISTICA. Таблицы должны быть построены заново.

### Оформление рисунка.

Все иллюстративные материалы (рисунки, диаграммы, графики) в Дипломе имеют название «Рисунок». На графический материал должна быть дана ссылка в тексте документа.

Иллюстрации могут быть в компьютерном исполнении, в том числе и цветные.

Порядковый номер рисунка и – через тире – его название проставляются под рисунком по центру строки (см. Рисунок 1).



Рисунок 1 – Пятиконечная звезда

## 2. Выполнение расчетных заданий.

1. Внимательно прочитайте теоретический материал – конспект, составленный на учебном занятии. Выпишите формулы из конспекта по изучаемой теме.
2. Обратите внимание, как использовались данные формулы при решении задач на занятии.
3. Выпишите ваш вариант задания, предложенного в данных методических

указаниях, в соответствии с порядковым номером в учебном журнале.

4.Решите предложенную задачу, используя выписанные формулы.

5.В случае необходимости воспользуйтесь справочными данными.

6.Проанализируйте полученный результат (проверьте размерности величин, правильность подстановки в формулы численных значений, правильность расчетов, правильность вывода неизвестной величины из формулы).

7.Решение задач должно сопровождаться необходимыми пояснениями. Расчётные формулы приводите на отдельной строке, выделяя из текста, с указанием размерности величин. Формулы записывайте сначала в общем виде (буквенное выражение), затем подставляйте числовые значения без указания размерностей, после чего приведите конечный результат расчётной величины.

Показатели оценки результатов практической работы:

- грамотная запись условия задачи и ее решения;
- грамотное использование формул;
- грамотное использование справочной литературы;
- точность и правильность расчетов;
- обоснование решения задачи.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1

### Тема: Построение простейших математических моделей. Построение простейших статистических моделей. Решение простейших однокритериальных задач.

**Цель работы:** закрепить практические навыки по построению простейших математических и простейших статистических моделей; научить определять оптимальное решение однокритериальных и многокритериальных задач в простейших случаях.

**Оборудование:** ПК, программное обеспечение – MS Word, инструкции по выполнению работы.

#### Справочный материал:

Построение математической модели процесса, явления или объекта начинается с построения упрощенного варианта модели, в котором учитываются только основные черты. В результате прослеживаются основные связи между входными параметрами, ограничениями и показателем эффективности. Общего подхода к построению модели нет. В каждом конкретном случае при построении математической модели учитывается большое количество факторов: цель построения модели, круг решаемых задач, точность описания модели и точность выполнения вычислений. Математическая модель должна отражать все существенные факторы, определяющие ее поведение, и при этом быть простой и удобной для восприятия результатов.

Модель — это материальный или идеальный объект, заменяющий оригинал, наделенный основными характеристиками (чертами) оригинала и предназначенный для проведения некоторых действий над ним с целью получения новых сведений об оригинале.

При построении математической модели необходимо обеспечить *достаточную* точность вычислений (точность решения) и *необходимую* подробность модели. Любая математическая модель включает в себя описание основных, т. е. *необходимых* для исследования свойств и законов функционирования исследуемого объекта, процесса или явления. В своей основе каждая математическая модель имеет целевую функцию, которая описывает функционирование реального объекта, процесса или явления. В зависимости от исследуемого (моделируемого) объекта, явления или процесса *целевая функция* может быть представлена одной функциональной зависимостью, системой уравнений (линейных, нелинейных, дифференциальных и т. д.), набором статистических данных и т. д. При работе с целевой функцией исследователь воздействует на нее через *набор входных параметров* (рис. 1).

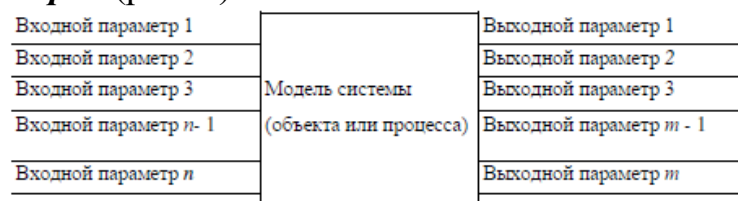




Рис.1 Обобщенная схема математической модели

В зависимости от вида показателя эффективности различают задачи принятия решений по скалярному показателю (однокритериальные задачи) и задачи принятия решений по векторному показателю (многокритериальные задачи).

Задачами **математического программирования** называют **однокритериальные задачи оптимизации**. Методы их решения оперируют с детерминированными математическими моделями. В этих моделях отражены разнообразные проблемы распределения ограниченных ресурсов в экономике, военном деле, создании новой техники и т.д. Пути решения этих проблем, так или иначе, связаны с планированием целенаправленной деятельности, т.е. с разработкой определенных установок на будущее.

**Задача математического программирования** формулируется следующим образом: найти значения переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , максимум (минимум) заданной целевой функции  $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  при условии  $g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq (\geq, =) b_j, (j = \overline{1, m})$ .

Различают два вида задач математического программирования:

1. Задачи линейного программирования.
2. Задачи нелинейного программирования.

В первых задачах функция  $y$  и ограничения  $g_j$  линейны относительно переменных  $x$ . Во вторых задачах целевая функция  $y$  и условия  $g_j$  имеют разного рода нелинейности.

**Графоаналитический метод решения задач оптимизации.** Этим методом вручную решаются простые задачи оптимизации. Математические модели в этих задачах не должны быть сложными, т.к. в противном случае требуется много времени для их решения. Для начала рассмотрим однопараметрическую однокритериальную задачу оптимизации.

#### **Содержание работы:**

**Задание 1:** Составить математическую модель следующей задачи. На складе имеется 300 кг сырья. Надо изготовить два вида продукции. На изготовление первого изделия требуется 2 кг сырья, а на изготовление второго изделия — 5 кг. Определить план выпуска двух изделий.

**Решение:** Обозначим,  $x_1$  — единица первого изделия,  $x_2$  — единица второго изделия. Тогда составим математическая модель:  $2x_1 + 5x_2 = 300$ .

**Задание 2:** Составить математическую модель следующей задачи. Предположим, что для производства продукции вида А и В можно использовать материал 3-х сортов. При этом на изготовление единицы изделия вида А расходуется 14 кг первого сорта, 12 кг второго сорта и 8 кг третьего сорта. На изготовление продукции вида В расходуется 8 кг первого сорта, 4 кг второго сорта, 2 кг третьего сорта. На складе фабрики имеется всего материала первого сорта 624 кг, второго сорта 541 кг, третьего сорта 376 кг. От реализации единицы готовой продукции вида А фабрика имеет прибыль вида 7 руб., а от реализации единицы готовой продукции вида В

фабрика имеет прибыль вида 3 руб. Определить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов А и В.

Решение: Составим математическую модель задачи: пусть  $x_1$  – единица готовой продукции вида А,  $x_2$  – единица готовой продукции вида В. Цель фабрики получить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов А и В, тогда:  $F = 7x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$ .

Система ограничений:

$$\begin{cases} 14x_1 + 8x_2 \leq 624 \\ 12x_1 + 4x_2 \leq 541 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 376 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$  условие неотрицательности

**Задание 3:** Составить математическую модель следующей задачи. Имеются три пункта поставки однородного груза А1, А2, А3 и пять пунктов В1, В2, В3, В4, В5 потребления этого груза. На пунктах А1, А2 и А3 находится груз соответственно в количестве 200, 450, 250 тонн. В пункты В1, В2, В3, В4, В5 требуется доставить соответственно 100, 125, 325, 250, 100 тонн груза. Расстояние между пунктами поставки и пунктами потребления приведено в таблице:

Пункты поставки	Пункты потребления				
	В1	В2	В3	В4	В5
А1	5	8	7	10	3
А2	4	2	2	5	6
А3	7	3	5	9	2

Решение:

1. Проверка сбалансированности модели задачи. Модель является сбалансированной, т.к. суммарный объем запасов сырья равен суммарному объему потребности в ней:  $200+450+250=100+125+325+250+100$ .
2. Построение математической модели – неизвестными в этой задаче является объем перевозок. Пусть  $x_{ij}$  – объем перевозок  $i$ -го предприятия в  $j$ -й пункт потребления. Суммарные транспортные расходы – это функционал качества (критерий цели):  $F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij}x_{ij}$ , где  $c_{ij}$  – стоимость перевозки единицы продукции с  $i$ -го предприятия в  $j$ -й пунктах потребления.

Неизвестные в этой задаче должны удовлетворять следующим ограничениям:

- Объем перевозок не могут быть отрицательными;
- Поскольку модель сбалансирована, то вся продукция должна быть вывезена с предприятия, а потребность всех пунктов потребления должна быть полностью удовлетворены.

Итак, имеем следующую задачу:  $F = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min$ ,

- Найти минимум функционала при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^4 x_{ij} = 100, \\ \sum_{i=1}^4 x_{ij} = 125, \\ \sum_{i=1}^4 x_{ij} = 325, \\ \sum_{i=1}^4 x_{ij} = 250, \\ \sum_{i=1}^4 x_{ij} = 100, \end{cases} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^5 x_{ij} = 200, \\ \sum_{j=1}^5 x_{ij} = 450, \\ \sum_{j=1}^5 x_{ij} = 250, \end{cases} \quad x_{ij} \geq 0, i \in [1,3], j \in [1,5]$$

**Задание 4: Решить графическим способом задачу.** Для производства двух видов, изделия  $P_1$  и  $P_2$  используется, три вида сырья  $S_1, S_2, S_3$ , запасы которого соответственно равны 100, 60, 180 единиц. Для производства одной единицы продукции  $P_1$  используется 2 единицы сырья  $S_1$  и по 1 единице сырья  $S_2$  и  $S_3$ . Для производства одной единицы продукции  $P_2$  используется по 1 единице сырья  $S_1$  и  $S_2$  и 4 единицы сырья  $S_3$ . Прибыль от реализации 1 единицы каждой продукции  $P_1$  и  $P_2$  соответственно равна 30 и 20 единиц. Необходимо составить такой план выпуска продукции  $P_1$  и  $P_2$ , при котором суммарная прибыль будет наибольшей.

Решение: Составим математическую модель задачи: пусть  $x_1$  – единица готовой продукции вида  $P_1$ ,  $x_2$  – единица готовой продукции вида  $P_2$ . Цель фабрики получить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов  $P_1$  и  $P_2$ , тогда:  $F = 30 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 \rightarrow \max$ .

Система ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 100 \\ x_1 + x_2 \leq 60 \\ x_1 + 4x_2 \leq 180 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$  условие неотрицательности

Алгоритм решения:

1. Используя систему ограничений и условия неотрицательности, строим область допустимых решений.
2. Строим линию уровня  $F = 0$ . Линией уровня функции двух переменных называется линия, вдоль которой функция сохраняет свое постоянное значение.
3. Строим градиент целевой функции. Градиент функции – это вектор, имеющий своими координатами частные производные функции и показывающий направление наискорейшего роста значения функции. Так как целевая функция ЗЛП линейная, то линии уровня целевой функции – прямые и  $\overline{\text{grad}F} = \vec{n}$ ,  $\vec{n}$ -вектор нормали к этим прямым.
4. Перемещаем линию уровня  $F = 0$  вдоль градиента функции. Если ЗЛП на минимум, то оптимальное решение находится в первой точке, принадлежащей ОДР; если ЗЛП на максимум, то оптимальное решения находится в последней точке, принадлежащей ОДР.

*Замечание.* При построении ОДР возможны случаи:

1. ОДР оказалась пустым множеством. В этом случае ЗЛП не имеет решения из-за несовместности системы ограничений.

2. ОДР оказалась либо выпуклым многоугольником, либо неограниченной выпуклой многоугольной областью. Тогда ЗЛП имеет оптимальное решение, которое совпадает по крайней мере с одной из вершин ОДР.

Используя алгоритм решения и систему ограничений и условия неотрицательности, построим ОДР. Для этого во всех неравенствах системы ограничений и условия неотрицательности знак неравенства заменим на знак равенства. В результате будем иметь уравнения прямых:

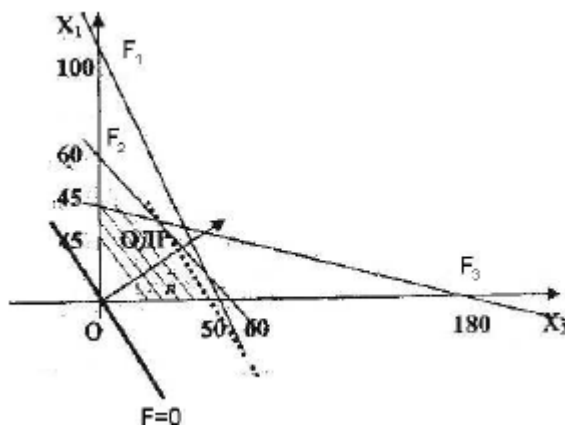
$$F_1: 2x_1 + x_2 = 100$$

$$F_2: x_1 + x_2 = 60$$

$$F_3: x_1 + 4x_2 = 180$$

$$x_1 = 0, x_2 = 0$$

В системе координат  $X_1OX_2$  построим эти прямые. В результате будем иметь ОДР. В этой же системе координат строим линию уровня  $F = 0$  и вектор  $\overrightarrow{\text{grad}F} = \vec{n}$ .



Так как задача на максимум, будем перемещать линию уровня  $F=0$  вдоль вектора  $\vec{n}$  до тех пор, пока она не пересечет ОДР в самом крайнем своем положении, т.е. при дальнейшем перемещении она не будет с ОДР иметь общие точки. Такой точкой оказалась точка пересечения прямых  $F_1$  и  $F_2$ .

Вычислим ее координаты:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 100 \\ x_1 + x_2 = 60 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 40, x_2 = 20, F_{\max} = 30 \cdot 40 + 20 \cdot 20 = 1600$$

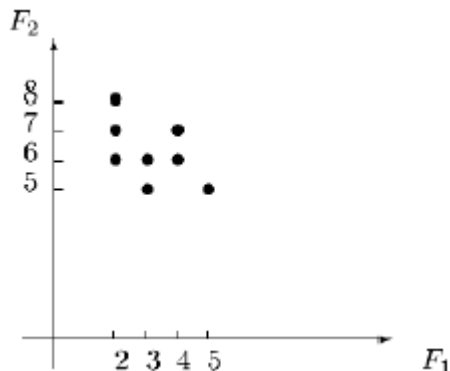
Таким образом, если предприятие будет выпускать продукцию вида  $P_1$  и  $P_2$ , в количестве 40 и 20 единиц соответственно, то получит максимальную прибыль в размере 1600 единиц.

**Задание 5:** Фирме необходимо выбрать наилучший вариант закупки оборудования, если задана закупочная цена каждого из вариантов оборудования и время изготовления и доставки. Под наилучшим вариантом понимается вариант с минимальными закупочной стоимостью и временем доставки.

Обозначим, соответственно, через  $x_i$  – номер,  $F_1(x_i)$  – время изготовления и доставки,  $F_2(x_i)$  – закупочную стоимость варианта закупки оборудования. Значения функций  $F_1(x_i)$  и  $F_2(x_i)$  заданы таблицей:

$x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_1(x_i)$	2	2	2	3	3	4	4	5
$F_2(x_i)$	6	7	8	5	6	6	7	5

Задача отыскания множества Парето в случае двух критериев вида  $F_1(x) \rightarrow \min$  и  $F_2(x) \rightarrow \min$  может быть решена графически следующим образом. Находим все точки с наименьшим значением  $F_1(x)$ .



Если их несколько, выбираем из них точку с наименьшим значением  $F_2(x)$ . Включаем ее в множество Парето. Отсекаем точки с большими либо равными значениями  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  (северо-восточный угол с вершиной в выбранной точке). Повторяем процедуру для оставшейся части допустимой области.

Из рисунка видно, что для нас представляют интерес пары  $(F_1, F_2) \in \{(2,6), (3,5)\}$  и соответствующие решения  $(x_1, x_2) \in \{(2,2), (1,2)\}$ , которые являются недоминируемыми и образуют множество Парето рассматриваемой задачи.

**Задание 6.** Составить математическую модель следующей задачи. Предположим, что для производства продукции вида А и В можно использовать материал трех сортов. При этом на изготовление единицы изделия вида А расходуется  $a_1$  кг первого сорта,  $a_2$  кг второго сорта и  $a_3$  кг третьего сорта. На изготовление продукции вида В расходуется  $b_1$  кг первого сорта,  $b_2$  кг второго сорта,  $b_3$  кг третьего сорта. На складе фабрики имеется всего материала первого сорта  $c_1$  кг, второго сорта  $c_2$  кг, третьего сорта  $c_3$  кг. От реализации единицы готовой продукции вида А фабрика имеет прибыль вида  $\alpha$  руб., а от реализации единицы готовой продукции вида В фабрика имеет прибыль вида  $\beta$  руб. Определить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов А и В.  
 $a_1 = 19, a_2 = 16, a_3 = 19, b_1 = 26, b_2 = 17, b_3 = 8, c_1 = 868, c_2 = 638, c_3 = 853, \alpha = 5, \beta = 4$ .

**Задание 7.** Имеются три пункта поставки однородного груза А1, А2, А3 и пять пунктов В1, В2, В3, В4, В5 потребления этого груза. На пунктах А1, А2 и А3 находится груз соответственно в количестве  $a_1, a_2$  и  $a_3$  тонн. В

пункты В1, В2, В3, В4, В5 требуется доставить соответственно  $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$  тонн груза. Расстояние между пунктами поставки и пунктами потребления приведено в таблице:

Пункты поставки	Пункты потребления				
	В1	В2	В3	В4	В5
А1	D11	D12	D13	D14	D15
А2	D21	D22	D23	D24	D25
А3	D31	D32	D33	D34	D35

Найти такой план закрепления потребителей за поставщиками однородного груза, чтобы общие затраты по перевозкам были минимальными.

$a_1=300, a_2=250, a_3=200, b_1=210, b_2=150, b_3=120, b_4=135, b_5=135$ .

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 13 & 2 & 7 \\ 9 & 4 & 11 & 9 & 17 \\ 3 & 16 & 10 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

**Задание 8.** Фирме необходимо выбрать наилучший вариант закупки оборудования, если задана закупочная цена каждого из вариантов оборудования и время изготовления и доставки. Под наилучшим вариантом понимается вариант с минимальными закупочной стоимостью и временем доставки.

А) Для заданной двухкритериальной задачи, задавшись коэффициентами  $\alpha$  и  $\beta$  провести линейную свертку критериев  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  и определить минимальное решение.

Б) Для заданной двухкритериальной задачи найти множество Парето в случае двух критериев вида  $F_1(x) \rightarrow \min$  и  $F_2(x) \rightarrow \min$ . Значения  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  заданы таблицей:

$x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_1(x_i)$	2	2	2	3	3	4	4	5
$F_2(x_i)$	4	5	6	3	4	4	5	3

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2

### Тема: Сведение произвольной задачи линейного программирования к основной задаче линейного программирования. Решение задач линейного программирования симплекс-методом

**Цель работы:** научить сводить произвольную задачу линейного программирования к основной задаче линейного программирования, решать задачи линейного программирования симплекс-методом.

**Оборудование:** ПК, программное обеспечение – MS Word, инструкции по выполнению работы.

#### Справочный материал:

Задачи оптимального планирования, связанные с отысканием оптимума заданной целевой функции (линейной формы) при наличии ограничений в виде линейных уравнений или линейных неравенств относятся к задачам линейного программирования.

Линейное программирование – это направление математического программирования, изучающее методы решения экстремальных задач, которые характеризуются линейной зависимостью между переменными и линейным критерием.

Сущность линейного программирования состоит в нахождении точек наибольшего или наименьшего значения некоторой функции при определенном наборе ограничений, налагаемых на аргументы и образующих систему ограничений, которая имеет, как правило, бесконечное множество решений. Каждая совокупность значений переменных (аргументов функции  $F$ ), которые удовлетворяют системе ограничений, называется допустимым планом задачи линейного программирования. Функция  $F$ , максимум или минимум которой определяется, называется целевой функцией задачи. Допустимый план, на котором достигается максимум или минимум функции  $F$ , называется оптимальным планом задачи.

Система ограничений, определяющая множество планов, диктуется условиями производства. Задачей линейного программирования (**ЗЛП**) является выбор из множества допустимых планов наиболее выгодного (оптимального).

Общая форма задачи линейного программирования формулируют следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \{ \leq, \geq, = \} b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \{ \leq, \geq, = \} b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \{ \leq, \geq, = \} b_m \end{cases} \quad (1)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \quad (2)$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max \quad (3)$$

Коэффициенты  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  – любые действительные числа (возможно 0).

Итак, решения, удовлетворяющие системе ограничений (1) условий задачи и требованиям неотрицательности (2), называются допустимыми, а

решения, удовлетворяющие одновременно и требованиям минимизации (максимализации) (3) целевой функции, - оптимальными.

Выше описанная задача линейного программирования (ЗЛП) представлена в общей форме, но одна и та же (ЗЛП) может быть сформулирована в различных эквивалентных формах. Наиболее важными формами задачи линейного программирования являются каноническая и стандартная.

В канонической форме задача является задачей на максимум (минимум) некоторой линейной функции  $F$ , ее система ограничений состоит только из равенств (уравнений). При этом переменные задачи  $x_1, x_2, \dots, x_n$  являются неотрицательными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (4)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \quad (5)$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max (\min) \quad (6)$$

К канонической форме можно преобразовать любую задачу линейного программирования.

#### **Правило приведения ЗЛП к каноническому виду:**

1. Если в исходной задаче некоторое ограничение (например, первое) было неравенством, то оно преобразуется в равенство, введением в левую часть некоторой неотрицательной переменной, причем в неравенства  $\leq$  вводится дополнительная неотрицательная переменная со знаком «+»; в случае неравенства  $\geq$  - со знаком «-»:  $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$  (7)

Вводим переменную  $x_{n+1} = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n$ . Тогда неравенство (7) запишется в виде:  $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$

В каждое из неравенств вводится своя – уравнивающая переменная, после чего система ограничений становится системой уравнений.

2. Если в исходной задаче некоторая переменная не подчинена условию неотрицательности, то ее заменяют (в целевой функции и во всех ограничениях) разностью неотрицательных переменных.

3. Если в ограничениях правая часть отрицательна, то следует умножить это ограничение на (-1)

4. Наконец, если исходная задача была задачей на минимум, то введением новой целевой функции  $F_1 = -F$  мы преобразуем нашу задачу на минимум функции  $F$  в задачу на максимум функции  $F_1$ .

Таким образом, всякую задачу линейного программирования можно сформулировать в канонической форме.

В стандартной форме задача линейного программирования является задачей на максимум (минимум) линейной целевой функции. Система ограничений ее состоит из одних линейных неравенств типа  $\leq$  или  $\geq$ . Все переменные задачи неотрицательны.



$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \\ F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max \end{cases}$$

Всякую задачу линейного программирования можно сформулировать в стандартной форме. Преобразование задачи на минимум в задачу на максимум, а также обеспечение не отрицательности переменных производится так же, как и раньше. Всякое равенство в системе ограничений равносильно системе взаимопротивоположных неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ -a_{i1} - a_{i2} - \dots - a_{in} \leq b_i \end{cases} \Leftrightarrow$$

Существует и другие способы преобразования системы равенств в систему неравенств, т.е. всякую задачу линейного программирования можно сформулировать в стандартной форме.

### **Решение задач линейного программирования симплекс-методом.**

Идея симплекс-метода заключается в последовательном улучшении первоначального плана путем упорядоченного перехода от одного опорного плана к другому и завершается нахождением оптимального плана. Симплекс-методом решаются только канонические задачи линейного программирования. Решение канонической задачи симплекс-методом существенно облегчается применением так называемых симплексных таблиц. Всякую каноническую задачу можно записать условно в виде таблицы. Таблица заполняется следующим образом: первые  $m$  строк содержат в условной форме уравнения системы ограничений, разрешенные относительно базисных переменных. В последней строке записана целевая функция, эта строка называется F-строкой. В столбцах записаны свободные переменные и свободные члены.

**Условие оптимальности плана:** если ЗЛП на максимум, то в F-строке не должно быть отрицательных элементов; если ЗЛП на минимум, то в F-строке не должно быть положительных элементов.

### **Алгоритм решения:**

1. Исходную задачу линейного программирования приводим к каноническому виду путем введения базисных переменных.
2. Базисные переменные выражаем через свободные переменные.
3. Строим начальный план, полагая свободные переменные равными нулю, тогда базисные переменные будут равны свободным членам.
4. Строим первую симплекс-таблицу.
5. Проверяем план на оптимальность. Если план не оптимален, то его улучшаем.
6. Улучшение плана.
  - а) выбор разрешающего столбца: для этого в F-строке выбираем максимальный по абсолютной величине из отрицательных элементов, если

задача на максимум, или, максимальный из положительных элементов, если задача на минимум. Пусть это будет столбец с номером  $s$ ;

б) выбор разрешающей строки: выбираем строку с минимальным симплексным отношением. Симплексные отношения – это отношение свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца. Пусть это будет строка с номером  $r$ .

в) выбор разрешающего элемента: элемент, стоящий на пересечении разрешающих строки и столбца. Пусть это будет элемент  $a_{rs}$ .

г) переменную  $x_s$  вводим в базис вместо переменной  $x_r$ .

д) элементы новой симплекс-таблицы  $b_{ij}$  пересчитываем по следующим формулам:

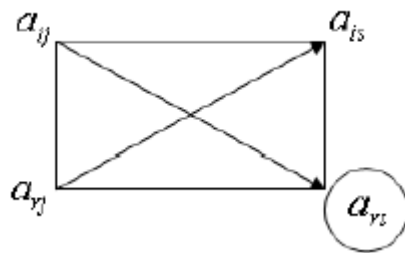
$$\text{разрешающий элемент } b_{rs} = \frac{1}{a_{rs}}$$

$$\text{элементы разрешающего столбца } b_{is} = -\frac{a_{is}}{a_{rs}}, i \neq r$$

$$\text{элементы разрешающей строки } b_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rs}}, j \neq s$$

остальные элементы симплекс-таблицы по правилу прямоугольника:

$$b_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot a_{rs} - a_{rj} \cdot a_{is}}{a_{rs}}$$



7. Вновь полученный план проверяем на оптимальность.

### Содержание работы:

**Задание 1:** а) Привести к канонической форме задачу линейного программирования.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ x_1 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 \geq 1 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$F = x_1 - x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$$

б) Напишите задачу в стандартной форме.

а) Введем дополнительные переменные  $x_4, x_5$ . Причем, в первое неравенство введем переменную  $x_4$  со знаком плюс, а в третье – неотрицательную переменную  $x_5$  со знаком минус запишем задачу в виде:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 - x_5 = 1 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

Переведем  $\min$  и  $\max$ , умножив целевую функцию на  $-1$ :  $F = -x_1 + x_2 - 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 \rightarrow \max$ , что и дает эквивалентную задачу в канонической форме.

б) Всякую задачу линейного программирования можно сформулировать в стандартной форме. Преобразование задачи на минимум в задачу на максимум, а также обеспечение не отрицательности переменных производится так же, как и раньше. Всякое равенство в системе ограничений равносильно системе взаимопротивоположных неравенств, тогда получим:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ x_1 + 2x_3 \leq 8 \\ -x_1 - 2x_3 \leq 8 \\ -x_1 - 2x_2 \geq 1 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$F = -x_1 + x_2 - 3x_3 \rightarrow \max$$

**Задание 2:** Для производства двух видов, изделия  $P_1$  и  $P_2$  используется, три вида сырья  $S_1, S_2, S_3$ , запасы которого соответственно равны 100, 60, 180 единиц. Для производства одной единицы продукции  $P_1$  используется 2 единицы сырья  $S_1$  и по 1 единице сырья  $S_2$  и  $S_3$ . Для производства одной единицы продукции  $P_2$  используется по 1 единице сырья  $S_1$  и  $S_2$  и 4 единицы сырья  $S_3$ . Прибыль от реализации 1 единицы каждой продукции  $P_1$  и  $P_2$  соответственно равна 30 и 20 единиц. Необходимо составить симплекс-методом такой план выпуска продукции  $P_1$  и  $P_2$ , при котором суммарная прибыль будет наибольшей.

Решение:

1. Составим математическую модель задачи: пусть  $x_1$  – единица готовой продукции вида  $P_1$ ,  $x_2$  – единица готовой продукции вида  $P_2$ . Цель фабрики получить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов  $P_1$  и  $P_2$ , тогда:  $F = 30x_1 + 20x_2 \rightarrow \max$ .

Система ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 100 \\ x_1 + x_2 \leq 60 \\ x_1 + 4x_2 \leq 180 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad \text{условие неотрицательности}$$

2. Задачу приводим к каноническому виду:  $F = 30x_1 + 20x_2 \rightarrow \max$ .

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 100 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 60 \\ x_1 + 4x_2 + x_5 = 180 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0$$

3. Базисные переменные выражаем через свободные:

$$\begin{cases} x_3 = 100 - 2x_1 - x_2 \\ x_4 = 60 - x_1 - x_2 \\ x_5 = 180 - x_1 - 4x_2 \end{cases}$$

4. Записываем начальный план:  $X_0 = (0; 0; 100; 60; 180)$

5. Строим первую симплекс-таблицу:

Таблица 1. Первая симплекс-таблица

Своб. перем. Базис. перем.	$-x_1$	$-x_2$	Свободные члены	Симплексные отношения
$x_3$	2	1	100	$\frac{100}{2} = 50 \text{ min}$
$x_4$	1	1	60	$\frac{60}{1} = 60$
$x_5$	1	4	180	$\frac{180}{1} = 180$
Ф-строка	-30	-20	0	

6. Начальный план не оптимален, так как в Ф-строке есть отрицательные элементы.

7. Улучшение плана. Строим вторую симплекс-таблицу, элементы которой пересчитываем по соответствующим формулам.

Таблица 2. Вторая симплекс-таблица

Своб. перем. Базис. перем.	$-x_3$	$-x_2$	Свободные члены	Симплексные отношения
$x_1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	50	100

$x_4$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	10	20 min
$x_5$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	130	$\approx 37,14$
Ф-строка	15	-5	1500	

8. План, соответствующий таблице 2  $X_1 = (50; 0; 0; 10; 130)$  не оптимален, так как в Ф-строке есть отрицательные элементы. Улучшаем его.

9. Улучшение плана. Строим третью симплекс-таблицу, элементы которой пересчитываем по соответствующим формулам.

Таблица 3. Третья симплекс-таблица

Своб. перем. Базис. перем.	$-x_3$	$-x_4$	Свободные члены	Симплексные отношения
$x_1$	1	-1	40	
$x_2$	-1	2	20	
$x_5$	3	-7	60	
Ф-строка	10	10	1600	

10. План, соответствующий таблице 3  $X_2 = (40; 20; 0; 0; 60)$  оптимален, так как в Ф-строке нет отрицательных элементов.

Ответ: если предприятие будет выпускать продукцию вида  $P_1$  и  $P_2$  в количестве 40 и 20 единиц соответственно, то получит максимальную прибыль в размере 1600 единиц, при этом сырье  $S_2$  и  $S_3$  будет израсходовано полностью, а сырье  $S_3$  останется в количестве 60 единиц.

**Задание 3.** а) Привести к канонической форме задачу линейного программирования.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 4, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 9 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$F = 2x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \max$$

б) Напишите задачу в стандартной форме.

**Задание 4.** Предположим, что для производства продукции вида А и В можно использовать материал трех сортов. При этом на изготовление единицы изделия вида А расходуется  $a1$  кг первого сорта,  $a2$  кг второго сорта и  $a3$  кг третьего сорта. На изготовление продукции вида В расходуется  $b1$  кг первого сорта,  $b2$  кг второго сорта,  $b3$  кг третьего сорта. На складе фабрики имеется всего материала первого сорта  $c1$  кг, второго сорта  $c2$  кг, третьего сорта  $c3$  кг. От реализации единицы готовой продукции вида А фабрика имеет прибыль вида  $\alpha$  руб., а от реализации единицы готовой продукции вида В фабрика имеет прибыль вида  $\beta$  руб. Определить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов А и В симплекс-методом.

$a1=19, a2=16, a3=19, b1=31, b2=9, b3=1, c1=1121, c2=706, c3=1066, \alpha=16, \beta=19.$

### ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3

#### Тема: Нахождение начального решения транспортной задачи. Решение транспортной задачи методом потенциалов

**Цель работы:** научить находить начальное решение транспортной задачи двумя методами: методом северо-западного угла и методом наименьшей стоимости; находить оптимальное решение транспортной задачи методом потенциалов.

**Оборудование:** ПК, программное обеспечение – MS Word, инструкции по выполнению работы.

#### Справочный материал:

Симплексный метод для решения задач линейного программирования является универсальным, он позволяет решить любую задачу, но решение иных задач связано с трудоемкими расчетами. Можно выделить класс задач, которые решаются более простыми специальными методами. К числу таких задач относятся так называемые *транспортные задачи*.

*Классическая транспортная задача* – о наиболее экономном плане перевозок однородного продукта или взаимозаменяемых продуктов из пунктов отправления в пункты назначения.

Классическая транспортная задача (сокращенно ТЗ) формулируется следующим образом.

В пунктах отправления  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , которые будем называть также поставщиками, сосредоточены запасы однородного груза в количествах  $a_1, a_2, \dots, a_m$  соответственно. В пунктах назначения  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , именуемые потребителями, надлежит доставить соответственно  $b_1, b_2, \dots, b_n$  единиц груза.

Известен транспортный тариф  $c_{ij}$  – стоимость перевозки единицы груза из пункта  $A_i$  в пункт  $B_j$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Требуется составить такой план перевозок груза, при котором общая стоимость  $F$  всех перевозок была бы наименьшей, при этом все заявки были бы выполнены.

В термин "транспортный тариф" вкладывается условное понимание стоимости единицы груза – это может быть себестоимость, расстояние, тариф, время, расход топлива или электроэнергии и др.

Пусть суммарные запасы грузов у поставщиков равны суммарным потребностям потребителей:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

Это условие называется условием баланса. Если для ТЗ условие баланса выполняется, то модель ТЗ называется закрытой, если условие баланса не выполнено, то модель ТЗ – открытая. Составим математическую модель ТЗ.

Пусть  $x_{ij}$  – количество груза, которое поставщик  $A_i$  отправляет потребителю  $B_j$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ) со стоимостью перевозок  $c_{ij}$ . Данные задачи можно представить в виде таблицы:

Поставщики	Потребители				Запасы
	$B_1$	$B_2$	...	$B_n$	
$A_1$	$c_{11}$ $x_{11}$	$c_{12}$ $x_{12}$	...	$c_{1n}$ $x_{1n}$	$a_1$
$A_2$	$c_{21}$ $x_{21}$	$c_{22}$ $x_{22}$	...	$c_{2n}$ $x_{2n}$	$a_2$
...	...	...	...	...	...
$A_m$	$c_{m1}$ $x_{m1}$	$c_{m2}$ $x_{m2}$	...	$c_{mn}$ $x_{mn}$	$a_m$
Потребности	$b_1$	$b_2$	...	$b_n$	$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$

По смыслу своему величины  $x_{ij} \geq 0$  и должны удовлетворять следующим ограничениям:

- из пункта  $A_i$  все запасы должны быть вывезены (ограничения по ресурсам):

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

- заявки потребителей  $B_j$  должны быть выполнены (ограничения по потребностям):

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Затраты на перевозку  $x_{ij}$  единиц груза из пункта поставки  $A_i$  в пункт потребления  $B_j$  составляют  $c_{ij} \cdot x_{ij}$  рублей; общая же стоимость всех перевозок  $x_{ij}$  равна сумме всех таких затрат:  $F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min$ .

Математическая постановка ТЗ состоит в следующем: составить план перевозок  $x_{ij}$ , удовлетворяющих системе ограничений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, (j = 1, 2, \dots, n) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, (i = 1, 2, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \end{cases}$$

условию не отрицательности:  $x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ , при котором целевая функция достигает своего минимума:  $F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min$ .

Из математической модели видно, что ТЗ является частным случаем общей задачи линейного программирования.

Процедура решения ТЗ будет состоять в последовательном улучшении опорных планов и проверки их на оптимальность.

### Методы построения начального плана.

Существует несколько методов построения первоначального опорного плана ТЗ (опорный план - план, удовлетворяющий системе ограничений и условию не отрицательности).

Рассмотрим только два из них: метод северо-западного угла и метод наименьшей стоимости.

Как уже отмечалось, в опорном плане не более  $r = m + n - 1$  переменных  $x_{ij}$ , отличных от нуля. Если таких переменных равно  $r$ , то такой план называют невырожденным, в противном случае – вырожденным.

**Метод северо-западного угла.** Назначение перевозок начинаем с левой верхней клетки (северо-западный угол). Сравнивая ресурсы поставщика и потребности потребителя, назначаем максимально возможную перевозку. Если ресурсов поставщика недостаточно, то переходим к следующему поставщику. Если ресурсов у поставщика достаточно, то назначив нужную перевозку первому потребителю, переходим к следующему потребителю. При назначении перевозок для удобства записываем остаток ресурсов (потребностей); если ресурсы закончились или потребности удовлетворены, то ставим букву "к" (конец). Если при назначении перевозки одновременно закончились запасы ресурсов у поставщика и удовлетворены потребности потребителя, то из "игры" выводим только одного участника, другому оставляем нуль запасов или нуль потребностей.

**Метод наименьшей стоимости.** Выбираем клетку с наименьшей тарифной ставкой и назначаем максимально возможную перевозку. Если запасы закончились или потребности удовлетворены, то поставщика или потребителя исключаем. Среди оставшихся клеток снова выбираем клетку с наименьшей стоимостью и назначаем максимально возможную перевозку. Если в результате назначения перевозки закончились запасы поставщика или удовлетворены потребности потребителя, то его исключаем из дальнейшего рассмотрения.

**Метод потенциалов построения оптимального плана.** Наиболее простым методом решения ТЗ является метод потенциалов. Потенциалами называются условные числа  $u_i$ ,  $v_j$  приписанные определенным образом каждому поставщику и потребителю.

**Замечание.** Опорный план должен быть невырожденным.

**Алгоритм решения транспортной задачи:**

1. Строим начальные планы методом северо-западного угла и наименьшей стоимости, из них выбираем лучший.
2. Находим потенциалы поставщиков и потребителей, используя первое условие оптимальности плана:  $u_i + v_j = c_{ij}$ .
3. Проверяем второе условие оптимальности плана для свободных клеток  $u_i + v_j \leq c_{ij}$ . Если оно выполнено, то план оптимален. Если не выполнено, то улучшаем план.
4. Улучшение плана.
  - а) при невыполнении второго условия оптимальности плана в клетку заносим нарушение  $u_i + v_j - c_{ij}$  со знаком «+». Такие клетки называются потенциальными;
  - б) среди всех потенциальных клеток выбираем клетку с наибольшим нарушением;
  - в) строим для выбранной клетки замкнутый контур, состоящий из вертикальных и горизонтальных отрезков прямой, причем вершины контура лежат в занятых клетках, за исключением той клетки, для которой строится контур. Виды контуров приведены на рисунке 1:



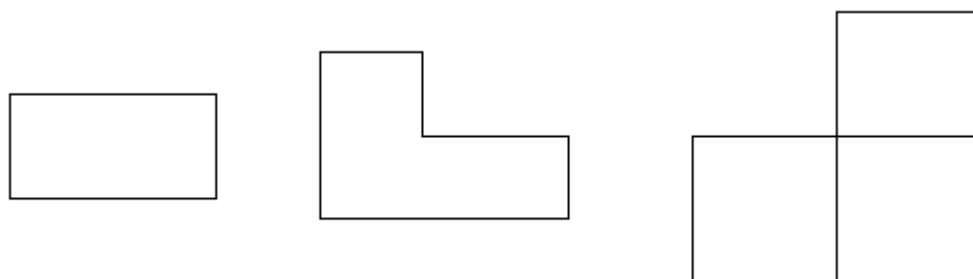


Рис. 1. Виды контуров

- д) вершины контура поочередно помечаем, знаками "+", "-", начиная с клетки, для которой построен контур;
- е) среди клеток, помеченных знаком "-", выбираем наименьшую перевозку. На эту величину увеличиваем перевозки в клетках, помеченных знаком "+", и уменьшаем в клетках, помеченных знаком "-". В результате переназначения перевозок освобождается одна клетка.
5. Вновь полученный план проверяем на оптимальность.

### Содержание работы:

**Задание 1:** Имеются три пункта поставки однородного груза  $A_1, A_2, A_3$  и пять пунктов  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$  потребления этого груза. На пунктах  $A_1, A_2, A_3$  находится груз соответственно в количестве  $a_1, a_2, a_3$  тонн. В пунктах  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$  требуется доставить соответственно  $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$  тонн груза. Расстояние между пунктами поставки и пунктами потребления приведено в таблице:

Пункты поставки	Пункты потребления				
	B1	B2	B3	B4	B5
A1	D11	D12	D13	D14	D15
A2	D21	D22	D23	D24	D25
A3	D31	D32	D33	D34	D35

Найти такой план закрепления потребителей за поставщиками однородного груза, чтобы общие затраты по перевозкам были минимальными.

$a_1=200, a_2=250, a_3=200, b_1=190, b_2=100, b_3=120, b_4=110, b_5=130$ .

$$D = \begin{pmatrix} 28 & 27 & 18 & 27 & 24 \\ 18 & 26 & 27 & 32 & 21 \\ 27 & 33 & 23 & 31 & 34 \end{pmatrix}$$

### Решение.

1. Построим начальный план двумя методами: методом северо-западного угла и методом наименьшей стоимости, и выберем тот план, который будет наилучшим, то есть получим минимальные затраты за перевозку однородного груза.

А) Строим начальный план методом северо-западного угла. Составим таблицу значений:

Потребители Поставщики	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы
A1	28 190	27 10	18	27	24	200, 10, к
A2	18	26 90	27 120	32 40	21	250, 160, 40, к
A3	27	33	23	31 70	34 130	200, 130, к
Потребности	190, к	100, 90, к	120, к	110, 70, к	130, к	650=650

Число назначенных перевозок  $m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$ , т.е. начальный план  $x_{11} = 190$ ,  $x_{12} = 10$ ,  $x_{22} = 90$ ,  $x_{23} = 120$ ,  $x_{24} = 40$ ,  $x_{34} = 70$ ,  $x_{35} = 130$  невырожденный.

При таком плане суммарные транспортные издержки равны:  $F = 28 \cdot 190 + 27 \cdot 10 + 26 \cdot 90 + 27 \cdot 120 + 32 \cdot 40 + 31 \cdot 70 + 34 \cdot 130 = 5320 + 270 + 2340 + 3240 + 1280 + 2170 + 4420 = 19040$  (единиц)

Б) Строим начальный план методом наименьшей стоимости. Составим таблицу значений:

Потребители Поставщики	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы
A1	28	27 10	18 120	27	24 70	200, 80, 10, к
A2	18	26	27	32	21	250, 60, к
	190				60	
A3	27	33 90	23	31 110	34	200, 90, к
Потребности	190, к	100, 90, к	120, к	110, к	130, 70, к	650=650

Начальный план:  $x_{12} = 10$ ,  $x_{13} = 120$ ,  $x_{15} = 70$ ,  $x_{21} = 190$ ,  $x_{25} = 60$ ,  $x_{32} = 90$ ,  $x_{34} = 110$ . При таком плане транспортные издержки  $F = 27 \cdot 10 + 18 \cdot 120 + 24 \cdot 70 + 18 \cdot 190 + 21 \cdot 60 + 33 \cdot 90 + 31 \cdot 110 = 270 + 2160 + 1680 + 3420 + 1260 + 2970 + 3410 = 15170$  (единиц).

Сравнивая транспортные издержки, видим, что план, построенный методом наименьшей стоимости, лучший.

2. Выбираем лучший план и находим потенциалы поставщиков и потребителей, используя первое условие оптимальности плана:  $u_i + v_j = c_{ij}$ .

Потребители $v_j$ Поставщики $u_i$		21	27	18	25	24
		B1	B2	B3	B4	B5
0	A1	28	27 10	18 120	27	24 70
-3	A2	18 190	26	27	32	21 60
6	A3	27	33 90	23 +1	31 110	34

Используя первое условие оптимальности плана, составим систему линейных уравнений для определения потенциалов:

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 27 \\ u_1 + v_3 = 18 \\ u_1 + v_5 = 24 \\ u_2 + v_1 = 18 \\ u_2 + v_5 = 21 \\ u_3 + v_2 = 33 \\ u_3 + v_4 = 31 \end{cases}$$

Система линейных уравнений содержит 7 уравнений и 8 неизвестных, т.е. она имеет множество решений. Так как нужно одно решение, то любой из неизвестных задаем значение и вычисляем остальные неизвестные.

Пусть  $u_1 = 0$ , тогда  $u_2 = -3$ ,  $u_3 = 6$ ,  $v_1 = 21$ ,  $v_2 = 27$ ,  $v_3 = 18$ ,  $v_4 = 25$ ,  $v_5 = 24$

3. Проверяем второе условие оптимальности плана для свободных клеток  $u_i + v_j \leq c_{ij}$ . Если есть нарушения, то заносим их со знаком «+». В результате проверки получили одну потенциальную клетку. Таким образом, начальный план не оптимален.

4. Улучшение план. Выбираем клетку с максимальным нарушением и для нее строим замкнутый контур.

Потребители, $v_j$ Поставщики, $u_i$						
		B1	B2	B3	B4	B5
	A1	28	27 + 10	18 - 120	27	24 70
	A2	18	26	27	32	21
		190				60
	A3	27	33 - 90	23 +1	31 110	34

Среди клеток, помеченных знаком «-», выбираем наименьшую перевозку:  $q = \min(90, 120) = 90$ .

На эту величину увеличиваем перевозки в клетках, помеченных знаком «+», и уменьшаем в клетках, помеченных знаком «-». В результате переназначения перевозок имеем план:

Потребители, $v_j$ Поставщики, $u_i$		21	27	18	26	24
		B1	B2	B3	B4	B5
0	A1	28	27 100	18 30	27	24 70
-3	A2	18 190	26	27	32	21 60
5	A3	27	33	23 90	31 110	34

Используя первое условие оптимальности плана, составим систему линейных уравнений для определения потенциалов:

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 27 \\ u_1 + v_3 = 18 \\ u_1 + v_5 = 24 \\ u_2 + v_1 = 18 \\ u_2 + v_5 = 21 \\ u_3 + v_3 = 23 \\ u_3 + v_4 = 31 \end{cases}$$

Система линейных уравнений содержит 7 уравнений и 8 неизвестных, т.е. она имеет множество решений. Так как нужно одно решение, то любой из неизвестных задаем значение и вычисляем остальные неизвестные.

Пусть  $u_1 = 0$ , тогда  $u_2 = -3$ ,  $u_3 = 5$ ,  $v_1 = 21$ ,  $v_2 = 27$ ,  $v_3 = 18$ ,  $v_4 = 26$ ,  $v_5 = 24$ . Проверяем второе условие оптимальности плана для свободных клеток  $u_i + v_j \leq c_{ij}$ . Условие оптимальности выполнены, следовательно, план, соответствующий таблице, оптимален.

$x_{12} = 10, x_{13} = 30, x_{15} = 70, x_{21} = 190, x_{25} = 60, x_{33} = 90, x_{34} = 110.$   $F = 27 \cdot 100 + 18 \cdot 30 + 24 \cdot 70 + 18 \cdot 190 + 21 \cdot 60 + 23 \cdot 90 + 31 \cdot 110 = 2700 + 540 + 1680 + 3420 + 1260 + 2070 + 3410 = 15080$  (единиц)

Ответ: Сравнивая три метода нахождения оптимального плана, делаем вывод, что метод потенциалов находит оптимальный план решения транспортной задачи, так как получили минимальные транспортные издержки равные 15080 единиц.

**Задание 2:** Имеются три пункта поставки однородного груза  $A_1, A_2, A_3$  и пять пунктов  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$  потребления этого груза. На пунктах  $A_1, A_2, A_3$  находится груз соответственно в количестве  $a_1, a_2, a_3$  тонн. В пунктах  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$  требуется доставить соответственно  $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$  тонн груза. Расстояние между пунктами поставки и пунктами потребления приведено в таблице:

Пункты поставки	Пункты потребления				
	B1	B2	B3	B4	B5
A1	D11	D12	D13	D14	D15
A2	D21	D22	D23	D24	D25
A3	D31	D32	D33	D34	D35

Найти такой план закрепления потребителей за поставщиками однородного груза, чтобы общие затраты по перевозкам были минимальными.

$a_1=200, a_2=350, a_3=300, b_1=270, b_2=130, b_3=190, b_4=150, b_5=110.$

$$D = \begin{pmatrix} 24 & 50 & 55 & 27 & 16 \\ 50 & 47 & 23 & 17 & 21 \\ 35 & 59 & 55 & 27 & 41 \end{pmatrix}$$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4

### Тема: Задача о распределении средств между предприятиями. Задача о замене оборудования

**Цель работы:** научить решать простейшие задачи методом динамического программирования; научить решать задачи динамического программирования, научиться разбивать весь процесс решения задачи на этапы, научиться выбирать оптимальную стратегию поведения.

**Оборудование:** ПК, программное обеспечение – MS Word, инструкции по выполнению работы.

#### Справочный материал:

Динамическое программирование – метод оптимизации, приспособленный, к задачам, в которых процесс принятия решения может быть разбит на отдельные этапы (шаги). Такие задачи называются многошаговыми.

Характерные особенности задач динамического программирования:

- 1) Неоднозначность решения.
- 2) Возможность деления вычислительного процесса на этапы.
- 3) Общий критерий – сумма частных критериев на этапах.

Динамическое программирование позволяет осуществлять оптимальное планирование многошаговых процессов, зависящих от времени. Процесс называется управляемым, если можно влиять на ход его развития. Управлением называется совокупность решений, принимаемых на каждом этапе для влияния на ход процесса. Началом этапа (шага) управляемого процесса считается момент принятия решения. Планируя многошаговый процесс, исходя из интересов всего процесса в целом, всегда необходимо иметь в виду конечную цель.

Метод динамического программирования состоит в том, что оптимальное управление строится постепенно. На каждом этапе оптимизируется управление только этого этапа, причем управление выбирается с учетом последствий, т.е. оптимальное управление для данного этапа должно учитывать весь последующий ход процесса, для чего необходимо знать все управления на последующих этапах. Поскольку процесс заканчивается на последнем этапе, оптимальное решение не должно учитывать последующего управления. Таким образом, процесс вычисления протекает в обратном направлении, от конца к началу.

#### Содержание работы:

**Задание 1.** Двум предприятиям А и В на 4 квартала выделено  $S_0 = 1000$  единиц средств. Каждый квартал предприятие А получает  $x$  средств, предприятие В –  $y$  средств. При этом от выделенных средств предприятие А получает  $5x$  единиц и остаток средств  $0,3x$  единиц, а предприятие В – доход  $4y$  единиц и остаток выделенных средств  $0,5y$  единиц. Необходимо распределить средства между предприятиями поквартально таким образом, чтобы за весь год оба предприятия получили максимальный доход.

**Решение.** Период времени 1 год разделим на 4 квартала (4 этапа). Введем обозначения: через  $x_i$ ,  $y_i$  обозначим вклад в развитие предприятий А

и В в 1-м квартале,  $W_i$  – доход за  $i$ -ый квартал,  $S_i$  – остаток средств на конец  $i$ -го квартала,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

№	Состояние	Вклад		Доход	Остаток
		А	В		
1	$S_0 - S_1$	$x_1$	$y_1$	$W_1$	$S_1$
2	$S_1 - S_2$	$x_2$	$y_2$	$W_2$	$S_2$
3	$S_2 - S_3$	$x_3$	$y_3$	$W_3$	$S_3$
4	$S_3 - S_4$	$x_4$	$y_4$	$W_4$	$S_4$

С учетом введенных обозначений составим подробную таблицу по этапам.

Предприятие	1 квартал			2 квартал			3 квартал			4 квартал	
	ВКЛАД	ДОХОД	ОСТАТОК	ВКЛАД	ДОХОД	ОСТАТОК	ВКЛАД	ДОХОД	ОСТАТОК	ВКЛАД	ДОХОД
А	$x_1$	$5x_1$	$0,3x_1$	$x_2$	$5x_2$	$0,3x_2$	$x_3$	$5x_3$	$0,3x_3$	$x_4$	$5x_4$
В	$y_1$	$4y_1$	$0,5y_1$	$y_2$	$4y_2$	$0,5y_2$	$y_3$	$4y_3$	$0,5y_3$	$y_4$	$4y_4$
	$S_0 = x_1 + y_1$	$W_1 = 5x_1 + 4y_1$	$S_1 = 0,3x_1 + 0,5y_1$	$S_1 = x_2 + y_2$	$W_2 = 5x_2 + 4y_2$	$S_2 = 0,3x_2 + 0,5y_2$	$S_2 = x_3 + y_3$	$W_3 = 5x_3 + 4y_3$	$S_3 = 0,3x_3 + 0,5y_3$	$S_3 = x_4 + y_4$	$W_4 = 5x_4 + 4y_4$

Отыскание оптимального управления начнем с 4 квартала.

$$W_4^* = \max W_4 = \max(5x_4 + 4y_4) = \left\{ \begin{array}{l} x_4 + y_4 = S_3, \\ x_4 = S_3 - y_4, S_3 = \text{const} \end{array} \right\} = \max(5(S_3 - y_4) + 4y_4) =$$

$$= \max_{0 \leq y_4 \leq S_3} (5S_3 - y_4) = (5S_3 - y_4) \Big|_{y_4=0} = 5S_3.$$

3 квартал

$$W_{3-4}^* = \max(W_3 + W_4^*) = \max(5x_3 + 4y_3 + 5S_3) = \left\{ \begin{array}{l} x_3 + y_3 = S_2, \quad x_3 = S_2 - y_3, \quad S_3 = 0,3x_3 + \\ + 0,5y_3 = 0,3S_2 - 0,3y_3 + 0,5y_3 = 0,3S_2 + 0,2y_3, \\ S_2 = \text{const} \end{array} \right\} =$$

$$= \max_{0 \leq y_3 \leq S_2} (5S_2 - 5y_3 + 4y_3 + 1,5S_2 + y_3) = \max_{0 \leq y_3 \leq S_2} (6,5S_2) = 6,5S_2.$$

Так как максимум дохода за 3-4 кварталы постоянен при любом распределении средств, то пусть  $x_3 = S_2/2$ ,  $y_3 = S_2/2$ .

2 квартал

$$W_{2-4}^* = \max(W_2 + W_{3-4}^*) = \max(5x_2 + 4y_2 + 6,5S_2) = \left\{ \begin{array}{l} x_2 + y_2 = S_1, \quad x_2 = S_1 - y_2, \quad S_2 = 0,3x_2 + \\ + 0,5y_2 = 0,3S_1 - 0,3y_2 + 0,5y_2 = 0,3S_1 + 0,2y_2, \\ S_1 = \text{const} \end{array} \right\} =$$

$$= \max_{0 \leq y_2 \leq S_1} (5S_1 - 5y_2 + 4y_2 + 1,95S_1 + 1,3y_2) = \max_{0 \leq y_2 \leq S_1} (6,95S_1 + 0,3y_2) = (6,95S_1 + 0,3y_2) \Big|_{y_2=S_1} = 7,25S_1$$

1 квартал

$$W_{1-4}^* = \max(W_1 + W_{2-4}^*) = \max(5x_1 + 4y_1 + 7,25S_1) = \left\{ \begin{array}{l} x_1 + y_1 = S_0, \quad x_1 = S_0 - y_1, \quad S_1 = 0,3x_1 + \\ + 0,5y_1 = 0,3S_0 - 0,3y_1 + 0,5y_1 = 0,3S_0 + 0,2y_1, \\ S_0 = \text{const} \end{array} \right\} =$$

$$= \max_{0 \leq y_1 \leq S_0} (5S_0 - 5y_1 + 4y_1 + 2,175S_0 + 1,45y_1) = \max_{0 \leq y_1 \leq S_0} (7,175S_0 + 0,45y_1) =$$

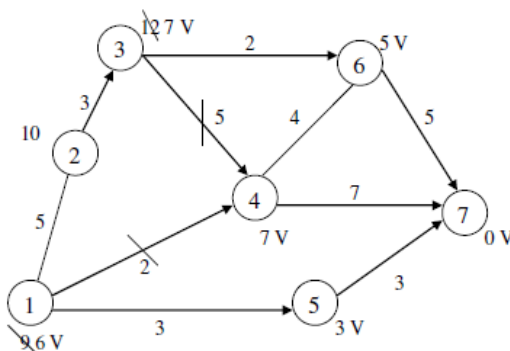
$$(7,175S_0 + 0,45y_1) \Big|_{y_1=S_0} = 7,625S_0$$

По условию задачи  $S_0 = 1000$  единиц,  $W_{1-4}^* = 7625$  единиц, при этом будем иметь следующие распределение средств по кварталам:

Квартал	Распределяемые средства	Вклады	
		A	B
1	$S_0 = 1000$	$x_1^* = 0$	$y_1^* = 1000$
2	$S_1 = 0,3x_1^* + 0,5y_1^* = 500$	$x_2^* = 0$	$y_2^* = 500$
3	$S_2 = 0,3x_2^* + 0,5y_2^* = 250$	$x_3^* = 125$	$y_3^* = 125$
4	$S_3 = 0,3x_3^* + 0,5y_3^* = 100$	$x_4^* = 100$	$y_4^* = 0$

**Задание 2.** Дана сеть, состоящая из 7 точек, и известны расстояния между точками. Необходимо определить кратчайшее расстояние от любой точки до точки 7.

Решение.



1. Рассмотрим точку 7. Рядом с кружком ставим 0 характеристику этой точки.
2. Соседними с точкой 7 являются точки 6,5,4. Подсчитаем характеристики этих точек и укажем направления. Точку 7 отмечаем символом V, т.к. операции на ней закончены.
3. Рассмотрим точку 4. Соседними с ней будут точки 6,3,1,7. Находим характеристики каждой из них. Характеристики точек 1 и 3 – соответственно 9 и 12. Характеристики точек 6,7 остались без изменения, так как  $7+4=11>5$ ,  $7+7=14>0$ . Точку 4 отметим символом V. Рассмотрим точку 6. Соседними являются точки 3,4,7. Для точки 3 новая характеристика  $5+2=7>12$ , поэтому изменяем старую характеристику 12 на 7, и указываем новое направление. Для точек 4,7 старые характеристики остаются без изменений, т.к.  $5+4=9>7$ ,  $5+5=10>0$ . Точку 6 отмечаем знаком V. Рассмотрим точку 5. Соседняя с ней точка 1. Новая характеристика  $3+3=6<9$ , поэтому изменяем характеристику и направление. Точку 5 отмечаем символом V. Точка 1, характеристика которой изменилась, является соседней с точкой 4. Точка 4 отмечена символом V, поэтому пересчитываем характеристику этой точки и проверяем соседние с ней:  $7+5=12>7$ ;  $7+4=11>5$ ;  $7+7=14>0$ . Характеристики точек 3,6,7 остаются без изменений.
4. Рассмотрим точку 3. Соседними являются точки 2,4,6. Характеристика 2:  $7+3=10$ , записываем эту характеристику и указываем направление. Характеристики 6,4 остались без изменения. Точку 3 отмечаем символом V.

5. Рассмотрим точку 2. Соседними являются точки 1 и 3. Характеристики точек не изменяются, т.к.  $10+5=15>6$ ,  $10+3=13>7$ . Точку 2 отмечаем символом V.

6. Рассмотрим точку 1. Соседними являются точки 2,4,5. Характеристики точек не изменились, т.к.  $6+5=11>10$ ,  $6+2=8>4$ ,  $6+3=9>3$ . Операции над всеми точками закончены. Ответ запишем в виде таблицы.

Номера точек, между которыми рассчитывается расстояние	Кратчайшее расстояние	Маршрут, по которому проходит кратчайшее расстояние
1-7	6	1-5-7
2-7	10	2-3-6-7
3-7	7	3-6-7
4-7	7	4-7
5-7	3	5-7
6-7	5	6-7
7-7	0	

**Задание 3. Оптимальное распределение ресурсов.** Капитал 40 млн. руб. инвестор должен вложить в четыре инвестиционных проекта так, чтобы получить максимальный доход. Доходность проектов дана в таблице (вложения кратны 8 млн. руб.)

u	Прибыль от внедрения			
	f4(u)	f3(u)	f2(u)	f1(u)
8	<u>55</u>	<u>39</u>	35	32
16	58	53	76	68
24	90	80	<u>120</u>	115
32	100	120	135	134
40	140	145	158	147

Решение:

Это задача динамического программирования. Решение состоит из двух этапов. На первом этапе (от конца к началу) ищем условное оптимальное решение, на втором (от начала к концу) – ищем оптимальное решение задачи.

**1 этап.** Распределяем капитал между четырьмя проектами и считаем получаемую прибыль  $L(i)$ ,  $i=8, 16, 24, 32, 40$ .

**1 шаг:** Денежные средства вкладываются в четвертый проект.  $L(8)=55$ ,  $L(16)=58$ ,  $L(24)=90$ ,  $L(32)=100$ ,  $L(40)=140$ .

**2 шаг:** Денежные средства вкладываются в четвертый и третий проекты

u	Прибыль от внедрения	
	1 шаг	f3(u)
8	<u>55</u>	<u>39</u>
16	58	53
24	90	80
32	100	120
40	140	145



$$L(8) = \max_{\substack{8+0 \\ 0+8}} \{55; 39\} = 55$$

$$L(16) = \max_{\substack{16+0 \\ 8+8 \\ 0+16}} \{58; 55+39; 53\} = \max\{58; 94; 53\} = 94$$

$$L(24) = \max_{\substack{24+0 \\ 16+8 \\ 8+16 \\ 0+24}} \{90; 58+39; 55+53; 80\} = \max\{90; 97; 108; 80\} = 108$$

$$L(32) = \max_{\substack{32+0 \\ 24+8 \\ 16+16 \\ 8+24 \\ 0+32}} \{100; 90+39; 58+53; 55+80; 120\} = \max\{100; 129; 111; 135; 120\} = 135$$

$$L(40) = \max_{\substack{40+0 \\ 32+8 \\ 24+16 \\ 16+24 \\ 8+32 \\ 0+40}} \{140; 100+39; 90+53; 58+80; 55+120; 145\} = \max\{140; 139; 143; 138; 175; 145\} = 175$$

**3 шаг:** Денежные средства вкладываются в четвертый, третий (2 шаг) и второй проекты.

u	Прибыль от внедрения	
	2 шаг	f2(u)
8	55	35
16	<b>94</b>	76
24	108	<b>120</b>
32	135	135
40	175	158

$$L(8) = \max_{\substack{8+0 \\ 0+8}} \{55; 35\} = 55$$

$$L(16) = \max_{\substack{16+0 \\ 8+8 \\ 0+16}} \{94; 55+35; 76\} = \max\{94; 90; 76\} = 94$$

$$L(24) = \max_{\substack{24+0 \\ 16+8 \\ 8+16 \\ 0+24}} \{108; 94+35; 55+76; 120\} = \max\{108; 129; 131; 120\} = 131$$

$$L(32) = \max_{\substack{32+0 \\ 24+8 \\ 16+16 \\ 8+24 \\ 0+32}} \{135; 108+35; 94+76; 55+120; 135\} = \max\{135; 143; 170; 175; 135\} = 175$$

$$L(40) = \max_{\substack{40+0 \\ 32+8 \\ 24+16 \\ 16+24 \\ 8+32 \\ 0+40}} \{175; 135+35; 108+76; 94+120; 55+135; 158\} = \max\{175; 170; 184; 214; 190; 158\} = 214$$

**4 шаг:** Денежные средства вкладываются в четвертый, третий, второй (3 шаг) и первый проекты.

u	Прибыль от внедрения	
	3 шаг	f1(u)
8	55	32
16	94	68
24	131	115
32	175	134
40	<b>214</b>	147

$$L(8) = \max_{\substack{8+0 \\ 0+8}} \{55; 32\} = 55$$

$$L(16) = \max_{\substack{16+0 \\ 8+8 \\ 0+16}} \{94; 55+32; 68\} = \max\{94; 87; 68\} = 94$$

$$L(24) = \max_{\substack{24+0 \\ 16+8 \\ 8+16 \\ 0+24}} \{131; 94+32; 55+68; 115\} = \max\{131; 126; 123; 115\} = 131$$

$$L(32) = \max_{\substack{32+0 \\ 24+8 \\ 16+16 \\ 8+24 \\ 0+32}} \{175; 131+32; 94+68; 55+115; 134\} = \max\{175; 163; 162; 170; 134\} = 175$$

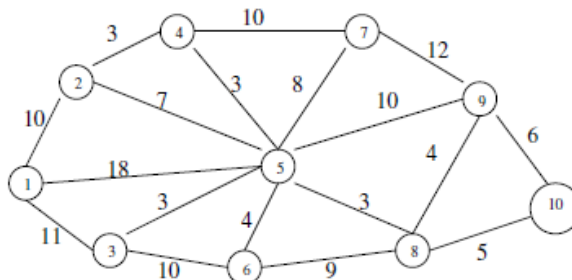
$$L(40) = \max_{\substack{40+0 \\ 32+8 \\ 24+16 \\ 16+24 \\ 8+32 \\ 0+40}} \{214; 175+32; 131+68; 94+115; 55+134; 147\} = \max\{214; 207; 199; 209; 189; 147\} = 214$$

**2 этап:** На четвертом шаге выбираем максимальное из полученных значений прибыли  $L(40)=214$ . И возвращаясь в обратном порядке от таблицы к таблице (от 4 шага к 1) выбираем такие значения доходов, при которых и получено значение 214. Максимальный доход 214 млн. руб. от вложенных средств может быть получен при следующем распределении средств:

- 1 проект – 0 млн. руб.
- 2 проект – 24 млн. руб.
- 3 проект – 8 млн. руб.
- 4 проект – 8 млн. руб.

**Задание 4.** Планируется работа двух отраслей производства А и В на 4 года. Количество  $x$  средств, вложенных в отрасль А, позволяет получить доход  $2x$  и уменьшается до  $0,6x$ . Количество  $y$  средств, вложенных в отрасль В, позволяет получить доход  $3y$  и уменьшается до  $0,2y$ . Необходимо распределить выделенные ресурсы в количестве  $S_0 = 850$  единиц между отраслями по годам планируемого периода для получения максимальной прибыли за весь период.

**Задание 5.** По заданной схеме, соединяющей 10 точек, найти кратчайшее расстояние от 1 точки до 10.

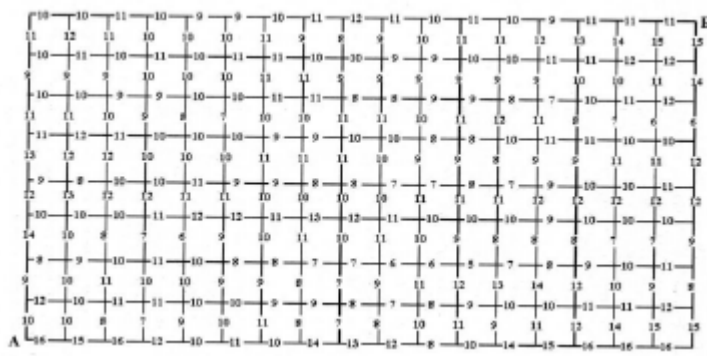


**Задание 6.** Распределите оптимальным образом денежные средства инвестора величиной 5 у.е. между четырьмя предприятиями. Доход каждого предприятия от вложения в него  $u$  у.е. определяется функцией дохода  $f(u)$ . Эти функции приведены в таблице.

u	Прибыль от внедрения по предприятиям			
	$f_4(u)$	$f_3(u)$	$f_2(u)$	$f_1(u)$
1	$f_4(1)$	6	3	4
2	10	$f_3(2)$	4	6
3	11	11	$f_2(3)$	8
4	12	13	11	$f_1(4)$
5	18	15	18	16

Вариант	1	2	3	4
$f_4(1)$	9	5	6	8
$f_3(2)$	10	10	7	7
$f_2(3)$	7	5	8	9
$f_1(4)$	10	9	13	15

**Задание 7.** Из пункта А в пункт В необходимо проложить автомобильную трассу по самому экономичному пути.



## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5

### Тема: Составление систем уравнений Колмогорова. Нахождение финальных вероятностей. Нахождение характеристик простейших систем массового обслуживания

**Цель работы:** отработать и закрепить умения составлять системы уравнений Колмогорова, отработать и закрепить умения находить финальные вероятности, отработать и закрепить умения определить основные показатели СМО.

**Оборудование:** ПК, программное обеспечение – MS Word, инструкции по выполнению работы.

#### Справочный материал:

**Марковский случайный процесс.** Построение математических моделей в условиях неопределенности - очень сложная или невыполнимая задача. Лишь для некоторых упрощенных случаев можно построить математическую модель.

Следует различать два вида неопределенности:

1. вероятностные характеристики либо известны, либо могут быть получены в результате эксперимента. Такая неопределенность называется стохастической, и для большинства объектов, содержащих такую неопределенность, можно построить математическую модель, например выход из строя оборудования, приход нового клиента и т. д.

2. вероятностные характеристики определить невозможно. В этом случае задачу можно попытаться решить с помощью экспертных оценок, но результат будет весьма приблизительным, например, каковы будут модели женской одежды через пять лет?

Строгую математическую модель с аналитическим вычислением всех интересующих величин можно построить только в том случае, если случайный процесс носит марковский характер.

Случайный процесс будет марковским, если вероятностные характеристики процесса в момент времени  $t$  зависят только от текущего (настоящего) состояния процесса в этот момент времени  $t$  и не зависят от того, как (каким способом и когда) рассматриваемый процесс перешел в текущее состояние.

Под дискретным состоянием будем понимать, что процесс переходит из одного состояния в другое скачкообразно за очень короткое время (практически мгновенно), и количество этих состояний известно (фиксировано).

Под непрерывным временем будем понимать такое, при котором переход из одного допустимого состояния в другое допустимое состояние происходит в произвольные моменты времени, т. е. заранее не определенные.

**Потоки событий.** Однородные события, следующие друг за другом в произвольные моменты времени (случайно), называются потоком событий (или входным потоком заявок). Примерами потоков событий могут быть: поток пассажиров в авиакассе, поток посетителей парикмахерской, поток отказов технического устройства и т.д. Здесь под событием понимается факт

поступления заявок на обработку (приход покупателя, наличие отказа технического средства, поступление телефонного вызова и т.д.), а не результат его обработки.

Интенсивностью  $\lambda$  потока событий называется среднее число событий за единицу времени. Интенсивность  $\lambda$  может быть как числом постоянным (константой), так и величиной, зависящей от времени  $t$ . Например, количество пассажиров в городском транспорте в «часы пик» резко увеличивается по сравнению с другим временем суток.

**Пример 1:** Техническое устройство состоит из трех узлов и в любой момент времени может находиться в одном из восьми состояний (рис. 1).

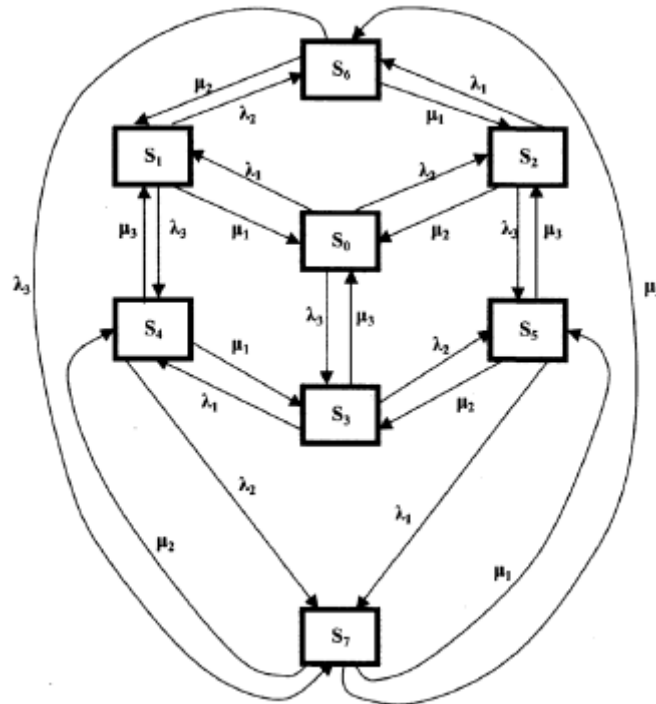


Рис.1. Состояния технического устройства

Возможные состояния устройства таковы:

- $S_0$  — все три узла исправны;
- $S_1$  — первый узел неисправен, второй и третий исправны;
- $S_2$  — второй узел неисправен, первый и третий исправны;
- $S_3$  — третий узел неисправен, первый и второй исправны;
- $S_4$  — первый и третий узлы неисправны, второй исправен;
- $S_5$  — второй и третий узлы неисправны, первый исправен;
- $S_6$  — первый и второй узлы неисправны, третий исправен;
- $S_7$  — все три узла неисправны.

Размеченным графом будем считать такой граф, у которого стрелками указаны переходы из одного состояния в другое, а рядом со стрелкой указана интенсивность перехода. Будем различать две интенсивности — прямую  $\lambda$ , и обратную  $\mu$ . Тогда  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — интенсивности потоков отказов соответственно первого, второго и третьего узлов, а  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  — соответственно интенсивности потоков возвратов (ремонт) узлов.

Если для ремонта каждого узла имеется отдельный специалист, то среднее время ремонта каждого узла есть величина постоянная и не имеет значения, один или несколько узлов вышли из строя.

На основе построенного размеченного графа (см. рис. 1) создадим математическую модель.

Наше техническое устройство в соответствии с построенным графом в любой момент времени будет находиться в одном из восьми возможных состояний. Обозначим вероятность каждого  $i$ -го состояния как  $p_i(t)$ , тогда

$$\sum_{i=1}^8 p_i(t) = 1.$$

Для определения вероятности каждого состояния технического устройства составим соответствующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{cases} \frac{d p_1(t)}{dt} = \lambda_1 p_0 + \mu_3 p_4 + \mu_2 p_6 - (\mu_1 + \lambda_2 + \lambda_3) p_1 \\ \frac{d p_2(t)}{dt} = \lambda_2 p_0 + \mu_3 p_5 + \mu_1 p_6 - (\mu_2 + \lambda_1 + \lambda_3) p_2 \\ \frac{d p_3(t)}{dt} = \lambda_3 p_0 + \mu_2 p_5 + \mu_1 p_4 - (\mu_3 + \lambda_1 + \lambda_2) p_3; \\ \frac{d p_4(t)}{dt} = \lambda_1 p_3 + \lambda_3 p_1 + \mu_2 p_7 - (\mu_1 + \mu_3 + \lambda_2) p_4; \\ \frac{d p_5(t)}{dt} = \mu_1 p_7 + \lambda_2 p_3 + \lambda_3 p_2 - (\lambda_1 + \mu_2 + \mu_3) p_5; \\ \frac{d p_6(t)}{dt} = \lambda_1 p_2 + \lambda_2 p_1 + \mu_3 p_7 - (\mu_1 + \mu_2 + \lambda_3) p_6; \\ \frac{d p_7(t)}{dt} = \lambda_1 p_5 + \lambda_2 p_4 + \lambda_3 p_6 - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) p_7; \\ \frac{d p_8(t)}{dt} = \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 + \mu_3 p_3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) p_8. \end{cases}$$

Эта система дифференциальных уравнений называется *системой уравнений Колмогорова*. Имеем систему из восьми линейных дифференциальных уравнений с восемью неизвестными. Известно, что сумма всех вероятностей равна единице, т. е.  $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 = 1$ . Таким образом, любое из уравнений, входящее в систему уравнений, можно записать, используя последнее уравнение, и найти значения вероятностей для каждого события.

Решение системы уравнений Колмогорова:

Зададим численные значения интенсивности потоков событий для примера 1:  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1; \mu_1 = 2, \mu_2 = 4, \mu_3 = 2$ .

Приравняем левые части уравнений системы нулю.

$$\begin{cases} 0 = \lambda_1 p_0 + \mu_3 p_4 + \mu_2 p_6 - (\mu_1 + \lambda_2 + \lambda_3) p_1; \\ 0 = \lambda_2 p_0 + \mu_3 p_5 + \mu_1 p_6 - (\mu_2 + \lambda_1 + \lambda_3) p_2; \\ 0 = \lambda_3 p_0 + \mu_2 p_5 + \mu_1 p_4 - (\mu_3 + \lambda_1 + \lambda_2) p_3; \\ 0 = \lambda_1 p_3 + \lambda_3 p_1 + \mu_2 p_7 - (\mu_1 + \mu_3 + \lambda_2) p_4; \\ 0 = \mu_1 p_7 + \lambda_2 p_3 + \lambda_3 p_2 - (\lambda_1 + \mu_2 + \mu_3) p_5; \\ 0 = \lambda_1 p_2 + \lambda_2 p_1 + \mu_3 p_7 - (\mu_1 + \mu_2 + \lambda_3) p_6; \\ 0 = \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 + \mu_3 p_3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) p_8; \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8 = 1. \end{cases}$$

Второй (отрицательный) член каждого выражения перенесем в левую часть

$$\begin{cases} p_1(\mu_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = \lambda_1 p_0 + \mu_3 p_4 + \mu_2 p_6; \\ p_2(\mu_2 + \lambda_1 + \lambda_3) = \lambda_2 p_0 + \mu_3 p_5 + \mu_1 p_6; \\ p_3(\mu_3 + \lambda_1 + \lambda_2) = \lambda_3 p_0 + \mu_2 p_5 + \mu_1 p_4; \\ p_4(\mu_1 + \mu_3 + \lambda_2) = \lambda_4 p_3 + \lambda_3 p_1 + \mu_2 p_7; \\ p_5(\lambda_1 + \mu_2 + \mu_3) = \mu_1 p_7 + \lambda_2 p_3 + \lambda_3 p_2; \\ p_6(\mu_1 + \mu_2 + \lambda_3) = \lambda_4 p_2 + \lambda_2 p_1 + \mu_3 p_7; \\ p_0(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 + \mu_3 p_3; \\ p_7 = 1 - p_0 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5 - p_6. \end{cases}$$

Подставим конкретные значения (указанные выше) прямых и обратных интенсивностей

$$\begin{cases} p_1(2 + 2 + 1) = 1p_0 + 2p_4 + 4p_6; \\ p_2(4 + 1 + 1) = 2p_0 + 2p_5 + 2p_6; \\ p_3(2 + 1 + 2) = 1p_0 + 4p_5 + 2p_4; \\ p_4(2 + 2 + 2) = 1p_3 + 1p_4 + 4p_6; \\ p_5(1 + 2 + 4) = 2p_7 + 2p_3 + 1p_2; \\ p_6(2 + 4 + 1) = 1p_2 + 2p_1 + 2p_7; \\ p_0(1 + 2 + 1) = 2p_1 + 4p_2 + 2p_3; \\ p_7 = 1 - p_0 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5 - p_6. \end{cases}$$

После выполнения арифметических действий получим:

$$\begin{cases} 5p_1 = p_0 + 2p_4 + 4p_6; \\ 6p_2 = 2p_0 + 2p_5 + 2p_6; \\ 5p_3 = p_0 + 4p_5 + 2p_4; \\ 6p_4 = p_3 + p_1 + 4p_7; \\ 7p_5 = 2p_7 + 2p_3 + p_2; \\ 7p_6 = p_2 + 2p_1 + 2p_7; \\ 4p_0 = 2p_1 + 4p_2 + 2p_3; \\ p_7 = 1 - p_0 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5 - p_6. \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим  $p_1 = \frac{1}{5}p_0 + \frac{2}{5}p_4 + \frac{4}{5}p_6$  и подставим его в остальные уравнения:

$$\begin{cases} 6p_2 = 2p_0 + 2p_5 + 2p_6; \\ 5p_3 = p_0 + 4p_5 + 2p_4; \\ \frac{28}{5}p_4 = p_3 + 4p_7 + \frac{1}{5}p_0 + \frac{4}{5}p_6; \\ 7p_5 = p_2 + 2p_3 + 2p_7; \\ \frac{27}{2}p_6 = \frac{2}{5}p_0 + \frac{4}{5}p_4 + p_2 + 2p_7; \\ \frac{48}{5}p_0 = \frac{4}{5}p_4 + \frac{8}{5}p_6 + 4p_2 + 2p_3; \\ p_7 = 1 - \frac{6}{5}p_0 - p_2 - p_3 - \frac{7}{5}p_4 - p_5 - \frac{9}{5}p_6. \end{cases}$$

Аналогично выражаем  $\rho_2 = \frac{1}{3}p_0 + \frac{1}{3}p_5 + \frac{1}{3}p_6$  и подставляем в оставшиеся уравнения и получаем:

$$\begin{cases} 5p_3 = p_0 + 4p_5 + 2p_4; \\ \frac{28}{5}p_4 = p_3 + 4p_7 + \frac{1}{5}p_0 + \frac{4}{5}p_6; \\ \frac{20}{3}p_5 = \frac{1}{3}p_0 + \frac{1}{3}p_6 + 2p_3 + 2p_7; \\ \frac{79}{6}p_6 = \frac{11}{15}p_0 + \frac{4}{5}p_4 + \frac{1}{3}p_5 + 2p_7; \\ \frac{124}{15}p_0 = 2p_3 + \frac{4}{5}p_4 + \frac{4}{3}p_5 + \frac{44}{15}p_6; \\ p_7 = 1 - \frac{23}{15}p_0 - p_2 - p_3 - \frac{7}{5}p_4 - \frac{4}{3}p_5 - \frac{32}{15}p_6. \end{cases}$$

Выражаем  $\rho_3 = \frac{1}{5}p_0 + \frac{4}{5}p_5 + \frac{2}{5}p_4$  и подставляем в оставшиеся уравнения и получаем:

$$\begin{cases} \frac{26}{5}p_4 = \frac{2}{5}p_0 + \frac{4}{5}p_6 + 4p_7 + \frac{4}{5}p_5; \\ \frac{76}{15}p_5 = \frac{11}{15}p_0 + \frac{1}{3}p_6 + 2p_7 + \frac{4}{5}p_4; \\ \frac{79}{6}p_6 = \frac{11}{15}p_0 + \frac{4}{5}p_4 + \frac{1}{3}p_5 + 2p_7; \\ \frac{20}{30}p_0 = \frac{8}{5}p_4 + \frac{44}{15}p_5 + \frac{44}{15}p_6; \\ p_7 = 1 - \frac{26}{15}p_0 - \frac{9}{5}p_4 - \frac{32}{15}p_5 - \frac{32}{15}p_6. \end{cases}$$

Из первого выражения выразим  $\rho_4 = \frac{1}{13}p_0 + \frac{2}{13}p_5 + \frac{2}{13}p_6 + \frac{10}{13}p_7$  и подставим в оставшиеся уравнения. После выполнения преобразований получим:

$$\begin{cases} \frac{964}{13 \cdot 15}p_5 = \frac{31}{3 \cdot 13}p_0 + \frac{891}{1 \cdot 153}p_6 + \frac{18}{13}p_7; \\ p_6 = \frac{310}{5087}p_0 + \frac{178}{5087}p_5 + \frac{828}{5087}p_7; \\ p_0 = \frac{155}{319}p_5 + \frac{155}{319}p_6 + \frac{60}{319}p_7; \\ p_7 = \frac{13}{11} - \frac{73}{93}p_0 - \frac{94}{93}p_5 - \frac{94}{93}p_6. \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим  $\rho_5 = \frac{155}{964}p_0 + \frac{89}{964}p_6 + \frac{135}{482}p_7$  и подставим в оставшиеся уравнения:

$$\begin{cases} p_6 = \frac{54405}{814671}p_0 + \frac{1414042}{814671}p_7; \\ p_0 = \frac{54405}{94497}p_6 + \frac{33230}{94497}p_7; \\ p_7 = \frac{6266}{19172} - \frac{42471}{57516}p_0 - \frac{49491}{57516}p_6. \end{cases}$$

Из первого уравнения  $p_6$  в оставшиеся уравнения:

$$\begin{cases} p_0 = \frac{17372453670}{37012030731}p_7; \\ p_7 = 0,2845 - 0,6927p_0. \end{cases}$$

Из первого уравнения  $p_0$  подставим в оставшиеся уравнения:



$$p_7 = 0,2845 + 0,6927 * 0,4697 p_7 \quad p_7 = \frac{0,2845}{1,3254} = 0,2146.$$

Определим остальные вероятности, подставляя полученные результаты в обратном порядке:

$$P_0 = 0,46940 * 0,21146 = 0,1007;$$

$$P_6 = 0,06678 * 0,107 + 0,1731 * 0,2146 = 0,04387;$$

$$P_5 = 0,1608 * 0,1007 + 0,09232 * 0,04387 + 0,2801 * 0,2146 = 0,08035;$$

$$P_4 = 0,07692 * 0,1007 + 0,1538 * 0,08035 + 0,1538 * 0,04387 + 0,7692 * 0,2146 = 0,08035;$$

$$P_3 = 0,2 * 0,1007 + 0,8 * 0,080035 + 0,4 * 0,1853 = 0,1585;$$

$$P_2 = 0,3333 * 0,1007 + 0,3333 * 0,08035 + 0,3333 * 0,04387 = 0,07498;$$

$$P_1 = 0,2 * 0,1007 + 0,4 * 0,1853 + 0,8 * 0,04387 = 0,1294.$$

Выполним проверку. Сумма вероятностей всех событий должна быть равна единице:  $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 = 1$   
 $0,1294 + 0,07498 + 0,1585 + 0,1853 + 0,08035 + 0,04387 + 0,04387 + 0,1007 + 0,2146 = 0,9877$

Полученный результат меньше единицы, так как значение каждой вероятности было округленно.

### **СМО. Основные понятия.**

С системами массового обслуживания (СМО) приходится сталкиваться очень часто. Это и работа телефонной станции, и различные очереди (на автозаправке, в поликлинике, в билетной кассе и т.д.), работа некоторых организаций (магазины, мастерские, парикмахерские и т. д.).

Каждая СМО имеет как минимум три элемента: обслуживающий инструмент (станок, касса, канал связи и т. д.), который в дальнейшем будем называть каналом обслуживания или просто *каналом*; *входной поток*, т.е. поток заявок, поступающих на обслуживание; *выходной поток*, т.е. заявки, выполненные СМО (обеспеченные услугой).

Каждая поступившая заявка и принятая на обслуживание внутри СМО обрабатывается некоторое время, называемое *временем обслуживания* —  $t_{об}$ . Все заявки поступают случайным образом и независимо друг от друга. Будем рассматривать простейший случай: в каждый момент времени может поступить только одна заявка. Случаи поступления двух и более заявок в один и тот же момент времени не рассматриваются. Таким образом, в некоторые моменты времени поступившие заявки будут скапливаться на входе СМО и ожидать своей обработки либо покидать СМО необслуженными. В другие моменты времени СМО может простаивать, т. е. не иметь заявок на обслуживание.

При моделировании работы СМО ставится задача связать технические характеристики СМО,

По способу функционирования СМО могут быть:

- открытыми, т. е. поток заявок не зависит от внутреннего состояния СМО;
- закрытыми, т.е. входной поток зависит от состояния СМО (один ремонтный рабочий обслуживает все каналы по мере их выхода из строя).

### **Одноканальные СМО с отказами**

При изучении СМО используем следующие предположения:



1. Входной поток является пуассоновским с параметром  $\lambda$ .
2. Время обслуживания подчиняется экспоненциальному закону с параметром  $\lambda$ :  

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0; \\ 1 - e^{-\lambda t}, & \text{если } t \geq 0 \end{cases}$$
3. Время обслуживания требования не зависит от количества требований, поступивших в систему.

Такая система в любой момент времени  $t$  может находиться в одном из двух состояний:

$E_0$  – в системе 0 требований (система свободна);

$E_1$  – в системе 1 требование (система занята).

### **Одноканальные СМО с ожиданием**

Такие системы при условии, что нет ограничений на длину очереди, имеют бесчисленное множество состояний:  $E_0, E_1, E_2, E_3, \dots$

$E_0$  – в системе 0 требований (система свободна);

$E_1$  – в системе 1 требование (система занята);

$E_2$  – в системе 1 требование, и одно требование ожидает в очереди;

$E_3$  – в системе 1 требование, и два требования ожидают в очереди и т. д.

### **Подсчет средних характеристик**

При изучении СМО важнейшими являются средние значения (математические ожидания) таких случайных величин:

$n$  – количество требований, находящихся в системе;

$v$  – длина очереди;

$w$  – время ожидания в очереди.

Ниже их формулы:

$$n = \varphi / (1 - \varphi);$$

$$v = \varphi^2 / (1 - \varphi);$$

$$w = [\varphi / (1 - \varphi)] * [1 / \mu].$$

**Пример:** Интенсивность потока автомобилей, поступающих на моечную станцию (одноканальная СМО) – 4 автомобиля в час, а интенсивность обслуживания – 5 автомобилей в час. Предполагая, что станция работает в стационарном режиме, найти среднее число автомобилей, находящихся на станции, среднюю длину очереди и среднее время ожидания обслуживания.

*Решение:*

Определяем коэффициент загрузки системы:  $\varphi = \lambda / \mu = 0,8$ .

Далее, используя изученные выше формулы, вычисляем все требуемые характеристики:

$$n = 0,8 / (1 - 0,8) = 4;$$

$$v = 4 * 0,8 = 3,2;$$

$$w = 4 / 5 = 0,8.$$

### **Многоканальные СМО с отказами**

Сделаем следующие предположения относительно таких систем:

- входной поток пуассоновский;
- время обслуживания распределено по экспоненциальному закону;
- время обслуживания не зависит от входного потока;

– все линии обслуживания работают независимо.

Будем считать, что система содержит некоторое количество линий обслуживания  $s$ . Она может находиться в состояниях  $E_0, E_1, E_2, E_3, \dots, E_s$ . Расчет переходных вероятностей показывает, что из каждого из свободных состояний система может переходить в соседнее состояние, либо в такое же, в каком была.

**Пример:** Какое оптимальное число линий обслуживания должна иметь СМО, если известно, что  $\lambda = 2, \mu = 1, c_1 = 5, c_2 = 1$ .

*Решение:*

$$\varphi = \lambda/\mu = 2,$$

$$C(s) = 5 \cdot 2^s / s! (1 + 2 + 4/2! + \dots + 2^s/s!) + 1 \cdot (s-2)(1-P_s),$$

$$P_1 = \varphi/(1+\varphi) = 2/3,$$

$$C(1) = 5 \cdot 2^1 / 1(1+2) + 1(1-2(1-2/3)) = 7.$$

$$\text{Аналогично имеем: } C(2) = 4,8; C(3) = 3,5; C(4) = 3,1; C(5) = 3,44.$$

Таким образом, минимум функции стоимости достигается при  $s = 4$ , т. е. оптимальное число линий обслуживания – 4.

### **Многоканальные СМО с ожиданием**

Предположения относительно систем, введенные ранее, остаются в силе. Изучение системы ведется по обычной схеме:

1. Выясняются возможные состояния системы (здесь их бесконечное множество).
2. Находятся переменные вероятности.
3. Составляется система уравнений для нахождения  $P_k$  – вероятностей пребывания системы в каждом из своих состояний.
4. Изучаем стационарный режим работы СМО.
5. Находятся все вероятности, через  $P_0$ . Результат таков:

$$P_0 = \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi^k}{k!} + \frac{\varphi^{s+1}}{s!(s-\varphi)} \right)^{-1}$$

6. Ведется подсчет средних характеристик:  $j$  – среднее количество занятых линий;  $q$  – среднее число свободных линий;  $P(w > 0)$  – вероятность ожидания;  $v$  – средняя длина очереди.

$$j = \varphi; q = s - \varphi;$$

$$P(w > 0) = \varphi^s P_0 / s! (1 - \varphi/s); v = \varphi^{s+1} P_0 / (s-1)! (s - \varphi)^2.$$

**Пример:** Определить число взлетно-посадочных полос для самолетов с учетом требования, что вероятность ожидания  $P(w > 0)$  должна быть меньше, чем 0,05. Интенсивность потока равна 27 требований в сутки и интенсивность линий обслуживания – 30 самолетов в сутки.

*Решение:*

$$\varphi = \lambda/\mu = 0,9.$$

Используя приведенные выше формулы, имеем:

$$s = 1: P_0 = (1 + 0,9 + 0,81/(1(1-0,9)))^{-1} = 0,1, P(w > 0) = 0,9 \cdot 0,1/(1-0,9) = 0,9;$$

$$s = 2: P_0 = 0,380, P(w > 0) = 0,276;$$

$$s = 3: P_0 = 0,403, P(w > 0) = 0,07;$$

$$s = 4: P_0 = 0,456, P(w > 0) = 0,015.$$

Таким образом, надо устраивать 4 взлетно-посадочные полосы.

### **Содержание работы:**

**Задание 1.** Техническое устройство состоит из трех узлов и в любой момент времени может находиться в одном из восьми состояний (рис. 1). Численные значения интенсивности потоков событий:  $\lambda_1=2$ ;  $\lambda_2=2$ ;  $\lambda_3=1$ ;  $\mu_1=4$ ;  $\mu_2=4$ ;  $\mu_3=2$ . Найдите финальные вероятности состояний устройства.

**Задание 2.** Интенсивность потока автомобилей, поступающих на моечную станцию (одноканальная СМО) – 5 автомобилей в час, а интенсивность обслуживания – 6 автомобилей в час. Предполагая, что станция работает в стационарном режиме, найти среднее число автомобилей, находящихся на станции, среднюю длину очереди и среднее время ожидания обслуживания.

**Задание 3.** Какое оптимальное число линий обслуживания должна иметь СМО, если  $\lambda = 3$ ,  $\mu = 2$ ,  $c_1 = 4$ ,  $c_2 = 2$ .

**Задание 4.** Определить число взлетно-посадочных полос для самолетов с учетом требования, что вероятность ожидания  $P(w > 0)$  должна быть меньше, чем 0,06. Интенсивность потока равна 28 требований в сутки и интенсивность линий обслуживания – 32 самолетов в сутки.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6

### Тема: Решение задач массового обслуживания методами имитационного моделирования

**Цель работы:** научиться оценивать надежность простейших систем методом Монте-Карло; научиться рассчитывать СМО с отказами методом Монте-Карло.

**Оборудование:** ПК, программное обеспечение – MS Word, инструкции по выполнению работы.

#### **Справочный материал:**

*Имитационное моделирование* – получение экспериментальной информации о сложном объекте, которая не может быть получена иным путем, как экспериментирова с его моделью на ПК.

Имитационный объект имеет вероятностный характер функционирования. Для исследователя представляют интерес выводы, носящие характер статистических показателей, оформленных, может быть, даже в виде графиков или таблиц, в которых каждому варианту исследуемых параметров поставлены в соответствие определенные средние значения с набором характеристик их распределения, без получения зависимости в аналитическом виде.

Эта особенность является и достоинством, и одновременно, недостатком имитационным моделей. **Достоинство** в том, что резко расширяется класс изучаемых объектов, а **недостаток** – в отсутствии простого управляющего выражения, позволяющего прогнозировать результат повторного эксперимента. Но в реальной жизни также невозможно для сколько-нибудь сложного объекта получить точное значение экономического показателя, а только лишь его ожидаемое значение с возможными отклонениями.

**Главной функцией имитационной модели** является воспроизведение с заданной степенью точности прогнозируемых параметров ее функционирования, представляющих исследовательский интерес. Как объект, так и его модель, должны обладать системными признаками.

**Метод Монте-Карло.** Метод Монте-Карло является методом статистического моделирования или имитационного моделирования.

*Метод Монте-Карло* – это численный метод решения задач при помощи моделирования случайных величин.

**Идея метода** чрезвычайно проста и состоит в следующем. Вместо того чтобы описывать процесс с помощью аналитического аппарата, проводится розыгрыш случайного явления с помощью специально организованной процедуры, включающей в себя случайность и дающей случайный результат. Реализация случайного процесса каждый раз складывается по-разному, т. е. мы получаем различные исходы рассматриваемого процесса. Это множество реализаций можно использовать как некий искусственно полученный статистический материал, который может быть обработан обычными методами математической статистики. После такой обработки можно получить: вероятность события, математическое ожидание и т. д.

Пример. Оценка надежности простейших систем методом Монте-Карло: Система состоит из двух блоков, соединенных последовательно. Система оказывает при отказе хотя бы одного блока. Первый блок содержит два элемента: А, В (они соединены параллельно) и оказывает при одновременном отказе обоих элементов. Второй содержит один элемент С и отказывает при отказе этого элемента.

а) Найти методом Монте-Карло оценку  $P^*$  надежности (вероятности безотказной работы) системы, зная вероятности безотказной работы элементов:  $P(A)=0,8$ ,  $P(B)=0,85$ ,  $P(C)=0,6$ ;

б) найти абсолютную погрешность  $|P-P^*|$ , где  $P$  – надежность системы, вычисленная аналитически. Произвести 50 испытаний.

Решение. а) Выбираем из таблицы приложения (*равномерно распределенные числа*) три случайных числа: 0,10, 0,09 и 0,73; по правилу \*) (*если случайное число меньше вероятности события, то событие наступило; если случайное число больше или равно вероятности события, то событие не наступило*) разыграем события А, В, С, состоящие в безотказной работе соответственно элементов А, В, С. Результаты испытания будем записывать в расчетную таблицу.

Поскольку  $P(A)=0,8$  и  $0,10 < 0,8$ , то событие наступило, т.е. элемент А в этом испытании работает безотказно. Так как  $P(B)=0,85$  и  $0,09 < 0,85$ , то событие В наступило, т.е. элемент В работает безотказно.

Таким образом, оба элемента первого блока работают; следовательно, работает и сам первый блок. В соответствующих клетках таблицы ставим знак плюс.

Номер испытания	Блок	Случайные числа, моделирующие элементы			Заключение о работе				
		А	В	С	элементов			блоков	системы
1	Первый Второй	0,10	0,09	0,73	+	+	-	+	-
2	Первый Второй	0,25	0,33	0,76	+	+	-	+	-
3	Первый Второй	0,52	0,01	0,35	+	+	+	+	+
4	Первый Второй	0,86	0,34	0,67	-	+	-	+	-

Так как  $P(C)=0,6$  и  $0,73 > 0,6$ , то событие С не наступило, т.е. элемент С получает отказ. Другими словами, второй блок, а значит и вся система, получают отказ. В соответствующих клетках таблицы ставим минус.

Аналогично разыгрываются и остальные испытания. В таблице приведены результаты четырех испытаний.

Произведя 50 испытаний, получим, что в 28 из них система работала безотказно. В качестве оценки искомой надежности  $P$  примем относительную частоту  $P^* = 28/50 = 0,56$ .

б) Найдем надежность системы  $P$  аналитически. Вероятности безотказной работы первого и второго блоков соответственно равны:

$$P_1 = 1 - P(\bar{A}) * P(\bar{B}) = 1 - 0,2 * 0,15 = 0,97, P_2 = P(C) = 0,6$$

Вероятность безотказной работы системы  $P=P_1 \cdot P_2=0,97 \cdot 0,6=0,582$ .  
Искомая абсолютная погрешность  $|P-P^*|=0,582-0,56=0,022$ .

Пример. Расчет СМО с отказами методом Монте-Карло: В трехканальную систему массового обслуживания с отказом поступает пуассоновский поток заявок. Время между поступлениями двух последовательных заявок распределено по показательному закону  $f(\tau)=5e^{-5\tau}$ . Длительность обслуживания каждой заявки равна 0,5 мин. Найти методом Монте-Карло математическое ожидание  $a$  числа обслуженных заявок за время  $T=4$  мин.

Решение: Пусть  $T_1=0$  – момент поступления первой заявки. Заявка поступит в первый канал и будет им обслужена. Момент окончания обслуживания первой заявки  $T_1+0,5=0+0,5=0,5$ . В счетчик обслуженных заявок записываем единицу.

Моменты поступления последующих заявок найдем по формуле  $T_t = T_{t-1} + \tau_t$ , где  $\tau_t$  – длительность времени между двумя последовательными заявками с номерами  $t-1$  и  $t$ .

Возможные  $\tau_t = -(1/\lambda) \ln r_t = (1/\lambda) (-\ln r_t)$ .

Учитывая, что по условию,  $\lambda = 5$ , получим  $\tau_t = 0,2 (-\ln r_t)$ .

Случайные числа  $r_t$  берем из таблицы приложения, начиная с первой строки сверху. Для нахождения времени между поступлениями первой и второй заявок возьмем случайное число  $r=0,10$ .

Тогда  $\tau_2=0,2 \cdot (-\ln 0,10)=0,2 \cdot 2,30=0,460$ . Первая заявка поступила в момент  $T_1=0$ .

Следовательно, вторая заявка поступила в момент  $T_2=T_1+0,460=0+0,460=0,460$ . В этот момент первый канал еще занят обслуживанием первой заявки, поэтому вторая заявка поступит во второй и будет им обслужена. Момент окончания обслуживания второй заявки  $T_2+0,5=0,460+0,5=0,960$ . В счетчик обслуженных заявок добавляем единицу. По очередному случайному числу  $r=0,09$  разыграем время  $\tau_3$  между поступлениями второй и третьей заявок:  $\tau_3=0,2 \cdot (-\ln 0,09)=0,2 \cdot 2,41=0,482$ .

Вторая заявка поступила в момент  $T_2=0,460$ . Поэтому третья заявка поступила в момент  $T_3=T_2+0,482=0,460+0,482=0,942$ . В этот момент первый канал уже свободен и третья заявка поступит в первый канал. Момент окончания обслуживания третьей заявки  $T_3+0,5=0,942+0,5=1,442$ . В счетчик обслуженных заявок добавляем единицу.

Дальнейший расчет производят аналогично, причем если момент поступления заявки все каналы заняты (момент поступления заявки меньше каждого из моментов окончания обслуживания), то в счетчик отказов добавляют единицу.

Заметим, что обслуживание 20-й заявки закончится в момент  $4,148 > 4$ , поэтому эта заявка получает отказ.

Испытание прекращают (в таблице записывают «стоп»), если момент поступления заявки  $T > 4$ .

номер заявки $i$	Случайное число $\tau_i$	$-\ln \tau_i$	Время между двумя последовательными заявками $\tau_i = 0,2(-\ln \tau_i)$	Момент поступления заявки $T_i = T_{i-1} + \tau_i$	Момент $T_i + 0,5$ окончания обслуживания заявки каналом			Счетчик	
					1	2	3	Обслуженных заявок	отказов
1				0	0,500			1	
2	0,10	2,30	0,460	0,460		0,960		1	
3	0,09	2,41	0,482	0,942	1,442			1	
4	0,73	0,32	0,064	1,006		1,506		1	
5	0,25	1,39	0,278	1,284			1,784	1	
6	0,33	1,11	0,222	1,506	2,006			1	
7	0,76	0,27	0,054	1,560		2,060		1	
8	0,52	0,65	0,130	1,690					1
9	0,01	4,60	0,920	2,610	3,110			1	
10	0,35	1,05	0,210	2,820		3,320		1	
11	0,86	0,15	0,030	2,850			3,350	1	
12	0,34	1,08	0,216	3,066					1
13	0,67	0,40	0,080	3,146	3,646			1	
14	0,35	1,05	0,210	3,356		3,856		1	
15	0,48	0,73	0,146	3,502			4,002		1
16	0,76	0,27	0,054	3,556					1
17	0,80	0,22	0,044	3,600					1
18	0,95	0,05	0,010	3,610					1
19	0,90	0,10	0,020	3,630					1
20	0,91	0,09	0,018	3,648	4,148				1
21	0,17	1,77	0,354	4,002					
				(стоп)			итого	$X_1=12$	8

Из таблицы находим, что за 4 мин всего поступило 20 заявок; обслужено  $x_1=12$ .

Выполним аналогично еще пять испытаний, получим  $x_2=15$ ,  $x_3=14$ ,  $x_4=12$ ,  $x_5=13$ ,  $x_6=15$ .

В качестве оценки искомого математического ожидания а числа обслуженных заявок примем выборочную среднюю

$$a^* = \bar{x} = (2 \cdot 12 + 13 + 14 + 2 \cdot 15) / 6 = 13,5.$$

### Содержание работы:

**Задание 1.** Система состоит из двух блоков, соединенных последовательно. Первый блок содержит три элемента: А, В, С, а второй – два элемента: D, Е. Элементы каждого блока соединены параллельно.

а) Найти методом Монте-Карло оценку  $P^*$  надежности системы, зная вероятности безотказной работы элементов:  $P(A)=0,8$ ;  $P(B)=0,9$ ;  $P(C)=0,85$ ;  $P(D)=0,7$ ;  $P(E)=0,6$ ;

б) найти абсолютную погрешность  $|P-P^*|$ , где  $P$  - надежность системы, вычисленная аналитически. Произвести 15 испытаний.

**Задание 2.** В двухканальную систему массового обслуживания с отказом поступает пуассоновский поток заявок. Время между поступлениями двух последовательных заявок распределено по показательному закону  $f(\tau)=4e^{-4\tau}$ . Длительность обслуживания каждой заявки равна 1 мин. Найти методом Монте-Карло математическое ожидание а числа обслуженных заявок за время  $T=8$  мин.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 7

### Тема: Моделирование прогноза. Построение прогнозов

**Цель работы:** научиться применять МНК для линейного сглаживания данные, научиться сглаживать данные с помощью квадратичной функции; изучение возможностей и формирование умения использования универсальной компьютерной технологии для решения задач выявления тенденций и прогнозирования развития процесса

**Оборудование:** ПК, программное обеспечение – MS Excel, инструкции по выполнению работы.

#### Справочный материал:

*Метод наименьших квадратов* — один из методов регрессионного анализа для оценки неизвестных величин по результатам измерений, содержащим случайные ошибки.

Метод наименьших квадратов применяется также для приближенного представления заданной функции другими (более простыми) функциями и часто оказывается полезным при обработке наблюдений.

Метод наименьших квадратов предусматривает нахождение параметров функциональной зависимости из условия минимума суммы квадратов отклонений.

1. Если  $f(x)$  – линейная функция, т.е.  $y = ax + b$ , то  $S = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$ , неизвестные параметры  $a, b$  определяются из системы

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases} \quad (1)$$

Формулы, служащие для аналитического представления опытных данных, получили название *эмпирических формул*.

Система (1) называется *системой нормальных уравнений*.

2. Если  $f(x)$  – квадратичная функция, т.е.  $y = ax^2 + bx + c$ , то  $S = \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$ , неизвестные параметры  $a, b, c$  определяются из системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + nc = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

#### Содержание работы:

**Задание 1.** С помощью МНК подобрать параметры  $a$  и  $b$  линейной функции  $y = ax + b$ , приближенно описывающей следующие опытные данные.



Построить полученную прямую и исходные точки в одной системе координат.

$x$	0	1	1,5	2,1	3
$y$	2,9	6,3	7,9	10	13,2

Решение: Параметры  $a$  и  $b$  искомой функции найдем из системы нормальных уравнений. Для этого перепишем ее в следующем виде:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

Для решения задачи составим таблицу.

	$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i \cdot y_i$
1	0	2,9	0	0
2	1,0	6,3	1	6,3
3	1,5	7,9	2,25	11,85
4	2,1	10,0	4,41	21
5	3,0	13,2	9,0	39,6
$\Sigma$	7,6	40,3	16,66	78,75

Тогда система нормальных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} 16,66a + 7,6b = 78,75 \\ 7,6a + 5b = 40,3 \end{cases}$$

Решим систему. Для этого выразим  $b$  из второго уравнения:

$$5b = 40,3 - 7,6$$

$$b = (40,3 - 7,6)/5$$

Подставим в первое уравнение:  $16,66a + 7,6/5 (40,3 - 7,6a) = 78,75$

$$16,66a + 61,25b - 11,552a = 78,75$$

$$5,108a = 17,494$$

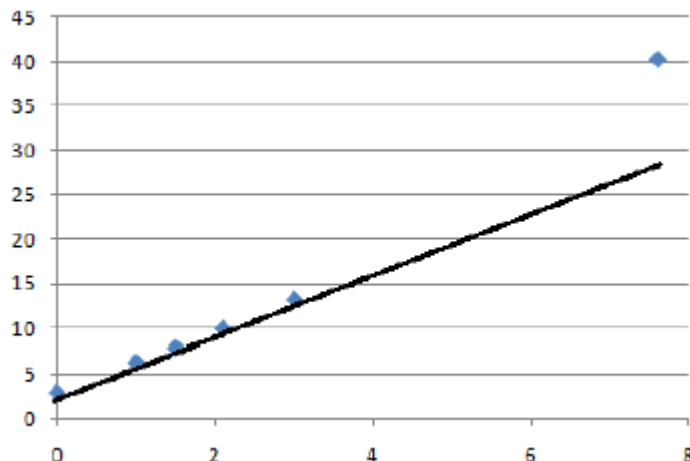
$$a = 3,42.$$

$$b = \frac{40,3 - 7,6 \cdot 3,42}{5} = 2,86$$

Отсюда

Итак,  $a = 3,42$ ,  $b = 2,86$ , и, следовательно, искомая функция имеет вид:  $y = 3,42x + 2,86$ .

Построим полученную прямую и исходные точки в одной системе координат.



**Вывод:** Так как исходные данные и полученная прямая расположены близко друг к другу, то аппроксимирующая функция найдена правильно.

Тренд – это функция заданного вида, с помощью которой можно аппроксимировать построенный по данным таблицы график. Тренд служит для выявления тенденций развития процесса, представленного в виде диаграммы, и обеспечивает прогноз на заданный период. В MS Excel предусмотрено несколько стандартных типов тренда: линейный, логарифмический, степенной, экспоненциальный, полиномиальный, скользящее среднее.

Необходимые условия для построения тренда:

- период времени, за который изучается исследуемый процесс, должен быть достаточным для выявления закономерности;
- тренд в анализируемый период должен развиваться эволюционно;
- процесс, представленный диаграммой, должен обладать определенной инертностью.

Тренд можно строить для диаграмм типа: линейчатый график, гистограмма, диаграмма с областями, XY-точечная диаграмма.

**Задание 2:** На основании приведенных данных построить тренды и проанализировать, как описывают процесс динамики продаж линейная, логарифмическая, полиномиальная, степенная и экспоненциальная зависимости. Рассчитать прогноз на основе аппроксимирующих зависимостей, а также с помощью функций ПРЕДСКАЗ, РОСТ и ТЕНДЕНЦИЯ. Провести анализ с целью определения, какой из примененных методов дает более точный результат.

Постановка задачи: Имеются две наблюдаемые величины  $x$  и  $y$ , например, объем реализации фирмы, торгующей кондитерскими изделиями, за ряд лет ее работы. Необходимо выяснить какая из наиболее распространенных функциональных зависимостей подходит для описания процесса реализации товара, и какого результата по объемам продаж можно ожидать в последующие годы работы фирмы. Для того чтобы построить прогноз развития какой-либо ситуации на практике зачастую необходимо знать закономерность изменения исследуемой величины или объекта.

Для выявления тенденций развития процесса продаж необходимо построить тренды и осуществить их анализ. Построим и проанализируем, как описывают процесс динамики продаж линейная, логарифмическая, полиномиальная, степенная и экспоненциальная зависимости.

Технология работы:

1. В MS Excel создайте рабочую книгу с листами: *Прогнозирование*, *Линейная*, *Логарифмическая*, *Полиномиальная*, *Степенная*, *Экспоненциальная* и оформите лист *Прогнозирование* как показано на рис. 1

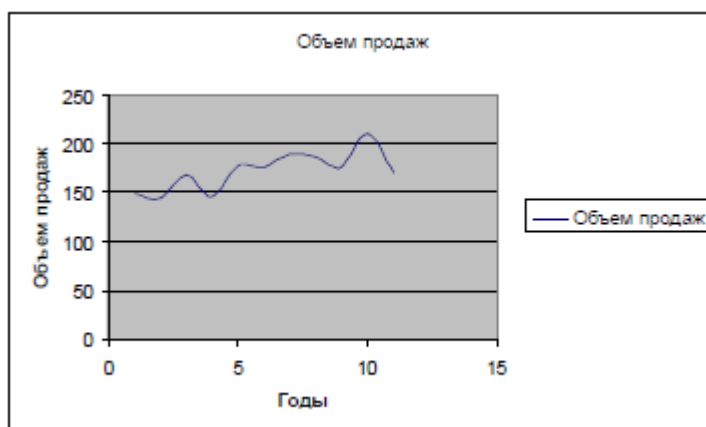
	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Прогнозирование объема продаж предприятия					
2								
3						Метки трендов на диаграммах		
4								
5								
6				Объем продаж				
7			Статистические данные	Теоретические данные				
8		Год	Объем продаж	линейная аппроксимация	логарифмическая аппроксимация	полиномиальная аппроксимация 2 степени	степенная аппроксимация	экспоненциальная аппроксимация
9	1	1996	149					
10	2	1997	145					
11	3	1998	168					
12	4	1999	146					
13	5	2000	177					
14	6	2001	176					
15	7	2002	190					
16	8	2003	186					
17	9	2004	176					
18	10	2005	211					
19	11	2006	170					
20	Контрольные суммы							
21	ПРОГНОЗ на 2007 год							
22	12	2007						
23	12	2007	ПРЕДСКАЗ					
24	12	2007	РОСТ					
25	12	2007	ТЕНДЕНЦИЯ					
26								
27								
28								
29								
30								
31								

Рис.1. Оформление листа с исходными данными

Для правильности последующих вычислений в Excel необходимо, чтобы значения периодов были представлены их номерами, начиная с 1 (ячейки A9:A19).

2. Исходным пунктом моделирования трендов является построение диаграммы. На основе исходных данных, представленных в таблице, постройте точечную диаграмму со значениями, соединенными сглаживающими линиями без маркеров.

Для построения использовать Мастер диаграмм. Выберите подтип диаграммы «Точечную диаграмму со значениями, соединенными сглаживающими линиями без маркеров». Если в левом нижнем углу диалогового окна Мастер диаграмм нажать и удерживать кнопку «Просмотр результата», то справа вместо галереи видов вы увидите образец будущей диаграммы. В качестве диапазонов значений для построения диаграммы взять несмежные диапазоны ячеек A8:A19 и C8:C19. В третьем шаге Мастера диаграмм на вкладке Заголовки обозначьте ось X заголовком «Годы», а ось Y – заголовком «Объем продаж». На этом же шаге расположите легенду внизу. На четвертом шаге поместите диаграмму на имеющемся листе.

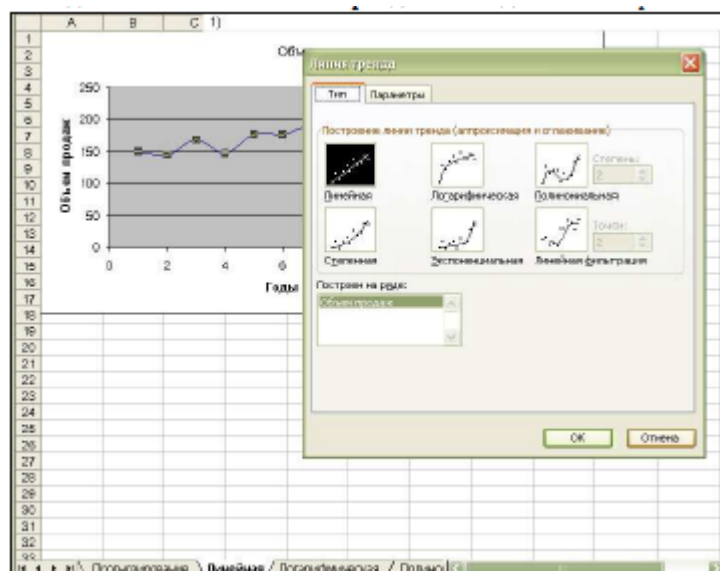


Сохраните результат работы в файле.

3. Для свободного размещения на графике текстовых меток тренда, содержащих вид уравнения и коэффициент детерминации (величина достоверности аппроксимации  $R^2$ ), предварительно занесите график в буфер обмена и скопируйте его в начало других пяти листов (*Линейная*, *Логарифмическая*, *Полиномиальная*, *Степенная*, *Экспоненциальная*). Если у вас в книге недостает листов, выполните их вставку.

4. Построить линейный тренд для диаграммы. Для этого необходимо:

- установить указатель мыши на линии диаграммы и щелкнуть левой кнопкой мыши так, чтобы на линии появились черные метки
- для выделенной диаграммы вызвать контекстное меню, щелкнув правой кнопкой мыши;
- выполнить команду *Добавить линию тренда*.
- в диалоговом окне *Линия тренда* на вкладке *Тип* выбрать окно *Линейная*

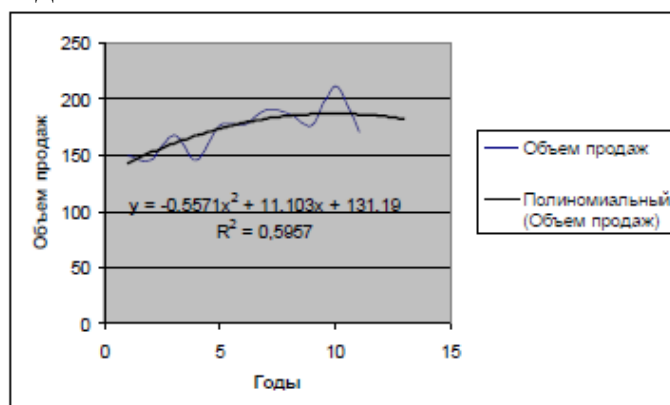


На вкладке *Параметры* установить следующие параметры:

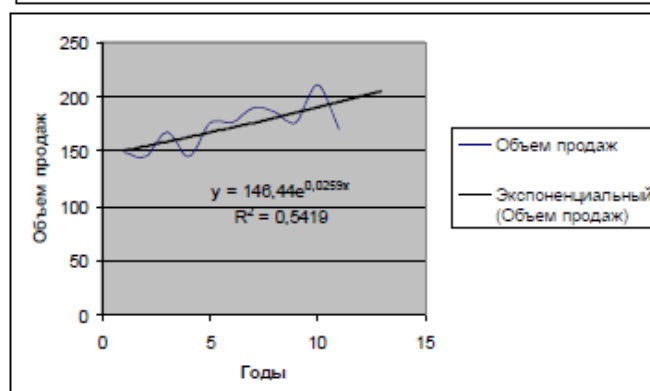
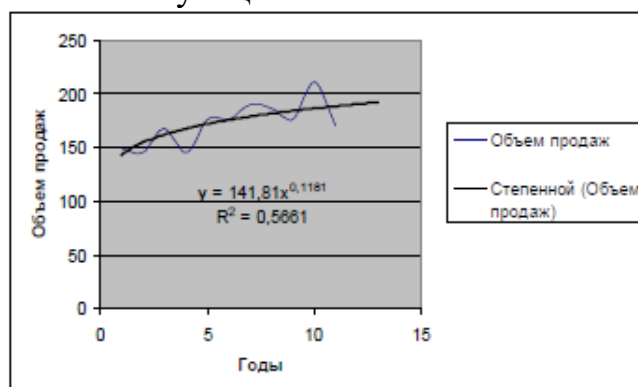
- название аппроксимирующей кривой: автоматическое
- прогноз: вперед на 2 периода;
- показывать уравнение на диаграмме: установите флажок;
- поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации: установите флажок.



- установить указатель мыши на линии диаграммы и щелкнуть левой кнопкой мыши так, чтобы на линии появились черные метки
  - для выделенной диаграммы вызвать контекстное меню, щелкнув правой кнопкой мыши
  - выполнить команду *Добавить линию тренда*.
  - в диалоговом окне *Линия тренда* на вкладке *Тип* выбрать окно полиномиальная, установите для полинома степень 2
- На вкладке *Параметры* установить следующие параметры:
- название аппроксимирующей кривой: автоматическое
  - прогноз: вперед на 2 периода;
  - показывать уравнение на диаграмме: установите флажок;
  - поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации: установите флажок.
  - подтвердить действия нажатием кнопки —ОК.



7. Аналогичным образом построить степенной и экспоненциальный тренды для диаграммы на соответствующих листах книги Excel.



### Анализ полученных трендов и прогнозирование:

Конечный результат моделирования должен оцениваться пользователем с точки зрения здравого смысла на основе неформального комплекса знаний об условиях развития процесса, о допустимых предельных значениях показателя и т.п. В Excel для анализа трендов автоматически выводится только коэффициент детерминации ( $R^2$ ). Статистики-практики применяют метод сверки контрольных сумм теоретического (сглаженного по тренду) ряда признака с суммой значений исходного ряда. Однако для подсчета этих сумм сначала необходимо построить ряды теоретических значений показателя по найденным уравнениям трендов.

8. Перейдите на лист *Прогнозирование*. Скопируйте метки трендов с диаграмм и вставьте их в соответствующие ячейки как показано на рис.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1					Прогнозирование объема продаж предприятия			
2								
3					Метки трендов на диаграммах			
4				$y = 4,4182x +$	$y = 19,959 \ln(x) + 140,42$	$y = -0,5571x^2 + 11,103x + 131,19$	$y = 141,81x^{0,1181}$	$y = 146,44e^{0,0299x}$
5				$R^2 = 0,52$	$R^2 = 0,5459$	$R^2 = 0,5957$	$R^2 = 0,5991$	$R^2 = 0,5419$
6				Объем продаж				
7			Статистическое данные	Теоретические данные				
8		Год	Объем продаж	линейная аппроксимация	логарифмическая аппроксимация	полиномиальная аппроксимация 2 степени	степенная аппроксимация	экспоненциальная аппроксимация
9	1	1996	145	$=4,4182*A9+145,67$	$=19,959*LN(A9)+140,42$	$=-0,5571*A9^2+11,103*A9+131,19$	$=141,81*A9^{0,1181}$	$=146,44*EXP(0,0299*A9)$
10	2	1997	145					
11	3	1998	168					
12	4	1999	145					
13	5	2000	177					
14	6	2001	175					
15	7	2002	190					
16	8	2003	186					
17	9	2004	178					
18	10	2005	211					
19	11	2006	170					
20	Контрольные суммы							
21	ПРОГНОЗ на 2007 год							
22	12	2007						
23	12	2007	ПРЕДСКАЗ					
24	12	2007	РОСТ					
25	12	2007	ТЕНДЕНЦИЯ					
26								
27								
28								
29								
30								

9. Введите формулы для вычисления значений аппроксимирующих функций в соответствующие ячейки D9, E9, F9, G9, H9.

Скопируйте формулы вниз по столбцам.

10. Произведите подсчет контрольных сумм в ячейках C20:H20.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				Прогнозирование объема продаж предприятия				
2								
3				Метод трендов на диаграммах				
4				$y = 4,4182x + 145,87$	$y = 18,858 \ln(x) + 140,42$	$y = -0,5571x^2 + 11,103x + 131,19$	$y = 141,81x^{0,1181}$	$y = 146,44e^{0,0029x}$
5				$R^2 = 0,53$	$R^2 = 0,5458$	$R^2 = 0,5957$	$R^2 = 0,5961$	$R^2 = 0,5419$
6				Объем продаж				
7			Статистические данные	Теоретические данные				
8		Год		линейная аппроксимация	логарифмическая аппроксимация	полиномиальная аппроксимация 2 степени	степенная аппроксимация	экспоненциальная аппроксимация
9		Объем продаж						
9	1	1996	149	150,0682	140,4200	141,7398	141,8100	150,2623
10	2	1997	145	154,5064	154,2545	151,1676	153,8070	154,2255
11	3	1998	158	153,9246	162,3472	159,4851	161,4563	153,2721
12	4	1999	146	163,3428	169,0890	166,6384	167,0360	162,4249
13	5	2000	177	167,7610	172,5428	172,7775	171,4965	166,6857
14	6	2001	176	172,1792	176,1817	177,7524	175,2292	171,0602
15	7	2002	180	178,5974	179,2584	181,6131	178,4485	175,5486
16	8	2003	186	181,0156	181,9236	184,3596	181,2850	180,1547
17	9	2004	176	185,4338	184,2744	186,9619	183,8243	184,8816
18	10	2005	211	188,8520	188,3773	189,5100	186,1259	188,7326
19	11	2006	170	194,2702	189,2796	185,9138	188,2328	184,7109
20	Контрольные суммы		1894,0000	1893,9712	1893,9486	1893,9954	1888,8515	1887,8801
21	ПРОГНОЗ на 2007 год							
22	12	2007	На основе аппроксимирующей кривой	199,6834	190,0183	184,2038	190,1771	199,8198
23	12	2007	ПРЕДСКАЗ	199,6909				
24	12	2007	РОСТ					199,9452
25	12	2007	ТЕНДЕНЦИЯ	199,6909				

В результате получили множество числовых рядов исходных данных, сглаженных по исследуемым трендам (D9:D19; E9:E19; F9:F19; G9:G19; H9:H19), множество вспомогательных контрольных сумм (D20:H20) для выявления наилучшего тренда путем сверки их с главной контрольной суммой (C20).

11. Поместите выводы из анализа полученных результатов исследования динамики продаж с помощью аппроксимации в этом же листе. Проанализировать построенные графики можно, например следующим образом:

*Результаты по исследованию динамики продаж с помощью регрессионного анализа.*

Поскольку величина достоверности аппроксимации  $R^2$  максимальна для регрессионной линии, описываемой полиномиальной зависимостью второй степени  $R^2=0,5957$ , то эта зависимость, описываемая уравнением  $y=-0,5571x^2+11,103x+131,19$ , где  $x$  - номер года,  $y$  - объем реализации за год, является наиболее подходящей для описания динамики продаж.

Контрольная сумма объемов продаж за анализируемый период, вычисленная по этой зависимости, наиболее близка по значению 1893,9954 к контрольной сумме статистических данных объемов продаж 1894,0000.

**Вывод.** Для прогнозирования объемов продаж следует воспользоваться полиномиальной зависимостью.



	A	B	C	D	E	F	G	H
15	7	2002	180	175,5974	179,2534	181,6131	178,4485	175,5485
16	8	2003	186	181,0156	181,9236	184,3596	181,2850	180,1547
17	9	2004	176	185,4338	184,2744	185,9919	183,8243	184,8816
18	10	2005	211	199,9520	196,3772	198,5100	198,1259	199,7328
19	11	2006	170	194,2702	188,2796	189,9139	188,2328	194,7109
20	Контрольные суммы		1894,0000	1893,9712	1893,9426	1893,9954	1893,9515	1893,9901
21	ПРОГНОЗ на 2007 год							
22	12	2007	На основе вспроискирую щей кривой	199,6884	190,0182	184,2028	190,1771	199,8198
23	12	2007	ПРЕДСКАЗ	199,6889				
24	12	2007	РОСТ					199,8452
25	12	2007	ТЕНДЕНЦИЯ	199,6889				
26								
27	Результаты по исследованию динамики продаж с помощью регрессионного анализа.							
28								
29	Результаты по исследованию динамики продаж с помощью регрессионного анализа.							
30	Поскольку величина достоверности аппроксимации $R^2$ максимальна для регрессионной							
31	линии, описываемой полиномиальной зависимостью второй степени $R^2=0,9957$ ,							
32	то эту зависимость, описываемая							
33	$y = -0,5571x^2 + 11,103x + 131,19$ ,							
34	где $x$ - номер года, $y$ - объем реализации за год,							
35	является наиболее подходящей для описания динамики продаж.							
36								
37	Контрольная сумма объемов продаж за анализируемый период,							
38	вычисленная по этой зависимости, наиболее близка по значению 1893,9954							
39	к контрольной сумме статистических данных объемов продаж 1894,0000.							
40								
41	Вывод. Для прогнозирования объемов продаж следует воспользоваться указанной							
42	зависимостью.							
43								
44								

12. Рассчитайте прогноз объема продаж на основе функций прогнозирования ПРЕДСКАЗ, РОСТ, ТЕНДЕНЦИЯ и расположите результаты вычислений прогноза с помощью функций в соответствующих столбцах. При этом следует учитывать следующее.

Функция ТЕНДЕНЦИЯ возвращает значения в соответствии с линейным трендом.

Аппроксимирует прямой линией (по методу наименьших квадратов) массивы *известные\_значения\_y* и *известные\_значения\_x*. Возвращает значения *y*, в соответствии с этой прямой для заданного массива *новые\_значения\_x*. Синтаксис: ТЕНДЕНЦИЯ (*известные\_значения\_y*; *известные\_значения\_x*; *новые\_значения\_x*; конст).

*Известные\_значения\_y* — множество значений *y*, которые уже известны для соотношения  $y = mx + b$ .

Функция РОСТ возвращает значения в соответствии с экспоненциальным трендом. Рассчитывает прогнозируемый экспоненциальный рост на основании имеющихся данных. Функция РОСТ возвращает значения *y* для последовательности новых значений *x*, задаваемых с помощью существующих *x*- и *y*-значений. Функция рабочего листа РОСТ может применяться также для аппроксимации существующих *x*- и *y*-значений экспоненциальной кривой.

Синтаксис: РОСТ(*известные\_значения\_y*; *известные\_значения\_x*; *новые\_значения\_x*; конст)

*Известные\_значения\_y* — это множество значений *y*, которые уже известны в соотношении  $y = b \cdot m^x$ .

Функция ПРЕДСКАЗ возвращает значение линейного тренда. Вычисляет или предсказывает будущее значение по существующим значениям. Предсказываемое значение — это *y*-значение, соответствующее

заданному  $x$ -значению. Известные значения — это  $x$ - и  $y$ -значения, а новое значение предсказывается с использованием линейной регрессии. Эту функцию можно использовать для предсказания будущих продаж, потребностей в оборудовании или тенденций потребления. Синтаксис:

- ПРЕДСКАЗ( $x$ ; известные\_значения\_y; известные\_значения\_x)
- $x$  — это точка данных, для которой предсказывается значение.
- Известные\_значения\_y — это зависимый массив или интервал данных.
- Известные\_значения\_x — это независимый массив или интервал данных.

13. Сделайте сравнительный анализ используемых методов прогнозирования.

14. Сохраните результаты работы в файле.

**Задание 3.** С помощью МНК подобрать параметры  $a$  и  $b$  линейной функции  $y = ax + b$ , приближенно описывающей следующие опытные данные. Построить полученную прямую и исходные точки в одной системе координат.

вариант							
1	$x_i$	1	3	4	5	6	8
	$y_i$	6	4	4	2	3	2
2	$x_i$	2	3	4	5	7	8
	$y_i$	1	3	4	6	6	9
3	$x_i$	1	2	4	6	7	8
	$y_i$	7	6	4	5	3	3
4	$x_i$	2	3	4	5	7	8
	$y_i$	2	6	6	7	8	10

**Задание 4.** С помощью МНК подобрать параметры  $a$  и  $b$  квадратичной функции  $y = a^2x + bx + c$ , приближенно описывающей следующие опытные данные. Построить полученную линию и исходные точки в одной системе координат.

вариант							
1	$x_i$	2	2,5	3	3,5	4	4,5
	$y_i$	4,2	2,5	6,2	7,5	2,6	1
2	$x_i$	1	1,5	2	2,6	2,9	3,1
	$y_i$	2,6	5,6	4,3	1,6	2,6	3,4
3	$x_i$	2	3	3,6	3,8	4,2	4,6
	$y_i$	0	2,3	2,5	2,9	1	4,5
4	$x_i$	5	5,5	6	6,5	7	7,5
	$y_i$	4,5	4,6	8,5	2,6	4,5	6,7

### Задание 5.

Создайте новую рабочую книгу.

1. Заполните таблицу

День	1	2	3	4	5	6	7	8
Количество проданных ящиков деталей	13	19	29	30	37	44	49	55

Исследуемые зависимости: линейная, степенная.

2. Сохраните результат работы в файл.
3. В ячейку A1 введите – описание переменной  $x$ , в ячейку B1 – описание переменной  $y$ .
4. Осуществите ввод исследуемых данных в столбцы A и B ниже описанных переменных.
5. Оформите созданную расчетную таблицу
6. Сохраните результат работы в файл.
7. Установить курсор в ячейку C1 и постройте диаграмму — Объем реализации продукции за неделю по диапазону значений столбца B.
8. Произведите оформление построенной диаграммы
9. Сохраните результат работы в файл.
10. Выберите Зависимость 1 согласно индивидуальному варианту тип для первой линии тренда.
11. Постройте первый тренд для диаграммы.
12. Произведите настройку оформления вида полученного тренда
13. Выберите Зависимость 2 согласно индивидуальному варианту тип для второй линии тренда.
14. Постройте второй тренд для диаграммы.
15. Произведите настройку оформления вида построенных трендов
16. Произведите анализ полученных результатов.
17. Сохраните результат работы в файл.
18. Предъявите работу преподавателю.
19. Закройте все открытые файлы электронной таблицы.
20. Закончите работу с MS Excel.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8

### Тема: Решение матричной игры методом итераций

**Цель работы:** научиться выбирать оптимальную стратегию игры

**Оборудование:** ПК, программное обеспечение – MS Excel, инструкции по выполнению работы.

### Содержание работы:

#### Задание 1:

Два предприятия производят продукцию и поставляют ее на рынок региона. Они являются единственными поставщиками продукции в регион, поэтому полностью определяют рынок данной продукции в регионе.

Каждое из предприятий имеет возможность производить продукцию с применением одной из трех различных технологий. В зависимости от качества продукции, произведенной по каждой технологии, предприятия могут установить цену единицы продукции на уровне 12, 8 и 4 денежных единиц соответственно. При этом предприятия имеют различные затраты на производство единицы продукции.

Таблица 1. Затраты на единицу продукции, произведенной на предприятиях региона (д.е.)

Технология	Цена реализации единицы продукции, д.е.	Полная себестоимость единицы продукции, д.е.	
		Предприятие А	Предприятие В
1	12	8	10
2	8	5	4
3	4	2	1

В результате маркетингового исследования рынка продукции региона была определена функция спроса на продукцию:  $Y = 10 - 0,6 \cdot X$ , где  $Y$  – количество продукции, которое приобретет население региона (тыс. ед.), а  $X$  – средняя цена продукции предприятий, д.е.

Значения долей продукции предприятия А, приобретенной населением, зависят от соотношения цен на продукцию предприятия А и предприятия В. В результате маркетингового исследования эта зависимость установлена и значения вычислены.

Цена реализации 1 ед. продукции, д.е.		Доля продукции предприятия А, купленной населением
Предприятие А	Предприятие В	
12	12	0,31
12	8	0,33
12	4	0,18
8	12	0,7
8	8	0,3
8	4	0,2
4	12	0,92
4	8	0,85
4	4	0,72

В задаче необходимо определить:

1. Существует ли в данной задаче ситуация равновесия при выборе технологий производства продукции обоими предприятиями?
2. Существуют ли технологии, которые предприятия заведомо не будут выбирать вследствие невыгодности?
3. Сколько продукции будет реализовано в ситуации равновесия? Какое предприятие окажется в выигрышном положении?

Решение: Одной из главных задач каждого предприятия является максимизация прибыли от реализации продукции. Но в данном случае более важной проблемой является конкурентная борьба. В конкурентном конфликте выигрыш будет определяться не размером прибыли каждого предприятия, а разностью их прибылей. При таком подходе конфликт можно рассматривать как матричную игру двух игроков с нулевой суммой, т.к. выигрыш одного предприятия равен проигрышу другого.

Формализуем конфликтную ситуацию – составим платежную матрицу. Для этого определим стратегии каждого игрока:

A1 – предприятие А выбирает технологию 1

A2 – предприятие А выбирает технологию 2

A3 – предприятие А выбирает технологию 3

B1 – предприятие В выбирает технологию 1

B2 – предприятие В выбирает технологию 2

B3 – предприятие В выбирает технологию 3

Элементами платежной матрицы будет разность прибыли предприятия А и предприятия В.

Найдем  $a_{11}$  (выбраны стратегии A1 и B1 – оба предприятия реализуют продукцию по 12 д.е.)

Прибыль = Доход – Затраты

И доход и затраты зависят от количества купленной населением продукции, которое определяется функцией спроса  $Y = 10 - 0,6 \cdot X$ .

Средняя цена на продукцию равна:  $X = (12 + 12)/2 = 12$ .

Значит,  $Y = 10 - 0,6 \cdot 12 = 10 - 7,2 = 2,8$  (тыс. ед.)

Из таблицы 2 следует, что у предприятия А купят 31% от всей купленной населением продукции:  $2,8 \text{ тыс. ед.} \cdot 31\% = 2800 \text{ ед.} \cdot 0,31 = 868 \text{ ед.}$

Тогда у предприятия В купят 69% от всей купленной населением продукции:  $2,8 \text{ тыс. ед.} \cdot 69\% = 2800 \text{ ед.} \cdot 0,69 = 1932 \text{ ед.}$  или  $2800 - 868 = 1932$  (ед.)

Значит: Прибыль А =  $868 \cdot 12 - 868 \cdot 8 = 868 \cdot (12 - 8) = 868 \cdot 4 = 3472$  д.е. Прибыль В =  $1932 \cdot (12 - 10) = 1932 \cdot 2 = 3864$  д.е.

$a_{11} = 3472 - 3864 = -392$  (ед.) =  $-0,392$  (тыс. ед.)

Можно использовать следующую формулу для расчета элементов платежной матрицы:

$$a_{ij} = (10 - 0,3 \cdot (p_1 + p_2)) \cdot 1000 \cdot (d \cdot (p_1 - s_1) - (1 - d) \cdot (p_2 - s_2)),$$

где  $p_1$  – стоимость реализации единицы продукции предприятием А при выборе им стратегии  $A_i$ ;

$p_2$  – стоимость реализации единицы продукции предприятием В при выборе им стратегии  $B_j$ ;

$s_1$  – себестоимость единицы продукции предприятия А при выборе им стратегии  $A_i$ ;

$s_2$  – себестоимость единицы продукции предприятия В при выборе им стратегии  $B_j$ ;

$d$  – доля продукции предприятия А, купленной населением при ценах  $p_1$  и  $p_2$ .

Для простоты выполним все расчеты в Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Цена реализации 1 ед. продукции, д.е.		Доля продукции предприятия А, купленной населением	Технология	Цена реализации единицы продукции, д.е.	Полная себестоимость единицы продукции, д.е.	
2		Предприятие А	Предприятие В				Предприятие А	Предприятие В
3		12	12	0,31	1	12	8	10
4		12	8	0,33	2	8	5	4
5		12	4	0,18	3	4	2	1
6		8	12	0,7				
7		8	8	0,3				
8		8	4	0,2				
9		4	12	0,92				
10		4	8	0,85				
11		4	4	0,72				
12								
13		A1	A2	A3				
14	B1	a11*0,001	a12*0,001	a13*0,001				
15	B2	a21*0,001	a22*0,001	a23*0,001				
16	B3	a31*0,001	a32*0,001	a33*0,001				
17								
18		A1	A2	A3				
19	B1		-0,392	-5,44	-9,048			
20	B2		6	-9,88	-11,52			
21	B3		8,736	7,04	4,56			
22								

После введенных данных определим на том же листе формулы для расчета.

	A	B	C	D
13	A1		A2	A3
14	B1	a11*0,001	a12*0,001	a13*0,001
15	B2	a21*0,001	a22*0,001	a23*0,001
16	B3	a31*0,001	a32*0,001	a33*0,001
17				
18	A1		A2	A3
19	B1	=0,001*((10-0,3*(B3+C3))*1000*(D3*(B3-G3)-(1-D3)*(C3-H3)))	=0,001*((10-0,3*(B4+C4))*1000*(D4*(B4-G3)-(1-D4)*(C4-H4)))	=0,001*((10-0,3*(B5+C5))*1000*(D5*(B5-G3)-(1-D5)*(C5-H5)))
20	B2	=0,001*((10-0,3*(B6+C6))*1000*(D6*(B6-G4)-(1-D6)*(C6-H3)))	=0,001*((10-0,3*(B7+C7))*1000*(D7*(B7-G4)-(1-D7)*(C7-H4)))	=0,001*((10-0,3*(B8+C8))*1000*(D8*(B8-G4)-(1-D8)*(C8-H5)))
21	B3	=0,001*((10-0,3*(B9+C9))*1000*(D9*(B9-G5)-(1-D9)*(C9-H3)))	=0,001*((10-0,3*(B10+C10))*1000*(D10*(B10-G5)-(1-D10)*(C10-H4)))	=0,001*((10-0,3*(B11+C11))*1000*(D11*(B11-G5)-(1-D11)*(C11-H5)))

	C	D
13	A2	A3
14	a12*0,001	a13*0,001
15	a22*0,001	a23*0,001
16	a32*0,001	a33*0,001
17		
18	A2	A3
19	=0,001*((10-0,3*(B4+C4))*1000*(D4*(B4-G3)-(1-D4)*(C4-H4)))	=0,001*((10-0,3*(B5+C5))*1000*(D5*(B5-G3)-(1-D5)*(C5-H5)))
20	=0,001*((10-0,3*(B7+C7))*1000*(D7*(B7-G4)-(1-D7)*(C7-H4)))	=0,001*((10-0,3*(B8+C8))*1000*(D8*(B8-G4)-(1-D8)*(C8-H5)))
21	=0,001*((10-0,3*(B10+C10))*1000*(D10*(B10-G5)-(1-D10)*(C10-H4)))	=0,001*((10-0,3*(B11+C11))*1000*(D11*(B11-G5)-(1-D11)*(C11-H5)))
22		
23	A3	
24	a13*0,001	
25	a23*0,001	
26	a33*0,001	
27		
28	A3	
29	=0,001*((10-0,3*(B5+C5))*1000*(D5*(B5-G3)-(1-D5)*(C5-H5)))	
30	=0,001*((10-0,3*(B8+C8))*1000*(D8*(B8-G4)-(1-D8)*(C8-H5)))	
31	=0,001*((10-0,3*(B11+C11))*1000*(D11*(B11-G5)-(1-D11)*(C11-H5)))	

Проведя все расчеты, получаем платежную матрицу (в тыс. ед.):



	B1	B2	B3
A1	-0,392	-5,44	-9,048
A2	6	-9,88	-11,52
A3	8,736	7,04	4,56

1. Проверим наличие ситуации равновесия – седловой точки. Для этого найдем нижнюю и верхнюю цены игры.

В каждой строчке определим минимальный элемент и запишем его в новом столбце, а из найденных минимальных выберем максимальный:  $\alpha = 4,56$  – нижняя цена игры. В каждом столбце найдем максимальный элемент и запишем их в новой строке и из них выберем минимальный  $\alpha = 4,56$  – верхняя цена игры.

	B1	B2	B3	Мин
A1	-0,392	-5,44	-9,048	-9,048
A2	6	-9,88	-11,52	-11,52
A3	8,736	7,04	4,56	4,56
Макс	8,736	7,04	4,56	

Так как  $\alpha = \alpha = 4,56$ , то в конфликтной ситуации есть точка равновесия – седловая точка, которую образуют стратегии (A3, B3).

Если одно предприятие будет придерживаться своей оптимальной стратегии, то самое лучшее поведение второго предприятия – также придерживаться своей оптимальной стратегии. В приложении к условию это означает, что предприятиям необходимо использовать свои третьи технологии и минимальные цены реализации.

2. Определим наличие заведомо невыгодных стратегий у предприятий.

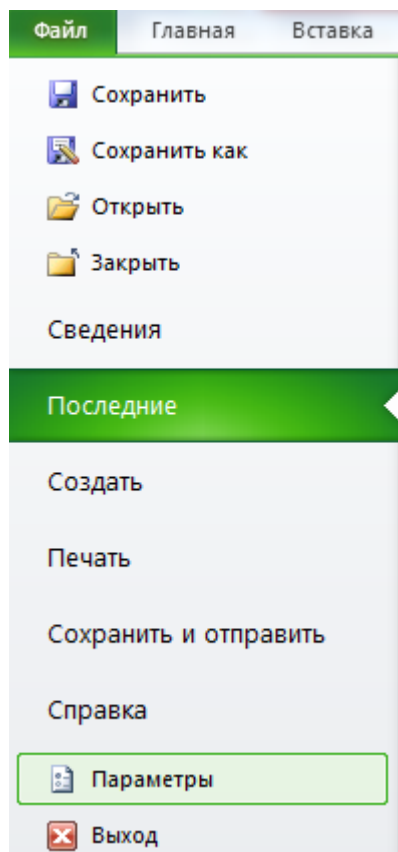
Так как элементы третьей строки больше соответствующих элементов первой строки и второй строки, то стратегии A1 и A2 – заведомо невыгодные, так как предприятие A стремится максимизировать разницу прибылей.

Аналогично для предприятия B. Все элементы третьего столбца меньше соответствующих элементов первого и второго столбцов, значит стратегии B1 и B2 – заведомо невыгодные (доминируемые).

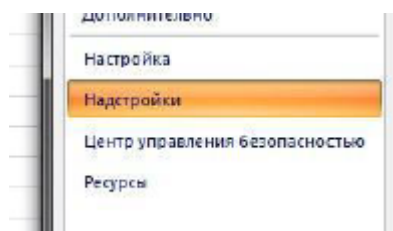
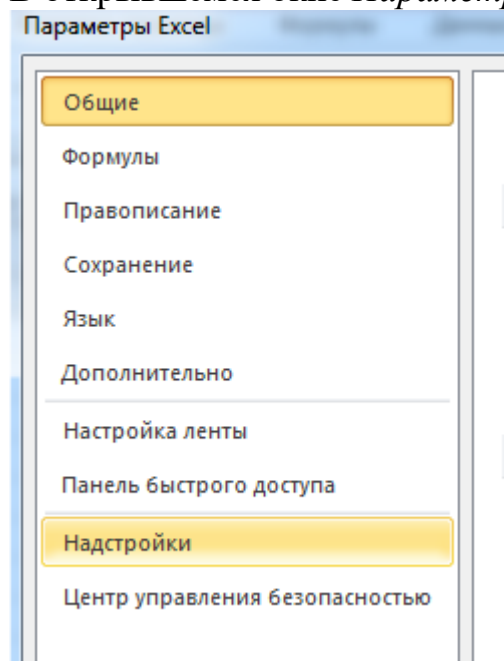
3. В ситуации равновесия будет реализовано 7600 единиц продукции ( $Y = 10 - 0,6 * (4 + 4)/2 = 7,6$ ). У первого предприятия купят  $7600 * 0,72 = 5472$  ед. продукции, а у второго  $7600 * 0,28 = 2128$  ед. продукции. В выигрышном положении будет предприятие A.

Проверить решение задач в Excel. Алгоритм решения типового примера

Для того чтобы решать задачи линейного программирования, в Excel есть надстройка, которая называется «Поиск решения». Для начала надо проверить подключена ли она. Если у вас Excel 2010/07, то выполните команду *Файл – Параметры*



В открывшемся окне *Параметры Excel* выберите *Настройки*



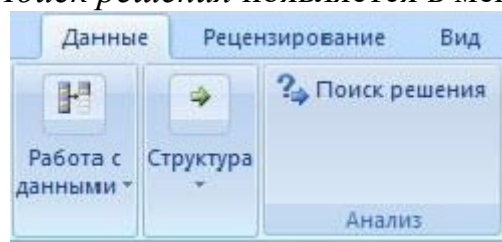
И смотрите, какие из них уже активны. Выбираете *Поиск решения*



## Надстройки

Имя ^	Расположение
<b>Активные надстройки приложений</b>	
<i>Отсутствуют активные надстройки приложений</i>	
<b>Неактивные надстройки приложений</b>	
Microsoft Actions Pane 3	
Дата (XML)	C:\...icrosoft shared\Smart Tag\MOFL.DLL
Инструменты для евро	C:\...e\Office14\Library\EUROTOOL.XLAM
Колонтитулы	C:\...crosoft Office\Office14\OFFRHD.DLL
Настраиваемые XML-данные	C:\...crosoft Office\Office14\OFFRHD.DLL
Невидимое содержимое	C:\...crosoft Office\Office14\OFFRHD.DLL
Пакет анализа	C:\...fice14\Library\Analysis\ANALYSIS32.XLL
Пакет анализа - VBA	C:\...14\Library\Analysis\ATPVBAEN.XLAM
<b>Поиск решения</b>	<b>C:\...ice14\Library\SOLVER\SOLVER.XLAM</b>
Скрытые листы	C:\...crosoft Office\Office14\OFFRHD.DLL

После этого пункт *Поиск решения* появляется в меню *Данные*.



Теперь нужно подготовить типовой задачи для вставки в Excel. Когда в матрице есть элементы  $\leq 0$ , то надо прибавить ко всей матрице одно такое число, чтобы все элементы стали  $> 0$ . Для наглядности покажем решение примера. Делаем в Excel табличку, куда записываем наши ограничения, и оставляем ячейки для иксов, суммы иксов и оптимальной стратегии для первого игрока  $p^*$ . Иксов нам нужно столько, сколько у нас в матрице строк.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	X <sub>1</sub>		Ограничения (чтобы были больше нуля, прибавили 12)	11,608	6,560	2,952	условие	-0,392	-5,440	-9,048
2	X <sub>2</sub>	0		18,000	2,120	0,480		6,000	-9,880	-11,520
3	X <sub>3</sub>	0		20,736	19,040	16,560		8,736	7,040	4,560
4	Сумма A	=СУММ(B1:B3)		=СУММПРОИЗВ(\$B\$1:\$B\$3;D1:D3)						
5	P*:	=(1/СУММ(\$B\$1:\$B\$3))*B1								
6		=(1/СУММ(\$B\$1:\$B\$3))*B2								
7		=(1/СУММ(\$B\$1:\$B\$3))*B3								
8										

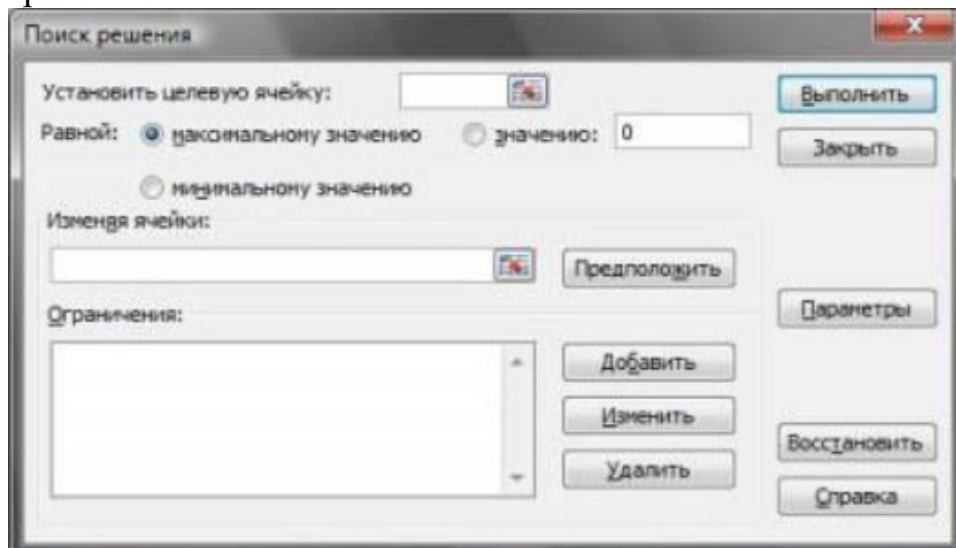
Дальше вставляем в ячейки иксов нули, а для их суммы пишем в ячейку формулу =СУММ(B1:B3), т.е. суммировать все ячейки в диапазоне от B1 до B3. Если у вас больше иксов, то просто замените B3 на ячейку последнего икса (например, для четырех иксов =СУММ(B1:B4)).

Чтобы автоматически считалась оптимальная стратегия  $p^*$ , напишите в первой ее ячейке формулу =(1/СУММ(\$B\$1:\$B\$3))\*B1 и растяните ее вниз на столько ячеек, сколько у вас иксов, не забывая исправлять \$B\$3 на нужную, если у вас больше двух иксов. Ячейка здесь записывается со знаками \$, чтобы при растягивании она не сбилась, а осталась такой же. Excel напишет ошибку деления на 0, но все в порядке – иксы у нас пока и вправду нулевые.

Теперь нам нужно записать формулы ограничений. Ставим курсор в ячейку под первым столбиком ограничений и пишем туда =СУММПРОИЗВ(\$B\$1:\$B\$3;D1:D3), меняя, если нужно, адреса ячеек с иксами и адреса с первым столбиком ограничений. Такая формула

просуммирует все произведения иксов на нужные числа из матрицы. Теперь копируем эту формулу вправо на все столбцы.

Теперь все готово, и можно искать решение. Вызываем меню *Поиск решения*, открывается такое окно:



Целевой ячейкой устанавливаете ячейку с суммой иксов (у меня это \$B\$4). Переключатель ниже устанавливаете на «равной минимальному значению». Потом нажмете кнопку «Предположить», и если вы вписали в иксы нули, то в окне автоматически появится диапазон ячеек иксов. Далее вводим ограничения, всего их два: все иксы  $\geq 0$  и все ограничения  $\geq 1$ . Можно не выделять каждую клетку отдельно, а добавить весь диапазон для ограничений сразу, вот так:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	X <sub>1</sub>		Ограничения (чтобы были больше нуля, прибавили 12)	11,608	6,660	2,952	условие	-0,392	-5,440	-9,048
2	X <sub>2</sub>			18,000	2,120	0,480		6,000	-9,880	-11,620
3	X <sub>3</sub>	0,060386473		20,736	19,040	16,560		6,736	7,040	4,560
4	Сумма A	0,060386473		1,2522	1,1498	1				
5	P:	0								
6		0								
7		1								
8										
9										
10										
11										
12										
13										



Нажимаете «Добавить», записываете другое ограничение и нажимаете «ОК». Если вы все сделали правильно, вы увидите примерно такое заполненное окно:

**Параметры поиска решения**

Оптимизировать целевую функцию:

До: ☐ Максимум ☒ Минимум ☐ Значения:

Изменяя ячейки переменных:

В соответствии с ограничениями:

Добавить

Изменить

Удалить

Сбросить

Загрузить/сохранить

☒ Сделать переменные без ограничений неотрицательными

Выберите метод решения:

Параметры

Метод решения

Для гладких нелинейных задач используйте поиск решения нелинейных задач методом ОПГ, для линейных задач - поиск решения линейных задач симплекс-методом, а для негладких задач - эволюционный поиск решения.

Справка

Найти решение

Закрыть

Все готово, нажмете «Выполнить». Если все Ок, то появится такое окно:

**Результаты поиска решения**

Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.

Тип отчета

Результаты  
Устойчивость  
Пределы

☒ Сохранить найденное решение

☐ Восстановить исходные значения

ОК

Отмена

Сохранить сценарий...

Справка

Можно нажать *ОК* и наслаждаться результатом – в ячейках  $x$  стоят нужные значения, а в ячейках  $p^*$  нас ждет уже посчитанная оптимальная стратегия для первого игрока!

Это стратегия 3. Подставляя в формулу получаем ответ  $Y = 10 - 0,6 * (4 + 4)/2 = 7,6$  (тыс.ед)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	$x_1$		Ограничения (чтобы были больше нуля, прибавили 12)	11,608	6,560	2,952	условие	-0,392	-5,440	-9,048
2	$x_2$		0	18,000	2,120	0,480		6,000	-9,880	-11,520
3	$x_3$	0,060386473		20,736	19,040	16,560		8,736	7,040	4,560
4	Сумма A	0,060386473		1,2522	1,1498	1				
5	$p^*$		0							
6			0							
7			1							

Оптимальную стратегию для второго игрока считать абсолютно так же – игроков должно быть по количеству столбцов, в окне решения надо указать уже «равной максимальному значению», а ограничения должны быть  $\leq 1$ . Выглядит это примерно так:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Условие	-0,392	-5,44	-9,048	В ограничения (чтобы были больше нуля, прибавили 12)	11,608	6,560
2		6	-9,88	-11,52		18,000	2,120
3		8,736	7,04	4,56		20,736	19,040
4							
5						0	0
6						Y1	Y2
H	I	J	K	L	M	N	O
2,952	=СУММПРОИЗВ(\$F\$5:\$H\$5;F1:H1)						
0,480	=СУММПРОИЗВ(\$F\$5:\$H\$5;F2:H2)						
16,560	=СУММПРОИЗВ(\$F\$5:\$H\$5;F3:H3)						
0,060386	=СУММ(F5:H5)		= (1/СУММ(\$F\$5:\$H\$5))*F5		= (1/СУММ(\$F\$5:\$H\$5))*G5		= (1/СУММ(\$F\$5:\$H\$5))*J5
Y3	сумма Y						

	A	B	C	D	E	F	G
1	Условие	-0,392	-5,440	-9,048	Ограничения (чтобы были больше нуля, прибавили 12)	11,608	6,56
2		6,000	-9,880	-11,520		18	2,12
3		8,736	7,040	4,560		20,736	19,04
4							
5						0	0
6						Y1	Y2
H	I	J	K	L	M		
2,952		0					
0,48		0					
16,56		0					
0	0	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!		
Y3	сумма Y	q*					

Результат решения

	A	B	C	D	E	F	G
1	Условие	-0,392	-5,440	-9,048	Ограничения (чтобы были больше нуля, прибавили 12)	11,608	6,56
2		6,000	-9,880	-11,520		18	2,12
3		8,736	7,040	4,560		20,736	19,04
4							
5						0	0
6						Y1	Y2
H	I	J	K	L			
2,952	0,178261						
0,48	0,028986						
16,56	1						
0,06039	0,060386	0	0	1			
Y3	сумма Y	q*					

Для второго игрока является оптимальной третья стратегия, что соответствует ответу.

### Задание 2:

Две компании, занимающиеся производством антивирусного программного обеспечения, практически полностью делят рынок некоторого региона. Разрабатывая новую версию программного продукта для мобильных телефонов, каждая из компаний может использовать один из четырех

вариантов продвижения нового программного продукта на рынок, который влияет на конечную стоимость продукции.

В зависимости от сделанного выбора компании могут установить цену реализации единицы продукции на уровне 25, 22, 19 и 16 условных единиц соответственно. Соотношение цен реализации и себестоимость представлены в таблице:

Вариант продвижения нового продукта	Цена реализации единицы продукции, у.е.	Полная себестоимость единицы продукции, у.е.	
		Компания А	Компания В
1	25	17	$21 - 0,1 * N$
2	22	15	$10 + 0,1 * N$
3	19	$10 + 0,1 * N$	10

N – номер варианта, предложенный преподавателем.

В результате маркетингового исследования рынка была определена функция спроса на программные продукты:  $Y = 20 - 0,5 * X$ , где Y – количество продукции, которое будет реализовано в регионе (тыс. ед.), а X – средняя цена продукции компаний, у.е.

Значения долей продукции, реализованной компанией А, зависят от соотношения цен на продукцию компании А и компании В. Маркетинговое исследование позволило установить эту зависимость:

Цена реализации 1 ед. продукции, у.е.		Доля реализованной продукции компании А
Компания А	Компания В	
25	25	0,31
25	22	0,33
25	19	0,25
25	16	0,2
22	25	0,4
22	22	0,35
22	19	0,32
22	16	0,28
19	25	0,52
19	22	0,48
19	19	0,4
19	16	0,35
16	25	0,6
16	22	0,58
16	19	0,55
16	16	0,5

1. Существует ли в данной задаче ситуация равновесия при выборе варианта продвижения продукта на рынок обоими компаниями?
2. Существуют ли варианты, которые компании заведомо не будут выбирать вследствие невыгодности?
3. Сколько продукции будет реализовано в ситуации равновесия? Какая компания получит больше прибыль в ситуации равновесия? Какая компания будет иметь большую долю рынка в ситуации равновесия? Дайте краткую экономическую интерпретацию результатов решения задачи.



## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 9

**Тема: Выбор оптимального решения с помощью дерева решений.**

**Цель работы:** освоение основных методов и способов построения деревьев решений, приобретение практических навыков по использованию инструментария Deductor 4.

**Оборудование:** ПК, программное обеспечение – MS Excel, инструкции по выполнению работы.

### **Справочный материал:**

Деревья решений (decision trees) являются одним из самых мощных средств решения задачи отнесения какого-либо объекта (строки набора данных) к одному из заранее известных классов.

Результатом работы алгоритма является список иерархических правил образующих дерево. Каждое правило – это интуитивно-понятная конструкция вида «Если...то...» (if - then). Дерево может использоваться для классификации объектов, не вошедших в обучающее множество. Чтобы принять решение, к какому классу следует отнести некоторый объект или ситуацию, требуется ответить на вопросы, стоящие в узлах этого дерева, начиная с его корня. Вопросы имеют вид «значение параметра А больше В?». Если ответ положительный, осуществляется переход к правому узлу следующего уровня; затем снова следует вопрос, связанный с соответствующим узлом и т. д.

### **Настройка назначения полей**

Необходимо определить, как будут использоваться поля исходного набора данных при обучении дерева и дальнейшей практической работе с ним. В левой части окна представлен список всех полей исходного набора данных. Для настройки поля следует выделить его в списке, при этом в правой части окна будут отображены текущие параметры поля:

1. Имя поля – идентификатор поля, определенный для него в источнике данных. Изменить его здесь нельзя.
2. Тип данных – тип данных, содержащихся в поле (вещественный, строковый, дата). Он также задается в источнике данных и здесь изменен быть не может.
3. Назначение – здесь необходимо выбрать порядок использования данного поля при обучении и работе дерева решений. Выбор производится с помощью списка, открываемого кнопкой и содержащего следующие варианты:

- Входное – значения поля будут являться исходными данными для построения и дальнейшей практической работы дерева решений, на их основе будет производиться классификация.

- Выходное – будет содержать результаты классификации. Выходное поле может быть только одно и оно должно быть дискретным.

- Информационное – поле не будет использоваться при обучении дерева, но будет помещено в результирующий набор в исходном состоянии.

- Неиспользуемое – поле не будет использоваться при построении и работе дерева решений и будет исключено из результирующей выборки. В

отличие от непригодного, такое поле может быть использовано, если в этом возникнет необходимость.

– Непригодное – поле не может быть использовано при построении и работе алгоритма, но будет помещено в результирующий набор в исходном состоянии.

4. Вид данных – указывает на характер данных, содержащихся в поле (непрерывный или дискретный). Изменить это свойство здесь нельзя.

Статус непригодного поля устанавливается только автоматически и в дальнейшем может быть изменен только на неиспользуемое или информационное. Поле будет запрещено к использованию если:

- поле является дискретным и содержит всего одно уникальное значение;
- непрерывное поле с нулевой дисперсией;
- поле содержит пропущенные значения.

В случае если текущее поле содержит непрерывные (числовые) данные, отображается секция «Статистика», где показываются максимальное и минимальное значения поля, его среднее значение и стандартное отклонение. Если выделенное поле содержит дискретные (строковые) данные, то для него открывается секция «Уникальные значения», в которой отображается общее число уникальных значений поля, а также список самих уникальных значений.

#### Нормализация полей

Целью нормализации значений полей является преобразование данных к виду, наиболее подходящему для обработки средствами пакета Deductor. Для дерева решений данные, поступающие на вход, должны иметь числовой тип. В этом случае нормализатор может преобразовать дискретные данные к набору уникальных индексов.

Окно настройки нормализации полей вызывается с помощью кнопки «Настройка нормализации». В окне слева приведен полный список входных и выходных полей. При этом каждое поле помечено значком, обозначающим вид нормализации поля:

- линейная – линейная нормализация исходных значений;
- уникальные значения – преобразование уникальных значений в их индексы.

Для числовых (непрерывных) полей с линейной нормализацией дополнительные параметры недоступны. В полях «Минимум» и «Максимум» секции «Диапазон значений» можно посмотреть минимальное и максимальное значения этого поля.

Для дискретных полей справа находится список уникальных значений поля, где для каждого значения указывается количество его повторений. Поле «Количество значений» показывает общее число уникальных значений, принимаемых полем.

#### Настройка обучающей выборки

Обучающая выборка может быть разбита на три множества – обучающее, тестовое и валидационное.



1. Обучающее множество – включает записи (примеры), которые будут использоваться в качестве входных данных, а также соответствующие желаемые выходные значения.
2. Тестовое множество – также включает записи, содержащие входные и желаемые выходные значения, но используемое не для обучения модели, а для проверки его результатов.
3. Валидационное множество – множество примеров, используемое как для оценки результатов обучения модели, так и определения ее параметров.

Для разбиения исходного множества на обучающее, тестовое и валидационное необходимо настроить несколько параметров:

1. Из списка «Способ разделения исходного множества» выбирается порядок отбора записей во все три множества. Если выбран вариант «по порядку», то порядок следования записей при их разделении не меняется. Множества последовательно формируются в соответствии с определенным для них числом записей. Если выбран вариант «случайно», то отбор записей происходит случайным образом.
2. Затем необходимо указать, какие множества будут использоваться. Для того чтобы множество было сформировано, нужно установить флажок слева от его названия. Если флажок сброшен, то множество использовано не будет. Обучающее множество используется всегда, поэтому сбросить флажок для него нельзя.
3. Для каждого из используемых множеств необходимо задать его размер. Размер может быть задан непосредственно количеством записей или в процентах от объема исходной выборки. Для этого достаточно дважды щелкнуть мышью в соответствующей клетке и ввести нужное значение с клавиатуры. При этом размер, введенный в процентах, автоматически пересчитывается в количество строк и наоборот. В поле «Количество строк (всего)» отображается общее количество записей в исходной выборке данных, которое может быть задействовано для формирования множеств. Если суммарное число строк для всех используемых множеств меньше полного числа строк исходной выборки, то размеры множеств можно задавать произвольно. Можно, например, использовать не все записи, а только часть из них. Если же суммарное указанное число строк превышает максимальное для данной исходной выборки, то автоматически включается баланс множеств, т.е. при указании для одного из множеств размера, в результате которого будет превышено максимальное число записей в исходной выборке, размер остальных множеств будет автоматически уменьшен таким образом, чтобы суммарный размер множеств не превышал доступного числа записей. В строке «Итого» указывается количество записей, задействованных во всех используемых множествах, а также процент от полного числа записей исходной выборки, который они составляют.
4. В столбце «Порядок сортировки» можно определить порядок следования записей внутри каждого множества. Для этого необходимо дважды щелкнуть мышью в столбце «Порядок сортировки» для соответствующего

множества и с помощью появившейся кнопки выбора открыть список, в котором выбрать один из возможных вариантов:

- по возрастанию – записи в данном множестве будут следовать в порядке возрастания;
- по убыванию – записи в данном множестве будут следовать в порядке убывания;
- случайно – записи в данном множестве будут следовать в случайном порядке.

Для того чтобы обучающее множество было репрезентативным необходимо, чтобы все уникальные значения всех дискретных столбцов содержались в данном наборе данных.

#### Настройка параметров обучения

Необходимо установить параметры, в соответствии с которыми будет проводиться обучение дерева:

1. «Минимальное количество примеров, при котором будет создан новый узел» – задается минимальное количество примеров, которое возможно в узле. Если примеров, которые попадают в данный узел, будет меньше заданного – узел считается листом (т.е. дальнейшее ветвление прекращается).
2. «Строить дерево с более достоверными правилами в ущерб сложности» – установка данного флажка включает специальный алгоритм, который, усложняя структуру дерева, увеличивает достоверность результатов классификации. Сброс данного флажка хотя и приводит к упрощению дерева, снижает достоверность результатов классификации.
3. «Уровень доверия, используемый при отсечении узлов дерева». Значение этого параметра задается в процентах и должно лежать в пределах от 0 до 100. Эти значения выбираются из списка. Чем больше уровень доверия, тем более ветвистым получается дерево, и, соответственно, чем меньше уровень доверия, тем больше узлов будет отсечено при его построении.

**Задание 1.** Разработать сценарии построения дерева решений и проведения анализа «что - если».

2. По таблице (например, продаж) создать таблицу транзакций с полями (например, Менеджер, Организация, Вид товара). Таблицу получить путем слияния соответствующих полей из разных таблиц и последующей группировки.
3. Разработать сценарии построения дерева решений с представлением правил, наиболее популярных наборов и анализа «что - если» с входными полями (например, Менеджер и Организация) и выходным полем (например, Вид товара).
4. Создать отчеты по всем разработанным сценариям.
5. Продемонстрировать проект преподавателю с использованием тестовых наборов данных и защитить работу.

## **Информационное обеспечение обучения**

### **Печатные и электронные издания:**

#### **Основные учебные издания:**

1. Костюкова, Н. И. Основы математического моделирования: учебное пособие для СПО / Н. И. Костюкова. — Саратов: Профобразование, 2021. — 219 с. — ISBN 978-5-4488-1001-5. — Текст: электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование: [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/102194>

#### **Дополнительные учебные издания:**

2. Губарь, Ю. В. Введение в математическое моделирование: учебное пособие для СПО / Ю. В. Губарь. — Саратов: Профобразование, 2021. — 178 с. — ISBN 978-5-4488-0991-0. — Текст: электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование: [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/102184>
3. Губарь, Ю. В. Введение в математическое программирование: учебное пособие для СПО / Ю. В. Губарь. — Саратов: Профобразование, 2021. — 225 с. — ISBN 978-5-4488-0992-7. — Текст: электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование: [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/102185>

#### **Интернет-ресурсы:**

4. Учебники по программированию <http://programm.ws/index.php>

#### **Электронно-библиотечная система:**

5. ЭБС «IPRbooks», ООО «Ай Пи Ар Медиа»
6. ЭБС «Znanium»
7. ЭБС «PROФобразование»
8. ЭБС «Book.ru»