

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Саратовский государственный технический университет имени  
Гагарина Ю.А.»

Филиал федерального государственного бюджетного образовательного  
учреждения высшего образования  
«Саратовский государственный технический университет имени  
Гагарина Ю.А.» в г. Петровске



УТВЕРЖДАЮ

Директор филиала СГТУ  
имени Гагарина Ю.А. в г.Петровске  
Е.А.Бесшаношникова  
«26» июня 2024 г.

## **МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ**

по дисциплине  
ОУД.11 «Математика»

Специальности

09.02.07 Информационные системы и программирование

Методические указания рассмотрены  
на заседании предметной (цикловой) комиссии  
общеобразовательных, ОГСЭ и ЕН дисциплин,  
профессиональных модулей специальностей  
социально-экономического профиля  
«14» июня 2024 года, протокол № 12

Председатель ПЦК Мед /Медведева О.В./

Петровск 2024

## Пояснительная записка

Методические указания по выполнению практических работ подготовлены на основе рабочей программы учебной дисциплины «Математика», разработанной на основе ФГОС СПО по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование и соответствующих общих (ОК) компетенций:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения.

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях.

Целью освоения учебной дисциплины «Математика» является:

- обеспечение сформированности представлений о социальных, культурных и исторических факторах становления математики;
- обеспечение сформированности логического, алгоритмического и математического мышления;
- обеспечение сформированности умений применять полученные знания при решении различных задач;
- обеспечение сформированности представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления.

При выполнении практических работ студент должен **уметь**:

- выполнять вычисление значений и преобразования выражений со степенями и логарифмами, преобразования дробно-рациональных выражений;
- находить производные элементарных функций, используя справочные материалы;

- исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций;
- строить графики многочленов с использованием аппарата математического анализа;
- применять производную при решении задач на движение;
- решать практико-ориентированные задачи на наибольшие и наименьшие значения, нахождение пути, скорости и ускорения;
- строить графики изученных функций, использовать графики при изучении процессов и зависимостей, при решении задач из других учебных предметов и задач из реальной жизни;
- выражать формулами зависимости между величинами;
- решать текстовые задачи разных типов (в том числе на проценты, доли и части, на движение, работу, стоимость товаров и услуг, налоги, задачи из области управления личными и семейными финансами);
- составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов;
- оценивать размеры объектов окружающего мира;
- изображать многогранники и поверхности вращения, их сечения от руки, с помощью чертежных инструментов и электронных средств; умение распознавать симметрию в пространстве; умение распознавать правильные многогранники;
- находить с помощью изученных формул координаты середины отрезка, расстояние между двумя точками;
- вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь, объем, площадь поверхности), используя изученные формулы и методы.

При выполнении практических и лабораторных работ студент должен **знать:**

- методы доказательств, алгоритмы решения задач;
- определения, аксиомы и теоремы, применять их, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;
- понятия степень числа, логарифм числа; рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения и неравенства, их системы; функция, непрерывная функция, производная, первообразная, определенный интеграл; рациональная функция, показательная функция, степенная функция, логарифмическая функция, тригонометрические функции, обратные функции;
- понятия точка, прямая, плоскость, пространство, двугранный угол, скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; многогранник, сечение

многогранника, куб, параллелепипед, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, сечения фигуры вращения, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, площадь сферы, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара;

– понятия движение в пространстве, подобные фигуры в пространстве; прямоугольная система координат, координаты точки, вектор, координаты вектора, скалярное произведение, угол между векторами, сумма векторов, произведение вектора на число.

Содержание практических занятий определено рабочей программой и тематическим планированием, соответствует теоретическому материалу изучаемых разделов учебной дисциплины.

Объем практических занятий по дисциплине определяется учебным планом по данной специальности.

Продолжительность практического занятия - 2 академических часа. Перед проведением практического занятия преподавателем организуется инструктаж, а по ее окончании – обсуждение итогов.

Комплект методических указаний по выполнению практических работ дисциплины «Математика» содержит 66 практических занятий.

### **Перечень практических работ по дисциплине «Математика»**

#### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1.**

Тема: Числа и вычисления. Выражения и преобразования.

#### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2.**

Тема: Процентные вычисления.

#### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3.**

Тема: Уравнения и неравенства.

#### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4.**

Тема: Системы уравнений и неравенств.

#### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5.**

Тема: Входной контроль.

#### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6.**

Тема: Параллельность прямых, прямой и плоскости, плоскостей.

#### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 7.**

Тема: Перпендикулярность прямых, прямой и плоскости, плоскостей.

#### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8.**

Тема: Решение задач. Прямые и плоскости в пространстве.

#### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 9.**

Тема: Декартовы координаты в пространстве. Расстояние между двумя точками. Координаты середины отрезка.

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 10.**

Тема: Векторы в пространстве. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов.

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 11.**

Тема: Решение задач. Координаты и векторы.

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 12.**

Тема: Синус, косинус, тангенс суммы и разности двух углов. Синус и косинус двойного угла. Формулы половинного угла.

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 13.**

Тема: Функции, их свойства. Способы задания функций.

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 14.**

Тема: Преобразование графиков тригонометрических функций.

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 15.**

Тема: Тригонометрические уравнения и неравенства.

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 16.**

Тема: Решение задач. Основы тригонометрии. Тригонометрические функции.

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 17.**

Тема: Комплексные числа.

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 18.**

Тема: Применение комплексных чисел.

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 19.**

Тема: Понятие производной. Формулы и правила дифференцирования.

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 20.**

Тема: Производные суммы, разности, произведения, частного.

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 21.**

Тема: Производные тригонометрических функций. Производная сложной функции.

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 22.**

Тема: Понятие о непрерывности функции. Метод интервалов.

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 23.**

Тема: Геометрический и физический смысл производной.

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 24.**

Тема: Физический смысл производной в профессиональных задачах.

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 25.**

Тема: Монотонность функции. Точки экстремума.

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 26.**

Тема: Исследование функций и построение графиков.

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 27.**

Тема: Решение задач. Производная функции, ее применение.

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 28.**

Тема: Правильные многогранники, их свойства.

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 29.**

Тема: Понятие об объеме тела. Отношение объемов подобных тел.

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 30.**

Тема: Комбинации многогранников и тел вращения.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 31.**

Тема: Комбинации многогранников и тел вращения.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 32.**

Тема: Геометрические комбинации на практике.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 33.**

Тема: Геометрические комбинации на практике.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 34.**

Тема: Решение задач. Многогранники и тела вращения.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 35.**

Тема: Решение задач. Первообразная функции, ее применение

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 36.**

Тема: Степенная функция, ее свойства

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 37.**

Тема: Преобразование выражений с корнями  $n$ -ой степени

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 38.**

Тема: Решение иррациональных уравнений и неравенств.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 39.**

Тема: Решение иррациональных уравнений и неравенств.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 40.**

Тема: Степени и корни. Степенная функция.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 41.**

Тема: Показательная функция, ее свойства.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 42.**

Тема: Решение показательных уравнений и неравенств.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 43.**

Тема: Решение показательных уравнений и неравенств.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 44.**

Тема: Решение показательных уравнений и неравенств.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 45.**

Тема: Решение показательных уравнений и неравенств.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 46.**

Тема: Системы показательных уравнений.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 47.**

Тема: Решение задач. Показательная функция.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 48.**

Тема: Свойства логарифмов. Операция логарифмирования.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 49.**

Тема: Свойства логарифмов. Операция логарифмирования.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 50.**

Тема: Логарифмическая функция, ее свойства.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 51.**

Тема: Решение логарифмических уравнений и неравенств.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 52.**

Тема: Решение логарифмических уравнений и неравенств.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 53.**

**Тема:** Решение задач. Логарифмы. Логарифмическая функция.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 54.**

**Тема:** Графы.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 55.**

**Тема:** Графы.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 56.**

**Тема:** Решение задач. Множества, Графы и их применение.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 57.**

**Тема:** Основные понятия комбинаторики.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 58.**

**Тема:** Событие, вероятность события. Сложение и умножение вероятностей.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 59.**

**Тема:** Дискретная случайная величина, закон ее распределения.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 60.**

**Тема:** Задачи математической статистики.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 61.**

**Тема:** Решение задач. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 62.**

**Тема:** Равносильность уравнений и неравенств. Общие методы решения.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 63.**

**Тема:** Графический метод решения уравнений, неравенств.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 64.**

**Тема:** Уравнения и неравенства с модулем.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 65.**

**Тема:** Уравнения и неравенства с параметрами.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 66.**

**Тема:** Решение задач. Уравнения и неравенства.

Прежде чем приступить к выполнению заданий, внимательно прочитайте данные рекомендации. Практические работы включают в себя задания следующих видов:

### **Решение математических задач.**

Одних вопросов и советов преподавателя студенту недостаточно для обучения решению задач. Нельзя забывать, что "умение решать задачи есть искусство, приобретаемое практикой".

Вопросы и советы студенту условно можно подразделить на четыре группы. Нужно помнить что вопросы, рекомендуемые для первого этапа, окажут помощь и на втором этапе, а рекомендуемые для второго этапа - на третьем и т. п. Дело в том, что этапы решения задачи не могут быть строго изолированы один от другого, между ними существует определенная связь, в их единстве заключается процесс решения задачи.

#### **1. Вопросы и советы для усвоения содержания задачи (1-й этап).**

Нельзя приступать к решению задачи, не уяснив четко, в чем заключается задание, т. е. не установив, каковы данные и искомые или посылки и заключения. **Первый совет:** не спешить начинать решать задачу. Этот совет не означает, что задачу надо решать как можно медленней. Он означает, что решению задачи должна предшествовать подготовка, заключающаяся в следующем:

а) сначала следует ознакомиться с задачей, внимательно прочитав ее содержание. При этом схватывается общая ситуация, описанная в задаче;

б) ознакомившись с задачей, необходимо вникнуть в ее содержание. При этом нужно следовать такому совету: выделить в задаче данные и искомые, а в задаче на доказательство - посылки и заключения.

в) Если задача геометрическая или связана с геометрическими фигурами, полезно сделать чертеж к задаче и обозначить на чертеже данные и искомые г) В том случае, когда данные (или искомые) в задаче не обозначены, надо ввести подходящие обозначения. При решении текстовых задач алгебры и начал анализа вводят обозначения искомых или других переменных, принятых за искомые.

д) Уже на первой стадии решения задачи, стадии понимания задания, полезно попытаться ответить на вопрос: "Возможно ли удовлетворить условию?" Не всегда сразу удастся ответить на этот вопрос, но иногда это можно сделать.

Отвечая на вопрос: "Возможно ли удовлетворить условию?", полезно выяснить, однозначно ли сформулирована задача, не содержит ли она избыточных или противоречивых данных. Одновременно выясняется, достаточно ли данных для решения задачи.

#### **2. Составление плана решения задачи (2-й этап).**

Составление плана решения задачи является главным шагом на пути ее решения. Правильно составленный план решения задачи почти гарантирует правильное ее решение. Но составление плана может оказаться сложным и длительным процессом. Поэтому попробуйте ответить на вопросы которые помогут вам лучше и быстрее составить план решения задачи, "открыть" идею ее решения:



а) Известна ли вам какая-либо родственная задача? Аналогичная задача? Если такая или родственная задача известна, то составление плана решения задачи не будет затруднительным. Но далеко не всегда известна задача, родственная решаемой. В этом случае может помочь в составлении плана решения совет.

б) Подумайте, известна ли вам задача, к которой можно свести решаемую. Если такая задача известна вам, то путь составления плана решения данной задачи очевиден: свести решаемую задачу к решенной ранее. Может оказаться, что родственная задача неизвестна вам и вы не можете свести данную задачу к какой-либо известной. План же сразу составить не удастся.

Стоит воспользоваться советом: "Попытайтесь сформулировать задачу иначе". Иными словами, попытайтесь перефразировать задачу, не меняя ее математического содержания.

При переформулировании задачи пользуйтесь либо определениями данных в ней математических понятий (заменяют термины их определениями), либо их признаками (точнее сказать, достаточными условиями). Надо отметить, что способность учащегося переформулировать текст задачи является показателем понимания математического содержания задачи.

Переформулировка задачи это перевод ее на язык математики, т. е. язык алгебры, геометрии или анализа. Это, скорее, формализация задачи, "математизация" ее. К такому приему и приходится часто прибегать при решении многих текстовых задач.

г) Составляя план решения задачи, всегда следует задавать себе вопрос: "Все ли данные задачи использованы?" Выявление неучтенных данных задачи облегчает составление плана ее решения.

д) При составлении плана задачи иногда бывает полезно следовать совету: "Попытайтесь преобразовать искомые или данные". Часто преобразование искомого или данных способствует более быстрому составлению плана решения. При этом искомые преобразуют так, чтобы они приблизились к данным, а данные - так, чтобы они приблизились к искомым. Так, при каждом случае тождественных преобразований данные преобразуются, постепенно приближаясь к результату (искомому). Аналогично уравнение, систему уравнений, неравенство или систему неравенств преобразуют в равносильные, чтобы найти их корни или множество решений.

е) Нередко случается так, что, вы все же не можете составить план ее решения. Тогда может помочь еще один совет: "Попробуйте решить лишь часть задачи", т. е. попробуйте сначала удовлетворить лишь части условий, с тем чтобы далее искать способ удовлетворить оставшимся условиям задачи.

ж) Нередко в составлении плана решения задачи помогает ответ на вопрос: "Для какого частного случая возможно достаточно быстро решить эту задачу?" Обнаружив такой частный случай, вы ставите перед собой новую цель - воспользоваться решением задачи в найденном частном случае для более общего (но, может быть, не самого общего) случая. Так можно поступить, постепенно обобщая задачу до исходной, решаемой задачи. Предполагаемый вариант рассуждений - явное применение полной индукции. Итак, совет:

"Рассмотрите частные случаи задачной ситуации, решите задачу для какого-нибудь частного случая, примените индуктивные рассуждения".

**3. Реализация плана решения задачи (3-й этап).** План указывает лишь общий контур решения задачи. При реализации плана решающий задачи рассматриваются все детали, которые вписываются в этот контур. Эти детали надо рассматривать тщательно и терпеливо. Но при этом (решающему задачу) полезно следовать некоторым советам:

а) Проверяйте каждый свой шаг, убеждайтесь, что он совершен правильно. Иными словами, нужно доказывать правильность каждого шага ссылками на соответствующие, известные ранее математические факты, предложения.

б) При реализации плана поможет и совет: "Замените термины и символы их определениями". Так, термин "параллелограмм" заменяется его определением: "Четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны", термин "предел числовой последовательности" для доказательства, например, того предложения, что предел суммы двух последовательностей, имеющих пределы, равен сумме пределов этих последовательностей, можно заменить, и вполне успешно, его определением.

в) При решении некоторых задач помогает совет: "Воспользуйтесь свойствами данных в условии объектов".

**4. Анализ и проверка правильности решения задачи (4-й этап).** Даже очень хорошие студенты, получив ответ и тщательно изложив ход решения, считают задачу решенной. А ведь получение результата не означает еще, что задача решена правильно. Тем более не означает, что для решения выбран лучший, наиболее удачный, изящный, если можно так выразиться, вариант. По В. М. Брадису, задачу можно считать решенной, если найденное решение:

- безошибочно,
- обоснованно,
- имеет исчерпывающий характер.

Поэтому анализ решения задачи, проверка решения и достоверности результата должны быть этапом решения задачи. Итак, два совета: "Проверьте результат", "Проверьте ход решения". Проверка результата может производиться различными способами. Проверая правильность хода решения, мы тем самым убеждаемся и в правильности результата. Значит, надо выполнить совет: "Проверьте все узловые пункты решения", еще раз убедитесь в истинности проведенных рассуждений.

Второй способ проверки результата заключается в получении того же результата применением другого метода решения задачи, поэтому полезно всегда задавать решающему вопрос: "Нельзя ли тот же результат получить иначе?" Иными словами, стоит последовать совету: "Решите задачу другим способом". Если при решении задачи другим способом получен тот же результат, что и в первом случае, задачу можно считать решенной правильно. К тому же получение различных вариантов решения одной и той же задачи имеет важное обучающее значение.

**Выполнение контрольных работ.**

1. При подготовке к любой контрольной работе рекомендуется сначала внимательно разобраться с теоретическим материалом по учебнику, затем закрепить свои знания, решая задачи.
2. Подготовиться к работе означает: вы внимательно просматриваете тексты задач и прикидываете, какие из предложенных задач вам по силам и выполняете их в первую очередь.
3. Если вы переоценили свои силы — взяли трудную задачу — и не решили, то не отчаивайтесь. Дома в спокойной обстановке разберитесь, в чем причина вашей неудачи, и решите эту же задачу.
4. Если у вас пока нет большой любви к определенной дисциплине, и вас нервируют трудные задачи, то не расстраивайтесь: для начала выберите задачи начального уровня. Решая самые простые задачи, вы постепенно приобретаете уверенность в своих силах.
5. Если вы успешно решили легкую задачу на уроке, то попросите у преподавателя более трудную задачу. Если на уроке не успели, то обратитесь к преподавателю с просьбой дать вам возможность решить более трудную задачу во внеурочное время.

**Тема:** «Числа и вычисления. Выражения и преобразования»

**Цель:** развитие общеучебных, исследовательских, рефлексивных умений и навыков обучающихся; формирование самостоятельной познавательной деятельности обучающихся при изучении чисел и вычислений, преобразовании выражений.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Содержание работы

**Задание 1.** Выберите среди данных чисел натуральные, целые, рациональные, иррациональные:

а) 4; - 0,7;  $\cos 60^\circ$ ; - 5;  $\sqrt{\frac{1}{4}}$ ; 0;  $\frac{5}{7}$ ;  $\sqrt{11}$ ; 4,3;  $\sin 45^\circ$ .

б) 0,2; 5;  $\sqrt{31}$ ;  $\frac{5}{7}$ ; -62;  $\sqrt{0,3}$ ; -1,3; 0;  $\sin 60^\circ$ ;  $\cos 45^\circ$ .

**Задание 2.** Найдите неизвестный член пропорции:

а)  $x: 2,4 = 17,5: 2$

б)  $4,5: 0,6 = x: 2,4$

**Задание 3.** Найдите значение выражения:

а)  $\frac{2\frac{3}{4}:1,1+3\frac{1}{3}}{2,5-0,4\cdot 3\frac{1}{3}}$

б)  $\frac{(2\frac{1}{6}+4,5)\cdot 0,375}{2,75-1\frac{1}{2}}$

**Задание 4.** Заполнить пропуски.

А) Множество натуральных чисел составляют числа, которые .....

Б) Каждое рациональное число может быть представлено в виде .....десятичной .....дроби.

В) Целые и дробные числа составляют множество .....

Г) Множество .....чисел образуют множество действительных чисел.

**Задание 5.** Записать названия множеств чисел, обозначаемых, следующими буквами:

А) R—.....

Б) Q—.....

В) Z—.....

Г) N—.....

**Задание 6.** Выписать соответствующие числа из представленного списка.

0,9; -6;  $\frac{6}{7}$ ;  $\pi$ ; 97; 2,3129...; 1,(6); 0

А) Целые числа \_\_\_\_\_

Б) Иррациональные числа \_\_\_\_\_

**Задание 7.** Отметить верные утверждения.

➤ -Каждое натуральное число является целым

**Тема:** «Процентные вычисления»

**Цель:** повторить знания обучающихся в теме: «Проценты».

**Оборудование:** справочные пособия.

### **Справочный материал**

Слово « процент » происходит от латинских слов pro centum, что буквально означает « со ста ». Процент = одна сотая часть числа.

Понимание процентов и умение выполнять процентные вычисления в настоящее время необходимы каждому человеку. Очень велико прикладное значение этой темы. Она затрагивает финансовую, демографическую, экологическую, социологическую и другие сферы.

Рассмотрим три основных типа задач на проценты.

#### **1)Нахождение процента от числа**

Чтобы найти проценты от числа, можно проценты представить в виде десятичной дроби и число умножить на полученную десятичную дробь.

**Задача:** Предприятие изготовило за квартал 500 насосов, из которых 60 % имели высшую категорию качества. Сколько насосов высшей категории качества изготовило предприятие?

**Решение:** Найдем 60 % от 500 (общее количество насосов).

$$60 \% = 0,6$$

$$500 \cdot 0,6 = 300 \text{ насосов высшей категории качества.}$$

**Ответ:** 300 насосов высшей категории качества.

**2)Нахождение числа по его проценту** Чтобы найти число по его процентам, можно проценты представить в виде десятичной дроби и данное число разделить на полученную десятичную дробь.

**Задача:** Ученик прочитал 138 страниц, что составляет 23 % числа всех страниц в книге. Сколько страниц в книге?

**Решение:**

Итак, нам неизвестно сколько всего страниц в книге. Но мы знаем, что часть, которую прочитал ученик (138 страниц) составляет 23 % от общего количества страниц в книге. Так как 138 стр. - это всего лишь часть, само количество страниц, естественно, будет больше 138. Это поможет нам при проверке.

$$138 : 23 \% = 138 : 0,23 = \frac{138 \cdot 100}{23} = 600 \text{ (стр.)}$$

**Проверка:** 600 : 23 = 26,08 (это означает, что 138 является частью 600).

**Ответ:** 600 (стр.) - общее количество страниц в книге.

#### **3)Сколько процентов одно число составляет от другого.**

Чтобы найти сколько процентов одно число составляет от другого можно одно число разделить на другое и полученное произведение умножить на 100.

**Задача:** Из 200 арбузов 16 оказались незрелыми. Сколько процентов всех арбузов составили незрелые арбузы?

**Решение:**

16 делим на общее количество арбузов и умножаем на 100 %.

$$(16 : 200) \cdot 100\% = \frac{16}{200} \cdot 100\% = \frac{2}{25} \cdot 100\% = \frac{200}{25} = 8\%$$

Ответ: 8 % - составляют незрелые арбузы от всех арбузов.

### Примеры решения задач

#### Задача 1:

Для приготовления фарша взяли говядину и свинину в отношении 7:13. Какой процент в фарше составляет свинина?

Решение: Пусть взяли  $7x$  г говядины, тогда свинины взяли  $13x$  г. Следовательно, свинина составляет в фарше  $\frac{13x}{7x + 13x} \cdot 100\% = 65\%$ . Ответ: 65% .

#### Задача 2:

Какова величина подоходного налога, который составляет 13% от величины заработной платы в 25000 рублей?

Решение:  $25000 \cdot 0,13 = 3250$  рублей. Ответ: 3250 рублей.

#### Задача 3:

Яблоки при сушке теряют 84% своей массы. Сколько сушеных яблок получится из 300 кг свежих?

Решение: Из условия следует, что при сушке теряется  $300 \cdot 0,84 = 252$  кг.  
 $300 - 252 = 48$  кг. Ответ: 48 кг.

#### Задача 4:

В спортивном магазине велосипед продается со скидкой 15% за 4500 рублей. Какова первоначальная цена велосипеда?

Решение:

Из условия следует, что 4500—это 85% от первоначальной цены.

4500 рублей – 85%

X рублей– 100%, X-5294,12 рублей. Ответ: 5294,12р.

#### Задача 5:

Цена товара понизилась на 40%, затем еще на 25%. На сколько процентов понизилась цена товара по сравнению с первоначальной ценой?

Решение:

Обозначим первоначальную цену товара через  $x$ . После первого понижения цена станет равной

$x - 0,4x = 0,6x$ .

Второе понижение цены составляет 25% от новой цены  $0,6x$ , поэтому после второго понижения будем иметь цену

$0,6x - 0,25 \cdot 0,6x = 0,45x$ ;

После двух понижений суммарное изменение цены составляет:

$x - 0,45x = 0,55x$ .

Так как величина  $0,55x$ ; составляет 55% от величины  $x$ , то цена товара понизилась на 55%.

Ответ: 55%.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3

Тема: «Процентные вычисления»

## **Содержание работы**

1. За пропуски занятий студенту уменьшили стипендию на 12%. Сколько ему достанется, если стипендия 800 рублей?
2. На сколько рублей повысится квартплата, составляющая 3500 рублей, если с 1 сентября она должна увеличиться на 7 %?
3. В магазине мультиварка продается со скидкой 20% за 4500 рублей. Какова первоначальная цена мультиварки?
4. Грибы при сушке теряют 78% своей массы. Сколько сушеных грибов получится из 100 кг свежих?
5. Какова величина подоходного налога, который составляет 13% от величины заработной платы в 21000 рублей?
6. Сколько рублей составляет скидка на товар от его цены в 1250 рублей, если размер скидки 30%?
7. В декабре шуба стоила 38 тыс. рублей, в сезон цену повысили на 20%, а в мае снизили на 15%, в июле была распродажа со скидкой 30%. Сколько теперь стоит шуба?

## **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4**

**Тема: «Уравнения и неравенства»**

**Задание 1. Уравнения.**

1. Решите уравнение  $5(x - 4) = x + 4$ .
2. Решите уравнение  $4(x + 2) = -x - 2$ .
3. Решите уравнение  $7(x - 3) = 2x + 4$ .
4. Решите уравнение  $5(x + 3) = 2x - 3$ .
5. Решите уравнение  $5(x + 1) = 2x - 7$ .
6. Решите уравнение  $-3(x + 5) = 5(x - 2)$ .

11. Решите уравнение  $13x^2 + 26x = 0$ .
12. Решите уравнение  $2x^2 + 3x + 1 = 0$ .
13. Решите уравнение  $2x^2 - 3x - 2 = 0$ .
14. Решите уравнение  $4x^2 - 9x + 2 = 0$ .
15. Решите уравнение  $2x^2 - 11x + 5 = 0$ .
16. Найдите корни уравнения  $3x^2 - 7x + 2 = 0$ .

**Задание 2. Неравенства. (Ответ записать в виде числового промежутка)**

1. Решите неравенство  $4x + 5 > 3(x - 1)$ .
2. Решите неравенство  $5(x - 7) < 2x - 11$ .
3. Решите неравенство  $4(x + 2) > 3x - 1$ .
4. Решите неравенство  $5(2x - 3) - 3x > -1$ .
5. Решите неравенство  $5x - 2(x + 3) > 3$ .
6. Решите неравенство  $7x - 2 \geq 8(x - 1)$ .
7. Решите неравенство  $3x + 9 \geq 6(x - 1)$ .
8. Решите неравенство  $2x - 7 > 3(x + 1)$ .
9. Решите неравенство  $x + 7 > 6 - 3x$ .
10. Решите неравенство  $3x + 2 > 6 - 2x$ .

1. 
$$\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 3x + 2y = 12. \end{cases}$$

3. 
$$\begin{cases} 6x + 18 \leq 0, \\ x + 8 \geq 2. \end{cases}$$

4. 
$$\begin{cases} 5x + 15 \leq 0, \\ x + 5 \geq 1. \end{cases}$$

5.



**Цель:** проверить входные знания учащихся.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Содержание работы

**Задание.** Ответить на вопросы тестов, решить задачи.

1. Какое из данных чисел не входит в область определения выражения  $\sqrt{4-x}$ ?

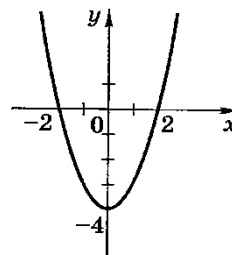
- A.  $-6$
- B.  $0$
- C.  $4$
- D.  $8$

2. Чему равно значение выражения  $\frac{a^{-4}a^{-3}}{a^{-5}}$  при  $a=\frac{1}{3}$ ?

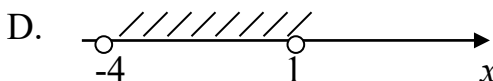
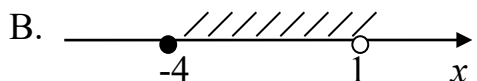
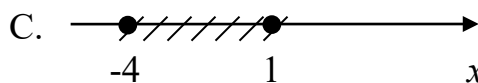
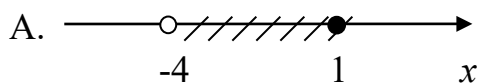
- A.  $-9$
- B.  $-\frac{1}{9}$
- C.  $\frac{1}{9}$
- D.  $9$

3. График какой из функций изображен на рисунке?

- A.  $y = x^2 - 2$
- B.  $y = -x^2 + 2$
- C.  $y = x^2 - 4$
- D.  $y = -x^2 + 4$



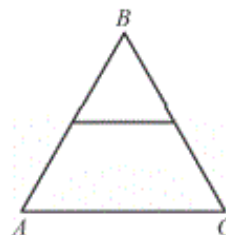
4. Какой из числовых промежутков является решением двойного неравенства  $-5 < 2x + 3 \leq 5$ ?



5. Найди значение выражения:  $\frac{(3\sqrt{5})^2}{15}$

6. Решите неравенство:  $6x - 5(2x + 8) > 14 + 2x$

7. Длина средней линии равностороннего треугольника ABC равна 5 см. Найдите периметр треугольника



8. Решить систему уравнений  $\begin{cases} x + y = 1, \\ x^2 - y^2 = 9. \end{cases}$

9. Упростите выражение:  $\frac{2a+2b}{b} \cdot \left( \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b} \right)$

10. Решить уравнение:  $x^2 - 8x + 15 = 0$

11. Из формулы площади трапеции  $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$  выразить сторону  $a$

12. Решите уравнение  $(x - 6)(4x - 6) = 0$ . В ответе укажите меньший из корней

A. 1,5

B. 2

C. 1,3

D. 1

13. Выписаны первые несколько членов геометрической прогрессии:  $-158; -79; -39,5;$ . Необходимо найти её четвёртый член

A.  $-35,65$

B.  $-22,5$

C.  $-19,75$

D.  $-20,5$

14. У бабушки 20 чашек: 12 с красными цветами, остальные с синими. Бабушка наливает чай в случайно выбранную чашку. Необходимо найти вероятность того, что это будет чашка с синими цветами

A. 0,4

B. 0,8

C. 0,6

D. 0,5

15. Необходимо найти корень уравнения  $5(x + 4) = -9$

A.  $-9,8$

B.  $-3,8$

C.  $-5,8$

D.  $-7$

16. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен  $23^\circ$ . Найдите другой его острый угол. Ответ необходимо дать в градусах

A. 67

B. 84

C. 72

D. 37

**17. Какое (ие) из следующих утверждений правильно (ы)**

1. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90 градусам
2. Средняя линия трапеции равна сумме её оснований
3. В любой четырёхугольник можно вписать окружность

A. 2  
B. 1  
C. 12  
D. 1 2 3

**18. Необходимо решить уравнение  $(x - 2)(-2x - 3) = 0$ . В ответе указать меньший из корней**

A. -2,5  
B. -1,5  
C. -1,8  
D. 0

**19. Выписаны первые несколько членов геометрической прогрессии: 7; 14; 28;... Необходимо найти её пятый член**

A. 112  
B. 105  
C. 117  
D. 110

**20. Какие из следующих утверждений правильны**

1. Все углы ромба равны
2. Любой прямоугольник можно вписать в окружность
3. Диагональ трапеции делит её на два равных треугольника

A. 3  
B. 2  
C. 1  
D. 2 3

**21. Выписано несколько последовательных членов арифметической прогрессии: ...; -10; x; -14; -16; ... . Необходимо найти x**

A. -9  
B. -11  
C. -12  
D. - 10

**22. Определите, имеет ли квадратный трехчлен  $3x^2 - 4x + 1$  корни, и если имеет, то сколько**

A. три корня  
B. два корня  
C. один корень  
D. нет корней

**23. Какое квадратное уравнение является неполным**

A.  $x - 6x^2 = 0$

B.  $2 - x^2 + 7x = 0$

C.  $x^2 - x = 1$

**24. Разложите квадратный трехчлен  $x^2 - 11x + 28$  на множители**

A.  $(x + 4)(x + 7)$

B.  $(x + 14)(x + 2)$

C.  $(x - 4)(x - 7)$

**25. Решите двойное неравенство  $-4 < 2x - 1 < 2$**

A.  $-2 < x < 1$

B.  $-3 < x < 3$

C.  $-1,5 < x < 1,5$

## **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6**

**Тема:** «Параллельность прямых, прямой и плоскости, плоскостей»

**Цель:** изучить основные понятия параллельных прямых и плоскостей в пространстве.

**Оборудование:** справочные пособия.

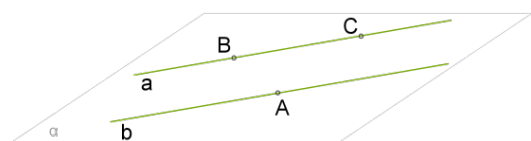
### Справочный материал

1. Параллельные прямые в пространстве.

*Две прямые в пространстве называются параллельными, если лежат в одной плоскости и не пересекаются.*

Параллельность прямых  $a$  и  $b$  обозначается так:  $a \parallel b$  или  $b \parallel a$ .

**Теорема 1.** Через две параллельные прямые можно провести плоскость, и при том только одну.



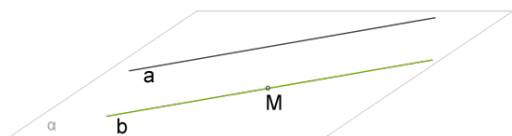
### Доказательство:

1. Так как прямые  $a$  и  $b$  параллельны, из определения следует, что через них можно провести плоскость  $\alpha$ .

2. Чтобы доказать, что такая плоскость только одна, на прямой  $a$  обозначаем точки  $B$  и  $C$ , а на прямой  $b$  точку  $A$ .

3. Так как через три точки, которые не лежат на одной прямой, можно провести только одну плоскость (2 аксиома), то  $\alpha$  является единственной плоскостью, которой принадлежат прямые  $a$  и  $b$ .

**Теорема 2.** Через любую точку пространства вне данной прямой можно провести прямую, параллельную данной прямой, и при том только одну.



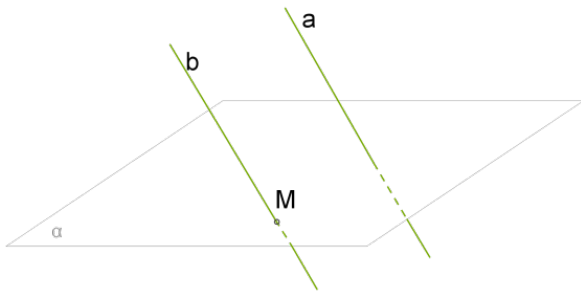
### Доказательство:

1. Через данную прямую  $a$  и точку  $M$ , которая не лежит на прямой, проводится плоскость  $\alpha$ .

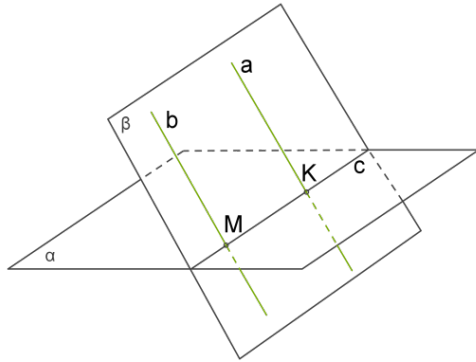
2. Такая плоскость только одна (т.к. через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну).

3. А в плоскости  $\alpha$  через точку  $M$  можно провести только одну прямую  $b$ , которая параллельна прямой  $a$ .

**Теорема 3.** Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.



(рис. 1)



(рис. 2)

### Доказательство:

Рассмотрим две параллельные прямые  $a$  и  $b$  и допустим, что прямая  $b$  пересекает плоскость  $\alpha$  в точке  $M$  (рис. 1).

Из 1-ой теоремы известно, что через параллельные прямые  $a$  и  $b$  можно провести только одну плоскость  $\beta$ .

Так как точка  $M$  находится на прямой  $b$ , то  $M$  также принадлежит плоскости  $\beta$  (рис. 2). Если у плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  есть общая точка  $M$ , то у этих плоскостей есть общая прямая  $c$ , которая является прямой пересечения этих плоскостей (4 аксиома).

Прямые  $a$ ,  $b$  и  $c$  находятся в плоскости  $\beta$ .

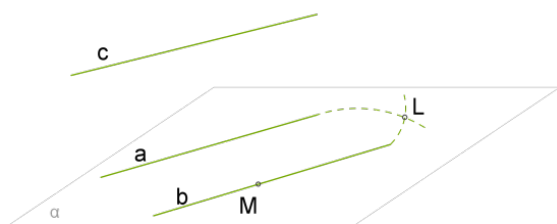
Если в этой плоскости одна из параллельных прямых  $b$  пересекает прямую  $c$ , то вторая прямая  $a$  тоже пересекает  $c$ .

Точку пересечения прямых  $a$  и  $c$  обозначим за  $K$ .

Так как точка  $K$  находится на прямой  $c$ , то  $K$  находится в плоскости  $\alpha$  и является единственной общей точкой прямой  $a$  и плоскости  $\alpha$ .

Значит, прямая  $a$  пересекает плоскость  $\alpha$  в точке  $K$ .

**Теорема 4. Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.**



Дано:  $a \parallel b \parallel c$

Доказать:  $a \parallel b$

### Доказательство:

Выберем точку  $M$  на прямой  $b$ .

Через точку  $M$  и прямую  $a$ , которая не содержит эту точку, можно провести только одну плоскость  $\alpha$  (Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести только одну плоскость).

Возможны два случая:

1) прямая  $b$  пересекает плоскость  $\alpha$  или 2) прямая  $b$  находится в плоскости  $\alpha$ .

**Пусть прямая  $b$  пересекает плоскость  $\alpha$ .**

Значит, прямая  $c$ , которая параллельна прямой  $b$ , тоже пересекает плоскость  $\alpha$ .

Так как  $a \parallel c$ , то получается, что  $a$  тоже пересекает эту плоскость. Но прямая  $a$  не может одновременно пересекать плоскость  $\alpha$  и находиться в плоскости  $\alpha$ .

Получаем противоречие, следовательно, предположение, что прямая  $b$  пересекает плоскость  $\alpha$ , является **неверным**.

**Значит, прямая  $b$  находится в плоскости  $\alpha$ .**

Теперь нужно доказать, что прямые  $a$  и  $b$  параллельны.

Пусть у прямых  $a$  и  $b$  есть общая точка  $L$ .

Это означает, что через точку  $L$  проведены две прямые  $a$  и  $b$ , которые параллельны прямой  $c$ . Но по второй теореме это невозможно. Поэтому предположение неверное, и прямые  $a$  и  $b$  не имеют общих точек.

Так как прямые  $a$  и  $b$  находятся в одной плоскости  $\alpha$  и у них нет общих точек, то они параллельны.

**Всё множество прямых в пространстве, которые параллельны данной прямой, называется пучком параллельных прямых.**

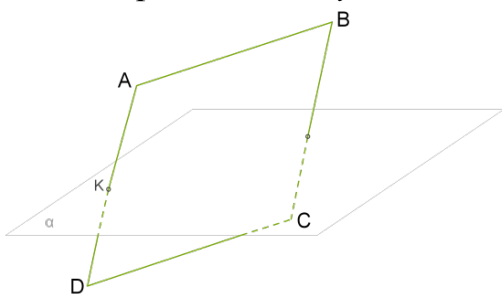
**Выводы:**

1) Любые две прямые пучка параллельных прямых параллельны между собой.

2) Параллельности прямых в пространстве присуща транзитивность: если  $a \parallel b$  и  $b \parallel c$ , то  $a \parallel c$ .

*Пример:*

*Одна сторона параллелограмма пересекает плоскость. Докажите, что прямая, которая содержит противоположную сторону параллелограмма, тоже пересекает эту плоскость.*



Допустим, что у параллелограмма  $ABCD$  сторона  $AD$  пересекает плоскость  $\alpha$  в точке  $K$ .

Так как противоположные стороны параллелограмма параллельны, то, согласно третьей теореме, прямая, которая содержит сторону  $CD$ , тоже пересекает плоскость  $\alpha$ .

## 2. Параллельность прямой и плоскости

Согласно аксиомам, если две точки прямой находятся в некоторой плоскости, то прямая лежит в этой плоскости. Отсюда следует, что возможны три случая взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве:

- 1) прямая лежит (находится) в плоскости
- 2) прямая и плоскость имеют только одну общую точку (прямая и плоскость пересекаются)
- 3) прямая и плоскость не имеют общих точек

*Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.*

## 2. Параллельность плоскостей

Как известно из аксиом стереометрии, если плоскости имеют одну общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку. Значит две плоскости или пересекаются или не пересекаются.

*Плоскости, которые не пересекаются, называются параллельными.*

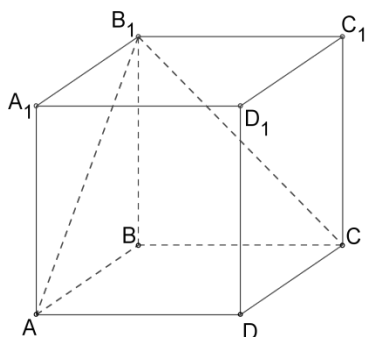
Параллельные плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  обозначаются  $\alpha \parallel \beta$

*Пример:*

*Любая конструкция с полом, потолком и стенами даёт нам представление о параллельных плоскостях - пол и потолок как две параллельные плоскости, боковые стены как параллельные плоскости.*

## Содержание работы

**Задание.** Определи взаимное расположение данной прямой и плоскости.



1. Прямая  $AA_1$  и плоскость  $(CBB_1)$ :
2. Прямая  $BC$  и плоскость  $(AA_1B_1)$ :
3. Прямая  $CC_1$  и плоскость  $(ABD)$ :
4. Прямая  $CB_1$  и плоскость  $(BB_1C_1)$ :
5. Прямая  $AB_1$  и плоскость  $(BCD)$ :



## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 7

**Тема:** «Перпендикулярность прямых, прямой и плоскости, плоскостей»

**Цель:** изучить основные понятия перпендикулярных прямых и плоскостей в пространстве.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Справочный материал

#### 1. Перпендикулярность прямой и плоскости.

*Две прямые называются перпендикулярными, если угол между ними равен  $90^\circ$ .*

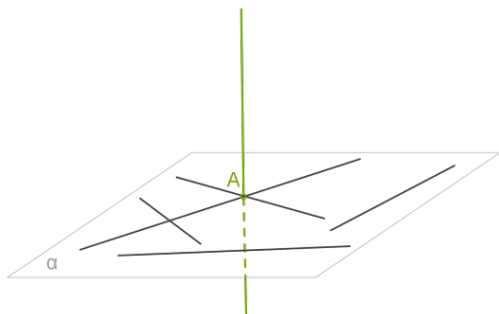
В пространстве перпендикулярными называют не только пересекающиеся прямые, но и скрещивающиеся прямые, так как мы говорим **об угле**, который могут образовать эти прямые, если их поместить в одной плоскости.

Так же как и в плоскости, в пространстве перпендикулярные прямые  $a$  и  $b$  обозначают  $a \perp b$ .

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая перпендикулярна к этой прямой.

Перпендикулярность прямой и плоскости

**Прямая, пересекающая плоскость, называется перпендикулярной этой плоскости, если она перпендикулярна каждой прямой, которая лежит в данной плоскости.**

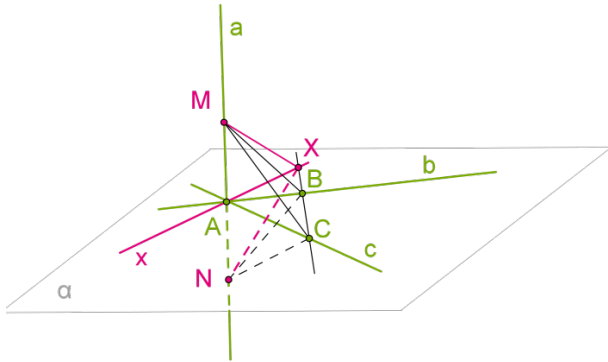


Перпендикулярность прямой и плоскости обозначается как  $a \perp \alpha$ .

Через любую точку пространства проходит прямая перпендикулярно данной плоскости, притом только одна.

### Признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

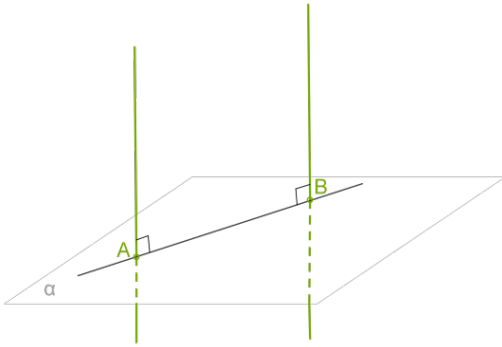


#### Доказательство:

Пусть  $a$  — прямая, перпендикулярная прямым  $b$  и  $c$  в плоскости. Проведём прямую  $a$  через точку  $A$  пересечения прямых  $b$  и  $c$ . Докажем, что прямая  $a$  перпендикулярна плоскости, то есть каждой прямой в этой плоскости.

1. Проведём произвольную прямую  $x$  через точку  $A$  в плоскости и покажем, что она перпендикулярна прямой  $a$ . Проведём в плоскости произвольную прямую, не проходящую через точку  $A$  и пересекающую прямые  $b$ ,  $c$  и  $x$ . Пусть точками пересечения будут  $B$ ,  $C$  и  $X$ .
2. Отложим на прямой  $a$  от точки  $A$  в разные стороны равные отрезки  $AM$  и  $AN$ .
3. Треугольник  $MCN$  равнобедренный, так как отрезок  $AC$  является высотой по условию теоремы и медианой по построению ( $AM=AN$ ). По той же причине треугольник  $MBN$  тоже равнобедренный.
4. Следовательно, треугольники  $MBC$  и  $NBC$  равны по трём сторонам.
5. Из равенства треугольников  $MBC$  и  $NBC$  следует равенство углов  $MBX$  и  $NBX$  и, следовательно, равенство треугольников  $MBX$  и  $NBX$  по двум сторонам и углу между ними.
6. Из равенства сторон  $MX$  и  $NX$  этих треугольников заключаем, что треугольник  $MXN$  равнобедренный. Поэтому его медиана  $XA$  является также высотой. А это и значит, что прямая  $x$  перпендикулярна  $a$ . По определению

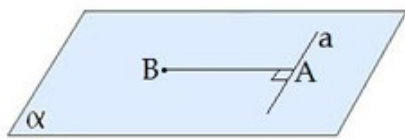
прямая  $a$  перпендикулярна плоскости.



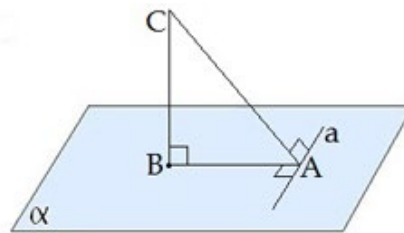
### Свойства перпендикулярных прямой и плоскости.

1. Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.
2. Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.
2. Теорема о трёх перпендикулярах

Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна ее проекции, то она перпендикулярна и самой наклонной.



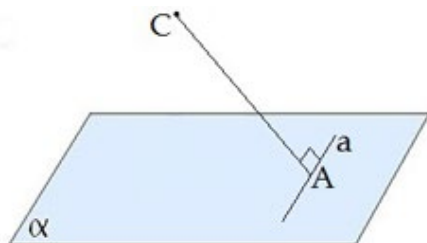
$$a \perp AB$$



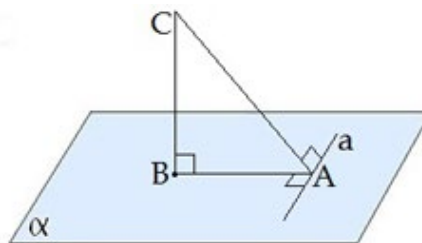
$$a \perp AB, BC \perp BA \Rightarrow a \perp CA$$

Справедлива также обратная теорема:

Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.



$$a \perp AC$$



$$a \perp AC, BC \perp BA \Rightarrow a \perp BA$$

### Содержание работы

**Задание 1.** Проведенная к плоскости перпендикулярная прямая пересекает плоскость в точке  $O$ . На прямой отложен отрезок  $AD$ , точка  $O$  является серединой этого отрезка. Определить вид и периметр треугольника  $ABD$ , если  $AD = 6$  см, а  $OB = 4$  см (ответ округлить до одной десятой).

**Задание 2.** Прямая  $PQ$  параллельна плоскости  $\alpha$ . От точек  $P$  и  $Q$  к плоскости проведены прямые  $PP_1 \perp \alpha$  и  $QQ_1 \perp \alpha$ . Известно, что  $PQ = PP_1 = 7,6$  см. Определить вид четырехугольника  $PP_1Q_1Q$  и найти его периметр.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8

**Тема:** «Решение задач. Прямые и плоскости в пространстве»

**Цель:** проверить и оценить знания учащихся по изученному материалу.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Содержание работы

1. Прямая  $a$  параллельна прямой  $b$ , прямая  $b$  параллельна прямой  $c$ . Можно ли утверждать, что прямая  $a$  параллельна прямой  $c$ ? Почему?
2. Плоскость пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно в точках  $D$  и  $E$ , причем  $AC \parallel DE$ . Найдите  $AC$ , если  $DB:AD = 3:2$  и  $DE = 9$  см.
3. Отрезок  $MN$ , равный 23 см, лежит в плоскости  $\alpha$ . Точка  $P$  не лежит в ней. Точки  $A$  и  $B$  – середины отрезков  $MP$  и  $NP$ . Вычислите расстояние между точками  $A$  и  $B$ .
4. Найти диагональ прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны 3 см, 4 см и 5 см.
5. Верно ли, что две прямые, параллельные одной и той же плоскости, параллельны между собой? Почему?
6. Плоскость пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно в точках  $D$  и  $E$ , причем  $AC \parallel DE$ . Найдите  $AC$ , если  $DB:AD = 4:3$  и  $DE = 12$  см.
7. Отрезок  $MN$ , равный 13 см, лежит в плоскости  $\alpha$ . Точка  $P$  не лежит в ней. Точки  $A$  и  $B$  – середины отрезков  $MP$  и  $NP$ . Вычислите расстояние между точками  $A$  и  $B$ .
8. Найти диагональ прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны 2 см, 3 см и 5 см.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 9

**Тема:** «Декартовы координаты в пространстве. Расстояние между двумя точками. Координаты середины отрезка»

**Цель:** изучить основные понятия векторов в пространстве.

**Оборудование:** справочные пособия.

## Справочный материал

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ

**Вектором** называется направленный отрезок, то есть такой отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой – концом (рис. 1).

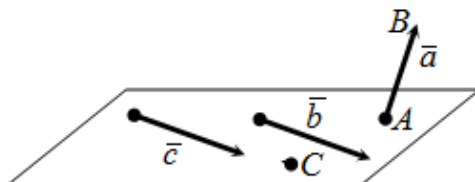


Рис. 1

Если начало вектора совпадает с его концом, то такой вектор называется **нулевым** и обозначается как  $\vec{0}$ . (На рисунке 1 нулевым является вектор  $\vec{CC} = \vec{0}$ ).

**Замечание.** Любая точка пространства рассматривается как нулевой вектор.

**Длиной** или **модулем**  $|\overline{AB}|$  вектора  $\overline{AB}$  называется длина отрезка АВ.

**Замечание.** Длина нулевого вектора равна нулю.

Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным**.

Коллинеарные и неколлинеарные векторы в пространстве.

Два ненулевых вектора называются **коллинеарными** или **параллельными**, если они лежат на одной или на параллельных прямых. (На рисунке 1 таковыми являются векторы  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ ).

Сонаправленные и противоположные векторы в пространстве.

Два ненулевых коллинеарных вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называются **сонаправленными**, если их направления совпадают ( $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ ); и **противоположно направленными** – в противном случае ( $\vec{a} \downarrow \vec{b}$ ).

Векторы называются **равными**, если они сонаправлены и их длины равны.

**Утверждение.** От любой точки пространства можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.

Два ненулевых вектора называются **противоположными**, если их длины равны и они противоположно направлены.

Векторы называются **компланарными**, если при откладывании их от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости.

**Замечание.** Любые два коллинеарных вектора компланарны; три вектора, среди которых имеется два коллинеарных, также компланарны.

Примеры решения задач

### ПРИМЕР 1

**Задание** Найти координаты вектора  $\overline{AB}$ , если А (1; – 2; 0), В (2; – 1; 2).

**Решение** Для нахождения координат вектора от координат его конца отнимем соответствующие координаты начала:

$$\overrightarrow{AB} = (2 - 1; -1 - (-2); 2 - 0) = (1; 1; 2).$$

Если вектор задан в пространстве своими координатами, то его длина равна корню квадратному из суммы квадратов координат.

## ПРИМЕР 2

**Задание** Найти модуль вектора  $\vec{a} = (0; -3; 2)$ .

**Решение** Модуль вектора равен корню квадратному из суммы квадратов его координат, то есть для заданного вектора  $\vec{a}$  имеем:

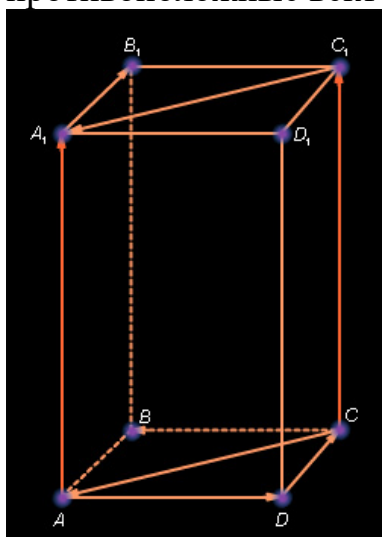
$$|\vec{a}| = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{0 + 9 + 4} = \sqrt{13}$$

## Содержание работы

1. Найти координаты вектора  $\overrightarrow{AB}$ , если  $A(9; -6; 1)$ ,  $B(4; -1; 0)$ .

2. Найти длину вектора  $\vec{a}$ , если  $\vec{a} = (3; -4; 0)$ .

3. Используя рисунок, укажите равные векторы, сонаправленные и противоположные векторы.



## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 10

**Тема:** «Векторы в пространстве. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов»

**Цель:** научиться находить скалярное произведение векторов.

**Оборудование:** справочные пособия.

## Справочный материал

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  обозначается так:  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ . Таким образом,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a} \vec{b}}).$$

Скалярное произведение векторов  $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$  и  $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$  выражается формулой  $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ .

Косинус угла  $\alpha$  между ненулевыми векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  вычисляется по формуле:  $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ .

### Содержание работы

**Задание 1.** Даны векторы  $\vec{a}\{1; -1; 2\}$  и  $\vec{b}\{-1; 1; 1\}$  и  $\vec{c}\{5; 6; 2\}$ . Вычислите  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{c}$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{c}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{a}$ .

**Задание 2.** Даны векторы  $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$  и  $\vec{b} = \vec{j} - 5\vec{k}$ . Вычислите  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{i}$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{j}$ .

**Задание 3.** Вычислите угол между векторами:

- а)  $\vec{a}\{2; -2; 0\}$  и  $\vec{b}\{3; 0; -3\}$ ;
- б)  $\vec{a}\{\sqrt{2}; \sqrt{2}; 2\}$  и  $\vec{b}\{-3; -3; 0\}$ ;
- в)  $\vec{a}\{0; 5; 0\}$  и  $\vec{b}\{0; -\sqrt{3}; 1\}$ ;
- г)  $\vec{a}\{-2,5; 2,5; 0\}$  и  $\vec{b}\{-5; 5; 5\sqrt{2}\}$ .

**Задание 4.** Даны точки  $A(1; 3; 0)$ ,  $B(2; 3; -1)$  и  $C(1; 2; -1)$ . Вычислите угол между векторами  $\vec{CA}$  и  $\vec{CB}$ .

**Задание 5.** Даны векторы  $\vec{a}\{-1; 2; 3\}$  и  $\vec{b}\{5; x; -1\}$ . При каком значении  $x$  выполняется условие: а)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ ; б)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$ ; в)  $\vec{a} \perp \vec{b}$ ?

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 11

**Тема:** «Координаты и векторы»

**Цель:** проверить и оценить знания учащихся по изученному материалу.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Содержание работы

#### Вариант 1

1. Даны векторы  $\vec{a}\{3; -5; 2\}$ ,  $\vec{b}\{0; 7; 1\}$  и  $\vec{c}\{-3; -1; 0\}$ . Вычислите координаты вектора  $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$ .

2. Вычислите скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 6$ ,  $|\vec{b}| = 4$  и угол между этими векторами равен  $60^\circ$  ( $\cos 60^\circ = 0,5$ ).

3. Дан вектор  $\vec{a}\{5; -1; 2\}$ . Запишите разложение этих векторов по координатным векторам  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ .

4. Дан вектор  $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ . Запишите координаты вектора  $\vec{a}$  и вычислите его длину.
5. Найдите координаты вектора  $\overrightarrow{AB}$ , если  $A(5; -1; 3)$ ,  $B(2; -2; 4)$ .
6. Вычислите расстояние между точками  $A$  и  $B$ , если  $A(3; -1; 1)$  и  $B(-4; 0; 5)$ .
7. Даны векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ , причем:  $\vec{a} = 6\vec{i} - 8\vec{k}$ ,  $|\vec{b}| = 1$ ,  $\vec{c} \{4; 1; m\}$ ,  $(\vec{a}; \vec{b}) = 60^\circ$ .
- Найти: а)  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ; б) значение  $m$ , при котором  $\vec{a} \perp \vec{c}$ .

## Вариант 2

1. Даны векторы  $\vec{a} \{5; -1; 1\}$ ,  $\vec{b} \{-2; 1; 0\}$  и  $\vec{c} \{0; 2; 4\}$ . Вычислите координаты вектора  $\vec{p} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ .
2. Вычислите скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $\vec{a} \{5; -1; 1\}$ ,  $\vec{b} \{-2; 1; 0\}$ .
3. Дан вектор  $\vec{a} \{3; -2; 1\}$ . Запишите разложение этих векторов по координатным векторам  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ .
4. Дан вектор  $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ . Запишите координаты векторов  $\vec{a}$  и вычислите его длину.
5. Найдите координаты вектора  $\overrightarrow{AB}$ , если  $A(6; 3; -2)$ ,  $B(2; 4; -5)$ .
6. Вычислите расстояние между точками  $A$  и  $B$ , если  $A(-2; 1; 2)$  и  $B(-3; -1; 3)$ .
7. Даны векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ , причем:  $\vec{a} = 4\vec{j} - 3\vec{k}$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ ,  $\vec{c} \{2; m; 8\}$ ,  $(\vec{a}; \vec{b}) = 45^\circ$ .
- Найти: а)  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ; б) значение  $m$ , при котором  $\vec{a} \perp \vec{c}$ .

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 12

**Тема:** «Синус, косинус, тангенс суммы и разности двух углов. Синус и косинус двойного угла. Формулы половинного угла»

**Цель:** научиться вычислять значения тригонометрических углов; изучить основные понятия и формулы тригонометрии.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Справочный материал

#### Расширение понятия угла

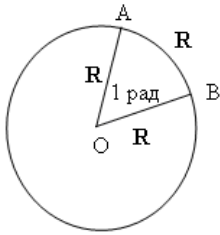
В тригонометрии мы рассматриваем угол как фигуру, полученную поворотом луча вокруг его начальной точки. Луч может вращаться против часовой стрелки – тогда получаем положительные углы. Если луч вращается по часовой стрелке, то угол считается отрицательным. Таким образом мы можем получить углы любой величины. При этом разные по величине углы могут иметь одинаковые начальные и конечные стороны.

#### Радианная и градусная мера угла

Углы измеряются в градусах и радианах. Один градус (обозначение  $1^\circ$ ) – это поворот луча на  $1 / 360$  часть одного полного оборота. Таким образом, полный оборот луча равен  $360^\circ$ . Один градус состоит из 60 минут (их обозначение  $1'$ ); одна минута – соответственно из 60 секунд (обозначаются  $1''$ ).



Угол в 1 радиан, это центральный угол, который опирается на дугу окружности, длина которой равна длине радиуса.



Чтобы найти радианную меру угла надо найти отношение длины дуги, проведенной произвольным радиусом и заключённой между сторонами этого угла, к радиусу дуги.

Справедливы формулы зависимости между радианной и градусной мерой.

$$1 \text{ рад} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57^\circ, 2958 \approx 57^\circ 17' 45''.$$

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360^\circ} \approx 0.017453 \text{ рад}.$$

Таблица значений наиболее часто встречающихся углов в градусах и радианах:

| Углы в градусах | $\frac{\pi}{6}$  |
|-----------------|------------------|
| 30°             | $\frac{\pi}{6}$  |
| 45°             | $\frac{\pi}{4}$  |
| 60°             | $\frac{\pi}{3}$  |
| 90°             | $\frac{\pi}{2}$  |
| 180°            | $\pi$            |
| 270°            | $\frac{3\pi}{2}$ |
| 360°            | $2\pi$           |
| Углы в радианах |                  |

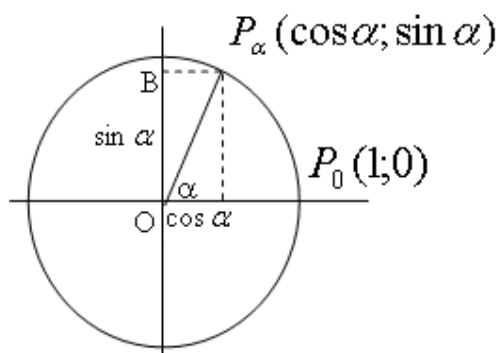
### Синус, косинус, тангенс и котангенс

Рассмотрим на координатной плоскости окружность единичного радиуса с центром O в начале координат. Повернем точку  $P_0(1;0)$  на угол  $\alpha$ .

Получим точку  $P_\alpha$ .

Косинусом угла  $\alpha$  называется абсцисса  $x$  точки  $P_\alpha$ . Синусом угла  $\alpha$  называется ордината  $y$  точки  $P_\alpha$ . При этом тангенсом угла  $\alpha$  называется отношение синуса этого угла к косинусу, а котангенсом угла  $\alpha$  называется отношение косинуса этого угла к его синусу.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$



### Вычисление значений тригонометрических функций.

Используя определения тригонометрических функций можно найти значения тригонометрических функций часто используемых в тригонометрии углов.

### Содержание работы

1. Вычислите:

а)  $\sqrt{3}\sin 60^0 + \cos 60^0 \sin 30^0 - \operatorname{tg} 45^0 \operatorname{ctg} 135^0 + \operatorname{ctg} 90^0$ ;

б)  $\cos \frac{\pi}{6} - \sqrt{2}\sin \frac{\pi}{4} + \sqrt{3}\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$ .

в)  $\sqrt{2}\sin 45^0 - \cos 30^0 \sin 60^0 + \operatorname{ctg} 45^0 \operatorname{tg} 135^0 - \operatorname{tg} 0^0$ ;

г)  $\sin \frac{\pi}{3} - \sqrt{2}\cos \frac{\pi}{4} - \sqrt{3}\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}$ .

2. Упростите выражение:

а)  $\frac{(1-\cos \alpha)(1+\cos \alpha)}{\sin \alpha}$ ;

б)  $\frac{(1-\sin \alpha)(1+\sin \alpha)}{\cos \alpha}$ .

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 13

**Тема:** «Функции, их свойства. Способы задания функций»

**Цель:** научиться вычислять основные тригонометрические тождества.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Справочный материал

**Тригонометрические тождества** — математические выражения для тригонометрических функций, которые выполняются при всех значениях аргумента (из общей области определения).

#### Тригонометрические формулы

Основные тригонометрические тождества

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$
- $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha \div \cos \alpha$
- $\operatorname{ctg} \alpha = \cos \alpha \div \sin \alpha$
- $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 \div \cos^2 \alpha$
- $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1 \div \sin^2 \alpha$

Формулы сложения

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$
- $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \div (1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta)$
- $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) \div (1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta)$
- $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = (\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1) \div (\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha)$
- $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = (\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1) \div (\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha)$

#### Формулы двойного угла

- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
- $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$
- $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$
- $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$
- $\operatorname{tg} 2\alpha = (2\operatorname{tg} \alpha) \div (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)$
- $\operatorname{ctg} 2\alpha = (\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1) \div (2\operatorname{ctg} \alpha)$

#### Формулы тройного угла

- $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$
- $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$
- $\operatorname{tg} 3\alpha = (3\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha) \div (1 - 3\operatorname{tg}^2 \alpha)$
- $\operatorname{ctg} 3\alpha = (3\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg}^3 \alpha) \div (1 - 3\operatorname{ctg}^2 \alpha)$

#### Формулы понижения степени

- $\sin^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha) \div 2$
- $\sin^3 \alpha = (3\sin \alpha - \sin 3\alpha) \div 4$
- $\cos^2 \alpha = (1 + \cos 2\alpha) \div 2$
- $\cos^3 \alpha = (3\cos \alpha + \cos 3\alpha) \div 4$
- $\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = (1 - \cos 4\alpha) \div 8$
- $\sin^3 \alpha \cdot \cos^3 \alpha = (3\sin 2\alpha - \sin 6\alpha) \div 32$

#### Переход от произведения к сумме

- $\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$
- $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$
- $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$

#### Переход от суммы к произведению

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

### Содержание работы

1. Вычислите:

а)  $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ;

б)  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$ , если  $\sin \alpha \cos \alpha = 0,4$ ;

в)  $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$ , если  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 3$ .

г)  $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ;

д)  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$ , если  $\sin \alpha \cos \alpha = 0,2$ ;

е)  $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$ , если  $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = -3$ .

2.  $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} - \arccos 0 - \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{3}}{\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}}$ .

3.  $\arcsin 0 - \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}}{\operatorname{arctg} \sqrt{3}}$ .

4. Докажите тождество:  $\frac{2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{\sin 4\alpha + 2 \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$ .

5. Докажите тождество:  $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) (1 - \cos 4\alpha) = 4 \sin 2\alpha$ .

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 14

**Тема:** «Преобразование графиков тригонометрических функций»

**Цель:** научиться преобразовывать тригонометрические выражения, используя тригонометрические формулы.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Справочный материал

Основные тригонометрические формулы:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  – основное тригонометрическое тождество;

$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ;  $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ ;

$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$ ;

$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$ ;  $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ ;

$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ .

### Содержание работы

1. Доказать тождество:

1)  $(1 - \cos \alpha) (1 + \cos \alpha) = \sin 2\alpha$ ;

2)  $(1 - \sin \alpha) (1 + \sin \alpha) = \cos^2 \alpha$ ;

$$3) \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha; \quad 4) \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha;$$

$$5) \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \sin^2 \alpha = 1; \quad 6) \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} + \cos^2 \alpha = 1.$$

2. Упростить выражение:

$$1) \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha - 2 \sin \alpha; \quad 2) \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$3) \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha}; \quad 4) \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin \alpha}.$$

3. Упростить выражение и найти его значение:

$$1) (\sin^2 \alpha - 1) / (1 - \cos^2 \alpha) \text{ при } \alpha = \pi/4;$$

$$2) \cos^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \sin^2 \alpha \text{ при } \alpha = \pi/6;$$

$$3) \cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \alpha + \sin^2 \alpha \text{ при } \alpha = \pi/3.$$

4. Доказать тождество:

$$1) (1 - \sin^2 \alpha) (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = 1;$$

$$2) \sin^2 \alpha (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha.$$

### ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 15

**Тема:** «Тригонометрические уравнения и неравенства»

**Цель:** научиться решать тригонометрические уравнения.

**Оборудование:** справочные пособия.

#### Справочный материал

Для решения любого тригонометрического уравнения его необходимо свести к одному из четырех простейших.

1) уравнение  $\cos t = a$ ;

решение:  $t = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

Частные случаи:

$$\cos t = 1 \Rightarrow t = 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos t = -1 \Rightarrow t = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

При  $|a| > 1$  уравнение  $\cos t = a$  не имеет решений.

2) уравнение  $\sin t = a$ ;

решение:  $t = (-1)^n \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

Частные случаи:

$$\sin t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin t = 0 \Rightarrow t = \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin t = -1 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

При  $|a| > 1$  уравнение  $\sin t = a$  не имеет решений.

3) уравнение  $\operatorname{tg} t = a$ ;

решение:  $t = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

4) уравнение  $\operatorname{ctg} t = a$ ;

решение:  $t = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

## Содержание работы

### 1. Решить уравнения:

а)  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;

б)  $\cos x = -1$ ;

в)  $2\cos x + \sqrt{2} = 0$ ;

г)  $2\cos x - 1 = 0$ ;

д)  $2\sin x + \sqrt{3} = 0$ ;

ж)  $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ;

з)  $\operatorname{tg} x = 0$ ;

и)  $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;

к)  $\sin x = -0,6$ ;

л)  $\operatorname{cox} x = -\frac{1}{2}$ ;

м)  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;

н)  $2\cos x + \sqrt{3} = 0$ ;

о)  $\sqrt{2}\cos x - 1 = 0$ ;

п)  $\sin\left(-\frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;

р)  $\operatorname{tg}(-4x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ;

с)  $2\cos x\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

2. Решить неравенство:

1)  $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;

2)  $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;

3)  $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;

4)  $\cos x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;

5)  $\cos x \geq 1$ ;

6)  $\sin x \geq 1$ ;

7)  $\sin x > \frac{1}{2}$ ;

8)  $\sin x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

### ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 16

**Тема:** «Решение задач. Основы тригонометрии. Тригонометрические функции»

**Цель:** проверить и оценить знания учащихся по изученному материалу.

**Оборудование:** справочные пособия.

#### Содержание работы

##### Вариант 1

1. Решите уравнение:

а)  $2\sin x + \sqrt{2} = 0$ ;

б)  $\sin^2 x + 2\cos x + 2 = 0$ ;

в)  $\sin 2x + 4\sin^2 x = 2\cos^2 x$ .

2. Решите неравенство:  $\cos x \leq \frac{1}{2}$ .

3. Решите уравнение  $\sin 4x - \sin 2x = 0$ .

##### Вариант 2

1. Решите уравнение:

а)  $2\cos x - 1 = 0$ ;

б)  $\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0$ ;

в)  $2\sin^2 x - \sin 2x = \cos 2x$ .

2. Решите неравенство:  $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

3. Решите уравнение  $\cos 3x + \cos x = 0$ .

##### Вариант 3

1. Решите уравнение:

а)  $2\cos x + 1 = 0$ ;

б)  $2\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$ ;

в)  $3\cos^2 x - 5\sin^2 x = \sin 2x$ .

2. Решите неравенство:  $\sin x \leq \frac{1}{2}$ .
3. Решите уравнение  $\cos 2x = \cos 4x$ .

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 17

**Тема:** «Комплексные числа»

**Цель:** закрепить навыки выполнения действий с комплексными числами

**Оборудование:** справочные пособия.

### Справочный материал

**Комплексные числа** записываются в виде:  $a + bi$ . Здесь  $a$  и  $b$  – действительные числа, а  $i$  – мнимая единица, т.е.  $i^2 = -1$ . Число  $a$  называется абсциссой, а  $b$  – ординатой комплексного числа  $a + bi$ . Комплексное число  $0 + bi$  называется чисто мнимым числом. Запись  $bi$  означает то же самое, что и  $0 + bi$ .

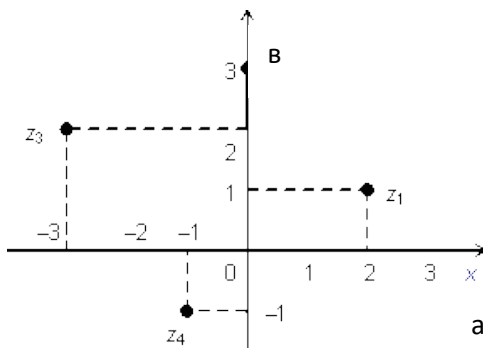
**Модулем** комплексного числа называется длина вектора  $OP$ , изображающего комплексное число на координатной (комплексной) плоскости. Сопряжённые комплексные числа имеют одинаковый модуль

Рассмотрим на плоскости декартову прямоугольную систему координат  $xOy$ . Каждому комплексному числу  $z = a + bi$  можно сопоставить точку с координатами  $(a; b)$ , и наоборот, каждой точке с координатами  $(c; d)$  можно сопоставить комплексное число  $w = c + di$ . Таким образом, между точками плоскости и множеством комплексных чисел устанавливается взаимно однозначное соответствие. Поэтому комплексные числа можно изображать как точки плоскости. Плоскость, на которой изображают комплексные числа, обычно называют комплексной плоскостью.

**Пример.** Изобразим на комплексной плоскости числа

$$z_1 = 2 + i; \quad z_2 = 3i; \quad z_3 = -3 + 2i; \quad z_4 = -1 - i.$$

Решение:



Арифметические действия над комплексными числами те же, что и над действительными: их можно складывать, вычитать, умножать и делить друг на друга. Сложение и вычитание происходят по правилу  $(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$ , а умножение — по правилу  $(a + bi) \cdot (c + di) =$



$(ac - bd) + (ad + bc)i$  (здесь как раз используется, что  $i^2 = -1$ ). Число  $a - bi$  называется *комплексно-сопряженным* к  $z = a + bi$ . Равенство  $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$  позволяет понять, как делить одно комплексное число на другое (ненулевое) комплексное число:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi) \cdot (c-di)}{(c+di) \cdot (c-di)} = \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Например,  $\frac{3+4i}{1+2i} = \frac{11}{5} - \frac{2}{5}i$

## Содержание работы

| 1 вариант   | 2 вариант                | Количество баллов     |
|---|--------------------------|-----------------------|
| <b>№ 1. Изобразите на плоскости заданные комплексные числа:</b> |                          |                       |
| $z_1 = 4i$  | $z_1 = -5i$              | 1                     |
| $z_2 = 3 + i$   | $z_2 = 4 + i$            | 1                     |
| $z_3 = -4 + 3i$   | $z_3 = -7 + 2i$          | 1                     |
| $z_4 = -2 - 5i$   | $z_4 = -3 - 6i$          | 1                     |
| <b>№ 2. Произведите сложение и вычитание комплексных чисел:</b> |                          |                       |
| А) $(3 + 5i) + (7 - 2i)$ .                                      | $(3 - 2i) + (5 + i)$ .   | 2                     |
| Б) $(6 + 2i) + (5 + 3i)$ .                                      | $(4 + 2i) + (-3 + 2i)$ . | 2                     |
| В) $(-2 + 3i) - (7 - 2i)$ .                                     | $(-5 + 2i) - (5 + 2i)$ . | 2                     |
| Г) $(5 - 4i) - (6 + 2i)$ .                                      | $(-3 - 5i) - (7 - 2i)$ . | 2                     |
| <b>№ 3. Произведите умножение комплексных чисел:</b>            |                          |                       |
| а) $(2 + 3i)(5 - 7i)$ .   | $(1 - i)(1 + i)$ .       | 2                     |
| б) $(6 + 4i)(5 + 2i)$ .   | $(3 + 2i)(1 + i)$ .      | 2                     |
| в) $11(3 - 2i)(7 - i)$ .  | $(6 + 4i)3i$ .           | 2                     |
| г) $(-2 + 3i)(3 + 5i)$ .  | $(2 - 3i)(-5i)$ .        | 2                     |
| <b>№ 4. Выполните деление комплексных чисел:</b>                |                          |                       |
| а) $\frac{+2i}{5-3i}$   |                          | а) $\frac{5+i}{2+3i}$ |
| б) $\frac{1-i}{1+i}$  |                          | б) $\frac{1+i}{1-i}$  |

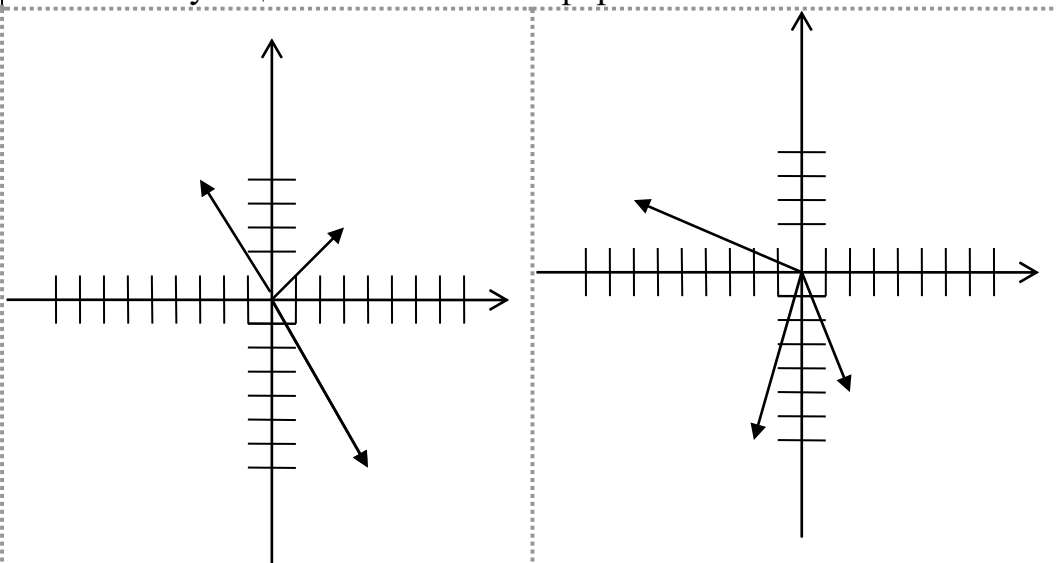
## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 18

**Тема:** «Применение комплексных чисел»

**Цель:** закрепить навыки выполнения действий с комплексными числами.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Содержание работы

| № 1. Выполните действия:   |                            |   |
|--|----------------------------|---|
| а) $(3 + 2i)(3 - 2i)$ .  | а) $(7 - 6i)(7 + 6i)$ .    | 2 |
| б) $(5 + i)(5 - i)$ .  | б) $(4 + i)(4 - i)$ .      | 2 |
| в) $(1 - 3i)(1 + 3i)$ .  | в) $(1 - 5i)(1 + 5i)$ .    | 2 |
| № 2. Решите уравнения:   |                            |   |
| а) $x^2 - 4x + 13 = 0$ .   | а) $2,5x^2 + x + 1 = 0$ .  | 3 |
| б) $x^2 + 3x + 4 = 0$  | б) $4x^2 - 20x + 26 = 0$ . | 3 |
| №7. На рисунке показано графическое изображение комплексных чисел. Перерисуйте рисунок в тетрадь. Обозначьте комплексные числа как $z_1, z_2, z_3$ . Запишите соответствующие аналитические формы. |                            |   |
|   |                            | 2 |

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №19

**Тема:** «Понятие производной. Формулы и правила дифференцирования»

**Цель:** научиться вычислять производные основных функций.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Справочный материал

**Производная функции** это отношение приращения функции к приращению аргумента при бесконечно малом приращении аргумента.

**Приращением** в математике называют изменение. То, насколько изменился аргумент ( $x$ ) при продвижении вдоль оси  $Ox$ , называется **приращением**

**аргумента** и обозначается  $\Delta x$ . То, насколько изменилась функция (высота) при продвижении вперед вдоль оси  $Ox$  на расстояние  $\Delta x$ , называется **приращением функции** и обозначается  $\Delta f$ .

Итак, производная функции  $f(x)$  — это отношение  $\Delta f$  к  $\Delta x$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Обозначаем производную той же буквой, что и функцию, только со штрихом сверху справа:  $f'(x)$  или просто  $f'$ .

### Таблица производных основных элементарных функций

$$(c)' = 0 \quad (c — \text{const}); \quad (x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \quad (\alpha — \text{const});$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$$

$$(\sin x)' = \cos x; \quad (\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(a^x)' = a^x \ln a; \quad (e^x)' = e^x;$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}; \quad (\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$*(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad *(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$*(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}; \quad *(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

### Основные правила дифференцирования

$$(c \cdot u)' = c \cdot u', \quad c — \text{const}; \quad (u \pm v)' = u' \pm v';$$

$$(uv)' = u'v + uv'; \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$

$$y = f(g(x)), \quad y' = f'_u(u) \cdot g'_x(x), \quad \text{где } u = g(x).$$

### Содержание работы

Найти производную функции:

- 1)  $y = 2x^5 + 2x^3 - 3x$
- 2)  $y = -5x^4 + 5x^3 + 4x^2$
- 3)  $y = -x^5 - x^4 + 7x$
- 4)  $y = -5x^6 - 8x^4 + 9x^2$
- 5)  $y = -6x^5 + 5x^4 + 6x^3$
- 6)  $y = -5x^6 - 8x^3 + 7x$
- 7)  $y = 6x^3 - 9x^2 + 7x$
- 8)  $y = 2x^6 + 7x^5 - 7x^3$

9)  $y = -3x^5 + 9x^4 - 3x^3$

### ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №20

**Тема:** «Производные суммы, разности, произведения, частного»

**Цель:** научиться вычислять производные основных функций.

**Оборудование:** справочные пособия.

#### Содержание работы

- 1)  $y = 4x^6 + 4x^3 \mp 7x^2$
- 2)  $y = 4x^5 + 6x^3 - 3x^2$
- 3)  $y = 4 \operatorname{ctg} x + 3 \operatorname{tg} x - 4$
- 4)  $y = 4 \sin x + 2 \operatorname{ctg} x + 5$
- 5)  $y = 4 \operatorname{tg} x - 5 \sin x + 4$
- 6)  $y = 2 \operatorname{ctg} x - 2 \cos x + 4$
- 7)  $y = 4 \sin x - 5 \operatorname{ctg} x - 1$
- 8)  $y = 3 \cos x - 2 \operatorname{tg} x - 2$
- 9)  $y = 4 \cos x + 2 \operatorname{ctg} x - 5$
- 10)  $y = 4 \operatorname{tg} x + 5 \cos x + 2$
- 11)  $y = 5 \cos x - 2 \sin x - 5$
- 12)  $y = 2 \operatorname{ctg} x - 3 \cos x + 2$
- 13)  $y = 3 \cos x + 3 \sin x - 5$

### ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 21

**Тема:** «Производные тригонометрических функций. Производная сложной функции»

**Цель:** проверить и оценить знания учащихся по теме: «Производная».

**Оборудование:** справочные пособия.

#### Содержание работы

Найдите:

- а)  $f' \left( \frac{\pi}{2} \right)$ , если  $f(x) = x \cos x$ ;
- б)  $f'(-1)$ , если  $f(x) = (3x + 4)^5$ .
- в)  $f'(-2)$ , если  $f(x) = (5 + 2x)^4$ ;
- г)  $f'(\pi)$ , если  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ .

### ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 22

**Тема:** «Понятие о непрерывности функции. Метод интервалов»

**Цель:** проверить и оценить знания учащихся по теме: «Производная».

**Оборудование:** справочные пособия.

## Содержание работы

1. Найдите все значения  $x$ , при которых  $f'(x) = 0$ , если  $f(x) = \cos 2x + \sqrt{3}x$ .
2. Найдите все значения  $x$ , при которых  $f'(x) = 0$ , если  $f(x) = 2\sqrt{2}x - \sin 4x$ .
3. Найдите все значения  $x$ , при которых  $f'(x) \leq 0$ , если  $f(x) = 6x - x^3$ .
4. Найдите все значения  $x$ , при которых  $f'(x) \geq 0$ , если  $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 0,5x^2$ .

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 23

**Тема:** «Геометрический и физический смысл производной»

**Цель:** Корректировать знания, умения и навыки по теме.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Справочный материал

**Производная  $y'(x)$  функции  $y=f(x)$  – это мгновенная скорость изменения этой функции.** В частности, если зависимость между пройденным путём  $S$  и временем  $t$  при прямолинейном неравномерном движении выражается уравнением  $S=f(t)$ , то для нахождения мгновенной скорости точки в какой-нибудь определённый момент времени  $t$  нужно найти производную  $S'=f'(x)$  и подставить в неё соответствующее значение  $t$ , то есть  **$v(t)=S'(t)$ .**

Производная от данной функции называется первой производной или производной первого порядка. Но производная функции также является функцией, и если она дифференцируема, то от неё, в свою очередь, можно найти производную.

Производная от производной называется **второй производной** или производной второго порядка и обозначается  **$f''(x)$** .

Если первая производная функции – это мгновенная скорость изменения любого процесса, заданного функцией, то вторая производная – это скорость изменения скорости, то есть ускорение, то есть  **$a(t) = v'(t) = S''(t)$**

**Первая производная – это скорость изменения процесса, вторая производная – ускорение ( $v=S'$ ;  $a=v'$ )**

*Для вычисления производных используют специальные таблицы и правила*

### Таблица производных

$$\begin{aligned}C' &= 0 \\x' &= 1 \\(x^n)' &= nx^{n-1} \\(\sqrt{x})' &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \left(\frac{1}{x}\right)' &= -\frac{1}{x^2} \\(\sin x)' &= \cos x \\(\cos x)' &= -\sin x \\(\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} \\(\operatorname{ctg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}\end{aligned}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

### Правила дифференцирования

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

### Производная сложной функции

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

## Правила дифференцирования

- Производная суммы равна сумме производных:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

- Производная произведения находится по формуле:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

В частности, постоянный множитель выносится за знак производной:

$$(cu)' = c \cdot u'$$

- Производная частного находится по формуле:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

- Производная сложной функции равна произведению производных всех преобразований, начиная с последнего:  $y = f(u), u = g(x) \Rightarrow y' = f'(u) \cdot g'(x)$

## Физический смысл производной

Понятие производной широко используется в современной физике. Приведем несколько примеров.

❖ **Скорость** :  $V(t) = S'(t)$  – первая производная от перемещения по времени;

❖ **Ускорение** :  $a(t) = V'(t)$  – первая производная от скорости по времени (вторая - от перемещения по времени);

❖ **Сила тока** :  $I(t) = q'(t)$  – первая производная от заряда по времени;

❖ **Мощность** :  $N(t) = A'(t)$  – первая производная от работы по времени;

### Содержание работы

**Пример 1.** Точка движется прямолинейно по закону  $S = \frac{t^3}{3} + 2t^2 - t$  ( $S$  выражается в метрах,  $t$  – в секундах). Найти скорость движения через 3 секунды после начала движения.

**Решение:**

скорость прямолинейного движения равна производной пути по времени, то есть  $v(t) = S'(t) = (\frac{t^3}{3} + 2t^2 - t)' = t^2 + 4t - 1$ .

Подставив в уравнение скорости  $t=3$  с, получим  $v(3)=3^2+4\cdot 3-1=20$  (м/с).

Ответ: 20 м/с.

**Пример 2.** Маховик, задерживаемый тормозом, поворачивается за  $t$  с на угол  $\varphi(t) = 4t - 0,2t^2$  (рад). Найдите:

а) угловую скорость вращения маховика в момент  $t = 6$  с;

б) в какой момент времени маховик остановится?

**Решение:** а) Угловая скорость вращения маховика определяется по формуле  $\omega = \varphi'$ . Тогда  $\omega = (4t - 0,2t^2)' = 4 - 0,4t$ .

Подставляя  $t = 6$  с, получим  $\omega = 4 - 0,4\cdot 6 = 1,6$  (рад/с).

б) В тот момент, когда маховик остановится, его скорость будет равна нулю ( $\omega=0$ ). Поэтому  $4 - 0,4t = 0$ . Отсюда  $t=10$  с.

Ответ: угловая скорость маховика равна (рад/с);  $t=10$  с.

**Пример 3.** Тело массой 6 кг движется прямолинейно по закону  $S=3t^2+2t-5$ .

Найти кинетическую энергию тела ( $E = \frac{mv^2}{2}$ ) через 3 с после начала движения.

**Решение:** найдём скорость движения тела в любой момент времени  $t$ .



$$v = S' = (3t^2 + 2t - 5)' = 6t + 2$$

Вычислим скорость тела в момент времени  $t=3$ .  $v(3) = 6 \cdot 3 + 2 = 20$  (м/с)..

Определим кинетическую энергию тела в момент времени  $t=3$ .

$$E = \frac{6 \cdot 20^2}{2} = 1200 \text{ (Дж)}$$

Ответ:  $E=1200$  Дж

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 24

**Тема:** «Физический смысл производной в профессиональных задачах»

**Цель:** Корректировать знания, умения и навыки по теме.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Содержание работы

|  |   |
|--|---|
| Задача 13. Изменение силы тока $I$ в зависимости от времени $t$ задано уравнением: $I = 2t^2 - 5t$ . Найдите скорость изменения тока в момент времени $t = 10$ с.                                    | Указание:<br>$I'(t) - ?$<br>$I'(10) - ?$ (А/с)  |
| Задача 14. Две материальные точки движутся прямолинейно по законам: $S_1 = 2,5t^2 - 6t + 1$ , $S_2 = 0,5t^2 + 2t - 3$ .<br>В какой момент скорости их равны?   | Указание:<br>$V_1(t) = S_1'(t)$ , $V_2(t) = S_2'(t)$ ,<br>$V_1(t) = V_2(t)$ , $t - ?$         |
| Задача 15. Две материальные точки движутся прямолинейно по законам: $S_1 = t^2 - 6t + 2$ , $S_2 = 4t + 5$ .<br>В какой момент времени скорость первой точки будет в два раза больше скорости второй? | Указание:<br>$V_1(t) = S_1'(t)$ , $V_2(t) = S_2'(t)$ ,<br>$V_1(t) > V_2(t)$ в 2 раза. $t - ?$ |

**Проверь себя: 95; 2; 7.**

**Механический смысл второй производной.**

Если первая производная функции – это мгновенная скорость изменения любого процесса, заданного функцией, то вторая производная – это скорость изменения скорости, то есть ускорение, то есть  $a(t) = v'(t) = s''(t)$

Итак, **первая производная – это скорость изменения процесса, вторая производная – ускорение.** ( $v = S'$ ;  $a = v'$ )

**Пример 4.** Точка движется прямолинейно по закону  $S(t) = 3t^2 - 3t + 8$ . Найти скорость и ускорение точки в момент  $t=4$  с.

**Решение:**

найдем скорость точки в любой момент времени  $t$ .

$$v = S' = (3t^2 - 3t + 8)' = 6t - 3.$$

Вычислим скорость в момент времени  $t=4$  с.

$$v(4) = 6 \cdot 4 - 3 = 21 \text{ (м/с)}$$



Найдём ускорение точки в любой момент времени  $t$ .

$a = v' = (6t-3)' = 6$  и  $a(4) = 6 \text{ (м/с}^2\text{)}$ , то есть ускорение в этом случае является величиной постоянной.

Ответ:  $v = 21 \text{ (м/с)}$ ;  $a = v' = 6 \text{ (м/с}^2\text{)}$ .

**Пример 5.** Тело массой 3 кг движется прямолинейно по закону  $S(t) = t^3 - 3t^2 + 5$ . Найти силу, действующую на тело в момент времени  $t = 4$  с.

**Решение:** сила, действующая на тело, находится по формуле  $F = ma$ .

Найдём скорость движения точки в любой момент времени  $t$ .

$$v = S' = (t^3 - 3t^2 + 5)' = 3t^2 - 6t.$$

$$\text{Тогда } v(4) = 3 \cdot 4^2 - 6 \cdot 4 = 24 \text{ (м/с)}.$$

$$\text{Найдём ускорение: } a(t) = v' = (3t^2 - 6t)' = 6t - 6.$$

$$\text{Тогда } a(4) = 6 \cdot 4 - 6 = 18 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

$$F = ma = 3 \cdot 18 = 54 \text{ Н}$$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 25

**Тема:** «Монотонность функции. Точки экстремума»

**Цель:** научиться исследовать графики функций, используя производную.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Справочный материал

Алгоритм исследования функции:

- 1) найти область определения функции;
- 2) выяснить, является ли функция четной или нечетной, периодической;
- 3) найти точки пересечения графика с осями координат;
- 4) найти промежутки знакопостоянства;
- 5) найти промежутки возрастания и убывания;
- 6) найти точки экстремума и значения функции в этих точках;
- 7) исследовать поведение функции в окрестности «особых» точек.

На основании такого исследования строится график функции.

Пример. Исследовать функцию  $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2$  и построить ее график.

Проведем исследование по указанной схеме:

1)  $D(f) = R$ , так как  $f$  – многочлен.

2) Функция  $f$  не является ни четной, ни нечетной.

3), 4) График  $f$  пересекается с осью ординат в точке  $(0; f(0))$ ; чтобы найти точки пересечения с осью абсцисс, надо решить уравнение  $3x^5 - 5x^3 + 2 = 0$ , один из корней которого ( $x = 1$ ) легко находится. Другие корни (если они есть) могут быть найдены только приближенно. Поэтому для данной функции остальные точки пересечения графика с осью абсцисс и промежутки знакопостоянства находить не будем (так как приведенная схема исследования имеет примерный характер).

5), 6) Найдём производную функции  $f$ :

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1).$$

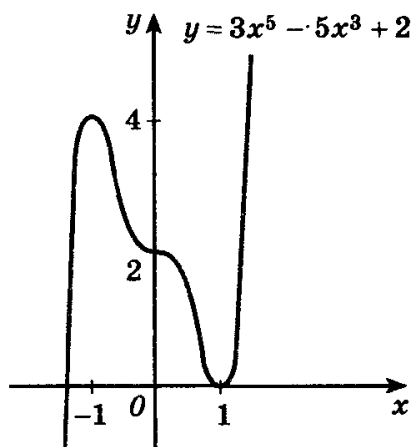
$D(f') = R$ , поэтому критических точек, для которых  $f'(x)$  не существует, нет.

Заметим, что  $f'(x) = 0$ , если  $x^2(x^2 - 1) = 0$ , т.е. при значениях аргумента, равных 0, -1 и 1. Рассматриваемая функция имеет три критические точки.

Составим таблицу:

| $x$     | $(-\infty; -1)$ | $-1$ | $(-1; 0)$  | $0$ | $(0; 1)$   | $1$ | $(1; \infty)$ |
|---------|-----------------|------|------------|-----|------------|-----|---------------|
| $f'(x)$ | +               | 0    | -          | 0   | -          | 0   | +             |
| $f(x)$  | $\nearrow$      | 4    | $\searrow$ | 2   | $\searrow$ | 0   | $\nearrow$    |
|         |                 | max  |            |     |            | min |               |

Строим график функции:



### Содержание работы

**Задание.** Исследуйте функцию и постройте ее график:

- 1)  $f(x) = x^2 - 2x + 8$ ;
- 2)  $f(x) = -x^2 + 5x + 4$ ;

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 26

**Тема:** «Исследование функций и построение графиков»

**Цель:** научиться исследовать графики функций, используя производную.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Содержание работы

**Задание.** Исследуйте функцию и постройте ее график:

- 1)  $f(x) = x^3 + 3x + 2$ ;
- 2)  $f(x) = 1 + 1,5x - 3x^2 - 2,5x^3$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 27

**Тема:** «Решение задач. Производная функции, ее применение»

**Цель:** научиться решать задачи на применение производной.

**Оборудование:** справочные пособия.

Справочный материал

### 1. Применение производной в физике.

**Физический смысл производной:** производная есть скорость изменения физической величины.

**Пример .** Найти мгновенную скорость при свободном падении.

Решение. Закон свободного падения имеет вид  $x = \frac{gt^2}{2}$ . Мгновенная скорость при свободном падении равна:  $v_{мгн} = x'$ , т.е.  $v_{мгн} = gt$ .

**Пример1 .** Пусть  $q = q(t)$  - количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника за время  $t$ . Найдем силу тока в данный момент времени  $t$

Решение. Сила тока есть производная от количества электричества, как функции от времени, т.е.  $I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = q'(t)$ ,

**Пример 2.** Пусть дан неоднородный стержень длины  $l$ ,  $m = m(x)$  - масса части стержня длины  $x$  (один из концов стержня принимается за начало отсчета). Найдем линейную плотность стержня в данной точке  $x$ .

Решение. Линейная плотность стержня в данной точке есть производная массы стержня как функции от его длины:  $\rho = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = m'(x)$ ,

Плотность стержня есть скорость изменения массы части стержня как функции его длины.

**Решение физических задач, связанных с нахождением скорости, ускорения и т.д.**

**Пример 1.** Дано уравнение прямолинейного движения тела:  $S = 3t^2 + 2$ , где  $S$  - путь, пройденный телом, м;  $t$  - время, с. Найдите скорость тела в момент времени  $t=1$  с.

Решение. Скорость это производная пути по времени. Значит:  $V = S' = 6t$   
Подставив значение времени получим:  $V(1) = 6 \text{ м/с}$

**Пример 2.** Точка движется по закону  $S = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 2$ . Найти скорость и ускорение через 2 с после начала движения (движение считать прямолинейным).

Решение. Скорость это производная пути по времени. Значит:  $V = S' = t^3 + t^2 + t$ . Подставив значение времени получим  $V(2) = 16 \text{ м/с}$

**Пример 3.** Тело движется прямолинейно по закону  $S(t) = 1 + t + t^2$ . Найти его кинетическую энергию через 5 с после начала движения, если масса тела 3 кг.

Решение. Формула нахождения кинетической энергии:  $E_k = \frac{mv^2}{2}$ . Найдем скорость тела.  $V = S' = 2t + 1$ ,  $V(5) = 11$ . Кинетическая энергия тела составит:  $E_k = \frac{3 \cdot 121}{2} = 181,5$ .

## 2. Решение экономических задач с помощью производной.

**Пример 1.** Выбрать оптимальный объем производства  $N$  фирмой, функция прибыли которой может быть смоделирована зависимостью:  $F(q) = q^2 - 8q + 10$ .

Решение: Оптимальный объём производства есть производная от функции прибыли, т.е.  $N = F'(q)$

$$F'(q) = R'(q) - C'(q) = 2q - 8 = 0 \rightarrow q_{\text{extr}} = 4$$

При  $q < q_{\text{extr}} = 4 \rightarrow F'(q) < 0$  и прибыль убывает

При  $q > q_{\text{extr}} = 4 \rightarrow F'(q) > 0$  и прибыль возрастает

При  $q = 4$  прибыль принимает минимальное значение.

## Содержание работы

### 1 вариант

1. Дано уравнение прямолинейного движения тела:,  $S = 2t^3 - 8t + 2$ , где  $S$ - путь, пройденный телом, м;  $t$ - время, с. Найдите скорость тела в момент времени  $t = 3$  с.

2. Точка движется по закону  $S = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 2$ . Найти скорость и ускорение через 3 с после начала движения (движение считать прямолинейным).

3. Пусть  $q = t^3 - 4t + 8$ - количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника за время  $t$ . Найдем силу тока в данный момент времени  $t = 2$ с.

4. Пусть дан неоднородный стержень длины  $l$ , масса неоднородного стержня меняется по закону:  $m=2x^3 - 8x + 12$ . Найти линейную плотность стержня в данной точке  $x=4$

5. Прибыль фирмы задана зависимостью :  $F(q) = 4q^2 - 4q + 12$ . Найти оптимальный объём производства  $N$  фирмы.

### 2 вариант

1. Дано уравнение прямолинейного движения тела:,  $S=3t^2-5t+2$ , где  $S$ - путь, пройденный телом, м;  $t$ - время, с. Найдите скорость тела в момент времени  $t=4$  с.

2. Точка движется по закону  $S = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 2$ . Найти скорость и ускорение через 4 с после начала движения (движение считать прямолинейным).

3. Пусть  $q= 3t^2 - 5t + 8$ - количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника за время  $t$ . Найдём силу тока в данный момент времени  $t=3$ с.

4. Пусть дан неоднородный стержень длины  $l$ , масса неоднородного стержня меняется по закону:  $m=3x^2 - 5x + 12$ . Найти линейную плотность стержня в данной точке  $x=4$

5. Прибыль фирмы задана зависимостью :  $F(q) = 5q^2 - 5q + 12$ . Найти оптимальный объём производства  $N$  фирмы.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 28

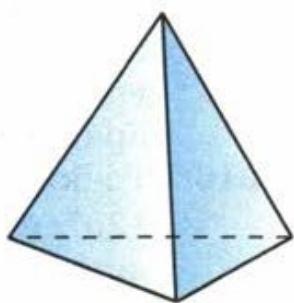
**Тема:** «Правильные многогранники, их свойства»

**Цель:** научиться изображать многогранники, решать задачи.

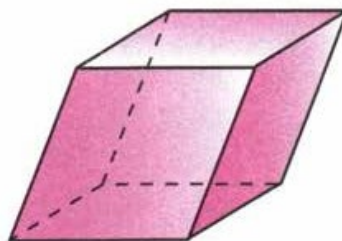
**Оборудование:** справочные пособия.

### Справочный материал

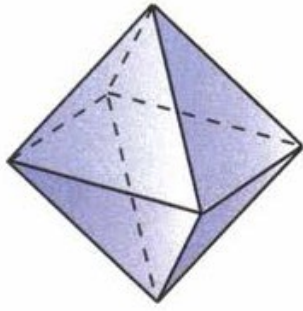
Виды многогранников:



тетраэдр

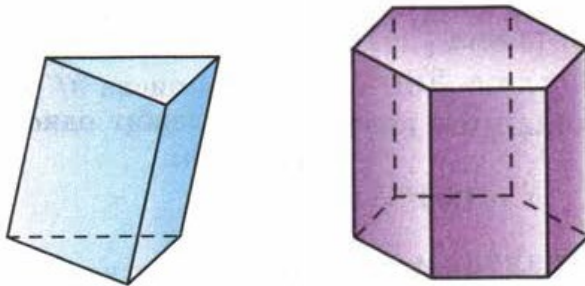


параллелепипед



октаэдр

Многогранник, составленный из двух равных многоугольников, расположенных в параллельных плоскостях, и  $n$  параллелограммов, называется призмой (см. рис.).



Многоугольники называются основаниями, а параллелограммы – боковыми гранями призмы. Стороны параллелограммов называются боковыми ребрами призмы. Эти ребра как противоположные стороны параллелограммов, последовательно приложенных друг к другу, равны и параллельны.

Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется высотой призмы.

Если боковые ребра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется прямой, в противном случае – наклонной. Высота прямой призмы равна ее боковому ребру.

Прямая призма называется правильной, если ее основания – правильные многоугольники. У такой призмы все боковые грани – равные прямоугольники.

Площадью полной поверхности призмы называется сумма площадей всех ее граней, а площадью боковой поверхности призмы – сумма площадей ее боковых граней. Площадь  $S_{\text{полн}}$  полной поверхности выражается через площадь  $S_{\text{бок}}$  боковой поверхности и площадь  $S_{\text{осн}}$  основания призмы формулой

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}.$$

### Теорема

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.

### Содержание работы

**Задание 1.** Докажите, что: а) у прямой призмы все боковые грани – прямоугольники; б) у правильной призмы все боковые грани – равные прямоугольники.

**Задание 2.** В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 12 см и 5 см. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол в  $45^\circ$ . Найдите боковое ребро параллелепипеда.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 29

**Тема:** «Понятие об объеме тела. Отношение объемов подобных тел»

**Цель:** научиться изображать многогранники, решать задачи, находить объем тел.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Содержание работы

**Задание 1.** Основанием прямого параллелепипеда является ромб с диагоналями 10 см и 24 см, а высота параллелепипеда равна 10 см. Найдите большую диагональ параллелепипеда.

**Задание 2.** Сторона основания правильной треугольной призмы равна 8 см, боковое ребро равно 6 см. Найдите площадь сечения, проходящего через сторону верхнего основания и противоположащую вершину нижнего основания.

**Задание 3.** Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция с основаниями 25 см и 9 см и высотой 8 см. Найдите двугранные углы при боковых ребрах призмы.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 30

**Тема:** «Комбинации многогранников и тел вращения»

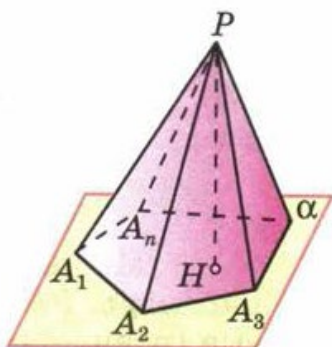
**Цель:** научиться находить ребра, высоту и площадь поверхности пирамиды.

**Оборудование:** справочные пособия.

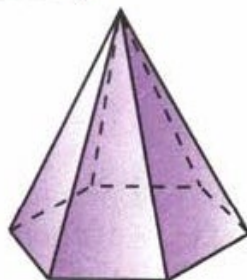
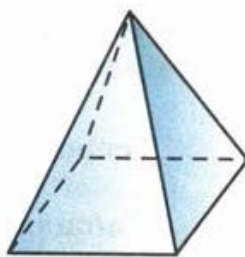
### Справочный материал

Многогранник, составленный из  $n$ -угольника  $A_1A_2\dots A_n$  и  $n$  треугольников (1), называется пирамидой. Многоугольник  $A_1A_2\dots A_n$  называется основанием, а  $n$  треугольников – боковыми гранями пирамиды. Точка  $P$  называется вершиной пирамиды, а отрезки  $PA_1, PA_2, \dots, PA_n$  – ее боковыми ребрами.

Пирамиду с основанием  $A_1A_2\dots A_n$  и вершиной  $P$  обозначают так:  $PA_1A_2\dots A_n$  и называют  $n$ -угольной пирамидой. На рисунке изображены четырехугольная и шестиугольная пирамиды. Ясно, что треугольная пирамида – это тетраэдр.



Пирамида. Многоугольник  $A_1A_2A_3 \dots A_n$  — основание пирамиды. Треугольники  $A_1PA_2, A_2PA_3, \dots, A_nPA_1$  — боковые грани,  $P$  — вершина пирамиды



Площадью полной поверхности пирамиды называется сумма площадей всех ее граней (т.е. основания и боковых граней), а площадью боковой поверхности пирамиды — сумма площадей ее боковых граней. Очевидно,  $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$ .

Пирамида называется правильной, если ее основание — правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является ее высотой.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется апофемой.

### Теорема

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.

### Содержание работы

**Задание.** Основанием пирамиды является ромб, сторона которого равна 5 см, а одна из диагоналей равна 8 см. Найдите боковые ребра пирамиды, если высота ее проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 7 см.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 31

**Тема:** «Комбинации многогранников и тел вращения»

**Цель:** научиться находить ребра, высоту и площадь поверхности пирамиды.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Содержание работы

**Задание 1.** Основанием пирамиды является параллелограмм, стороны которого равны 20 см и 36 см, а площадь равна  $360 \text{ см}^2$ . Высота пирамиды проходит



через точку пересечения диагоналей основания и равна 12 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

**Задание 2.** Основанием пирамиды является параллелограмм со сторонами 5 м и 4 м и меньшей диагональю 3 м. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 2 м. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 32

**Тема:** «Геометрические комбинации на практике»

**Цель:** научиться находить объемы тел.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Справочный материал

#### Теорема

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.

#### Следствие 1

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

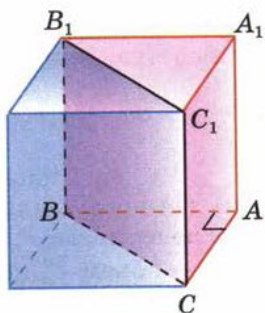
$$V = abc = Sh.$$

#### Следствие 2

Объем прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник, равен произведению площади основания на высоту.

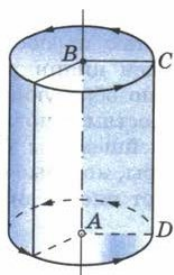
#### Теорема

Объем прямой призмы равен произведению площади основания на высоту.



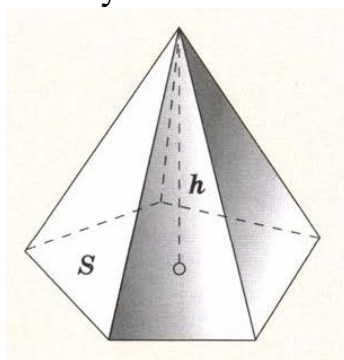
#### Теорема

Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту.



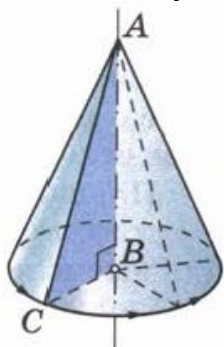
### Теорема

Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.



### Теорема

Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.



### Теорема

Объем шара радиуса R равен  $\frac{4}{3} \pi R^3$ .

### Содержание работы

**Задание 1.** Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, стороны основания которого равны a и b, а высота равна h, если:

а)  $a = 11$ ,  $b = 12$ ,  $h = 15$ ; б)  $a = 3\sqrt{2}$ ,  $b = \sqrt{5}$ ,  $h = 10\sqrt{2}$ ;

в)  $a = 18$ ,  $b = 5\sqrt{3}$ ,  $h = 13$ ; г)  $a = 3\frac{1}{3}$ ,  $b = \sqrt{5}$ ,  $h = 0,96$ .

**Задание 2.** Найдите объем куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , если: а)  $AC = 12$  см;

б)  $AC_1 = 3\sqrt{2}$  м; в)  $DE = 1$  см, где E - середина ребра AB.

### ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 33

**Тема:** «Геометрические комбинации на практике»

**Цель:** научиться находить объемы тел.

**Оборудование:** справочные пособия.

#### Содержание работы

**Задание 1.** Найдите объем прямой призмы  $ABCA_1B_1C_1$ , если: а) угол  $BAC = 120^\circ$ ,  $AB = 5$  см,  $AC = 3$  см и наибольшая из площадей боковых граней равна  $35 \text{ см}^2$ ; б) угол  $AB_1C = 60^\circ$ ,  $AB_1 = 3$ ,  $CB_1 = 2$  и двугранный угол с ребром  $BB_1$  прямой.

**Задание 2.** Площадь основания цилиндра равна  $Q$ , а площадь его осевого сечения равна  $S$ . Найдите объем цилиндра.

**Задание 3.** Найдите объем наклонной призмы, у которой основанием является треугольник со сторонами 10 см, 10 см и 12 см, а боковое ребро, равное 8 см, составляет с плоскостью основания угол в  $60^\circ$ .

**Задание 4.** Найдите объем правильной треугольной пирамиды, высота которой равна 12 см, а сторона основания равна 13 см.

### ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 34

**Тема:** «Решение задач. Многогранники и тела вращения»

**Цель:** закрепить знания учащихся при решении задач

**Оборудование:** справочные пособия.

#### Содержание работы

**Задание 1.** Пусть  $h$ ,  $r$  и  $V$  соответственно высота, радиус основания и объем конуса. Найдите:

- а)  $V$ , если  $h = 3$  см,  $r = 1,5$  см;
- б)  $h$ , если  $r = 4$  см,  $V = 48\pi \text{ см}^3$ ;
- в)  $r$ , если  $h = m$ ,  $V = p$ .

**Задание 2.** Высота конуса равна 5 см. На расстоянии 2 см от вершины его пересекает плоскость, параллельная основанию. Найдите объем исходного конуса, если объем меньшего конуса, отсекаемого от исходного, равен  $24 \text{ см}^3$ .

**Задание 3.** Найдите объем конуса, если площадь его основания равна  $Q$ , а площадь боковой поверхности равна  $P$ .

**Задание 4.** Пусть  $V$  – объем шара радиуса  $R$ , а  $S$  – площадь его поверхности. Найдите: а)  $S$  и  $V$ , если  $R = 4$  см; б)  $R$  и  $S$ , если  $V = 113,04 \text{ см}^3$ ; в)  $R$  и  $V$ , если  $S = 64\pi \text{ см}^2$

**Задание 5.** Вода покрывает приблизительно  $\frac{3}{4}$  земной поверхности. Сколько квадратных километров земной поверхности занимает суша? (Радиус Земли считать равным: 6375 км.)

**Задание 6.** Сколько кожи пойдет на покрышку футбольного мяча радиуса 10 см? (На швы добавить 8 % от площади поверхности мяча.)

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 35

**Тема:** «Решение задач. Первообразная функции, ее применение»

**Цель:** проверить и оценить знания учащихся по изученному материалу, закрепить знания при решении задач.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Справочный материал

Неопределенный интеграл для функции  $f(x)$  – это совокупность всех первообразных данной функции.

Если функция  $f(x)$  определена и непрерывна на промежутке  $(a, b)$  и  $F(x)$  – ее первообразная, то есть  $F'(x) = f(x)$  при  $a < x < b$ , то

$$\int f(x)dx = F(x) + C, a < x < b, \text{ где } C - \text{произвольная постоянная.}$$

### Содержание работы

**Задание 1.** Вычислите неопределенный интеграл:

- 1)  $\int x^4 dx$ ;
- 2)  $\int x^3 dx$ ;
- 3)  $\int \cos x dx$ ;
- 4)  $\int \sin x dx$ ;
- 5)  $\int 3\cos \frac{x}{2} dx$ ;
- 6)  $\int \frac{1}{\cos^2} dx$ ;
- 7)  $\int (2x + 1) dx$ .

**Задание 2.** Вычислите неопределенный интеграл:

- 1)  $\int \sin \frac{x}{3} dx$ ;
- 2)  $\int (\sin \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{4}) dx$ ;
- 3)  $\int \frac{1}{\sqrt{x+3}} dx$ ;
- 4)  $\int \frac{1}{\sqrt{2x+5}} dx$ ;
- 5)  $\int (1 + 2x)^3 dx$ ;

**Задание 3.** Найдите общий вид первообразных для функции

- а)  $f(x) = (3x - 2)^3 - 2\cos(5x - \frac{\pi}{3})$ ;
- б)  $f(x) = (5x + 3)^2 + 3\sin(2x - \frac{\pi}{6})$ .

**Задание 4.** Вычислите интеграл

а)  $\int_1^2 \frac{x^3 + 3x^2}{x+3} dx$       б)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2}\sin \frac{x}{2} + \frac{1}{3}\cos \frac{x}{3}) dx$

в)  $\int_3^4 \frac{x^3 - 2x^2}{x-2} dx$       г)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2}\cos \frac{x}{2} + \frac{1}{3}\sin \frac{x}{3}) dx$

**Задание 5.** Для функции  $f(x) = \sqrt{7x - 3}$  найдите первообразную, график которой проходит через точку  $A(1; 2)$ .

**Задание 6.** Для функции  $f(x) = \sqrt{5x + 6}$  найдите первообразную, график которой проходит через точку  $A(2; 1)$ .

**Задание 7.** Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями  
 $y = x^3 + 1, y = 0, x = 1, x = 2$ .

**Задание 8.** Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями  
 $y = x^2 + 3, y = 0, x = 1, x = 3$ .

**Задание 9.**

### Вариант 1

1. Найдите первообразную для следующих функций:

А)  $f(x) = \sqrt{3}$ ;

Б)  $f(x) = x^8$ ;

В)  $f(x) = \frac{1}{x^5}$ ;

Г)  $f(x) = 2 - x^4 + 3x^7$ ;

Д)  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2}{3}$ ;

Е)  $f(x) = (4x - 5)^2$ ;

Ж)  $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right)$ .

2. Найдите первообразную для следующих функций, проходящую через точку  $M$ :

А)  $f(x) = 3x^2 - 8x^3 + 5, M(-2; 10)$ ;

Б)  $f(x) = -8 \cos x, M\left(\frac{\pi}{6}; 5\right)$ .

### Вариант 2

1. Найдите первообразную для следующих функций:

А)  $f(x) = \frac{1}{7}$ ;

Б)  $f(x) = x^9$ ;

В)  $f(x) = \frac{1}{x^6}$ ;

Г)  $f(x) = x^5 + 8x^3 - \sqrt{5}$ ;

Д)  $f(x) = 4 + \sin x$ ;

Е)  $f(x) = (2 - 7x)^4$ ;

Ж)  $f(x) = \frac{1}{\sin^2\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)}$ .

2. Найдите первообразную для следующих функций, проходящую через точку  $M$ :

А)  $f(x) = 4x^3 + 10x - 9, M(3; 15)$ ;

$$Б) f(x) = \frac{6}{\cos^2 x}, M(\frac{\pi}{4}; -7).$$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 36

**Тема:** «Степенная функция, ее свойства»

**Цель:** изучить основных свойств функций, научиться решать задачи на применение свойств функций.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Справочный материал

Функция – это одно из важнейших математических понятий. Функция – зависимость переменной  $y$  от переменной  $x$ , если каждому значению  $x$  соответствует единственное значение  $y$ . Переменную  $x$  называют независимой переменной или аргументом. Переменную  $y$  называют зависимой переменной. Все значения независимой переменной (переменной  $x$ ) образуют область определения функции. Все значения, которые принимает зависимая переменная (переменная  $y$ ), образуют область значений функции.

#### Основные свойства функций

#### 1) Область определения функции и область значений функции.

Область определения функции - это множество всех допустимых действительных значений аргумента  $x$  (переменной  $x$ ), при которых функция  $y = f(x)$  определена. Область значений функции - это множество всех действительных значений  $y$ , которые принимает функция.

В элементарной математике изучаются функции только на множестве действительных чисел.

#### 2) Нули функции.

Нуль функции – такое значение аргумента, при котором значение функции равно нулю.

#### 3) Промежутки знакопостоянства функции.

Промежутки знакопостоянства функции – такие множества значений аргумента, на которых значения функции только положительны или только отрицательны.

#### 4) Монотонность функции.

Возрастающая функция (в некотором промежутке) - функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции.

Убывающая функция (в некотором промежутке) - функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.

#### 5) Четность (нечетность) функции.

Четная функция - функция, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для любого  $x$  из области определения выполняется равенство  $f(-x) = f(x)$ . График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Нечетная функция - функция, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для любого  $x$  из области определения справедливо равенство  $f(-x) = -f(x)$ . График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

#### 6) Ограниченная и неограниченная функции.

Функция называется ограниченной, если существует такое положительное число  $M$ , что  $|f(x)| \leq M$  для всех значений  $x$ . Если такого числа не существует, то функция - неограниченная.

#### 7) Периодичность функции.

Функция  $f(x)$  - периодическая, если существует такое отличное от нуля число  $T$ , что для любого  $x$  из области определения функции имеет место:  $f(x+T) = f(x)$ . Такое наименьшее число называется периодом функции. Все тригонометрические функции являются периодическими. (Тригонометрические формулы).

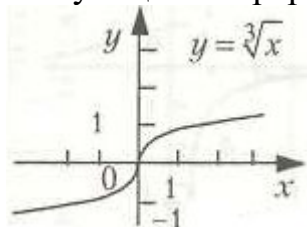
#### Степенная функция

**Степенной функцией** с действительным показателем называется функция вида  $y=x^b$ , где  $b$ -действительное число,  $x>0$ .

Коэффициент  $b$  определяет положение графика на координатной плоскости.

Свойства функции.

1. Функция определена для  $x>0$ .
2.  $E(y)=[0;+\infty)$ .
3. Функция возрастающая, если  $b>0$  и убывающая, если  $b<0$ .
4. Функция непрерывна на всей области определения.



#### Содержание работы

**Задание 1.** Найдите значения функции:

а)  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  в точках  $-1, 1/2, 10$ ;

б)  $f(x) = \sqrt{5x - x^2}$  в точках  $0, 1, 2$ ;

в)  $f(x) = x^2 + 2x$  в точках  $x_0, t + 1$ .

**Задание 2.** Найдите область определения каждой из функций:

а)  $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4x+3}$ ;

б)  $f(x) = \frac{5-x^2}{x^2+2x-8}$ ;

в)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ ;

г)  $f(x) = \sqrt{36 - x^2}$ .

**Задание 3.** Найти область определения и множество значений для функции обратной к заданной:

1.  $y = -2x + 1$       2.  $y = (x - 1)^3$       3.  $y = x^3 - 1$

**Задание 4.** На одной координатной плоскости построить график заданной функции и функции, обратной данной:

1.  $y = x^2 - 1$ , при  $x \geq 0$       2.  $y = x^3$

### ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 37

**Тема:** «Преобразование выражений с корнями  $n$ -ой степени»

**Цель:** закрепить навыки выполнения действий с корнями, применяя свойства корней  $n$ -й степени.

**Оборудование:** справочные пособия.

#### Справочный материал

1. Корнем  $n$ -ной степени из числа  $a$  называется такое число,  $n$ -ная степень которого равна  $a$ .
2. Арифметическим корнем  $n$ -ной степени из числа  $a$  называют неотрицательное число,  $n$ -ная степень которого равна  $a$ .

$$\begin{cases} \sqrt[n]{a} = b \\ a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^n = a \\ b \geq 0 \end{cases} \quad (n\text{-я степень } b \text{ равна подкоренному выражению } a)$$

Основное тождество  $(\sqrt[n]{a})^n = a$

- Число  $n$  называется показателем корня, а само число  $a$  - подкоренным выражением.
- При четном  $n$  существуют два корня  $n$ -й степени из любого положительного числа  $a$ ; корень  $n$ -й степени из числа  $0 = 0$ ; корней четной степени из отрицательных чисел не существует. При отрицательном  $n$  имеем один корень (отрицательный).
- Для корней нечетной степени справедливо равенство  $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$

#### Пример 1:

- 1)  $\sqrt[3]{27} = 3$      $3^3 = 27$  – корень нечетной степени
- 2)  $\sqrt[6]{64} = 2$  т. к.  $2^6 = 64$  – корень четной степени
- 3)  $\sqrt[3]{-8} = -2$  т. к.  $(-2)^3 = -8$  – не арифметический корень, а  $\sqrt[3]{8} = 2$  – арифметический корень



### 3. Основные свойства арифметических корней $n$ -ной степени.

Для любого натурального  $n$ , целого  $k$  и любых неотрицательных чисел  $a$  и  $b$  выполнены равенства:

$$1) \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$2) \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$$

$$3) \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} \quad (k > 0)$$

$$4) \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[nk]{a^k} \quad (k > 0)$$

$$5) \sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$$

6)

#### Пример 2:

Найдите значение: а)  $\sqrt[3]{8}$ ; б)  $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$

а)  $\sqrt[3]{8} = 2$ , так как  $2^3 = 8$  и  $2 > 0$

б)  $\sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{3}{2}$ , так как  $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$  и  $\frac{3}{2} > 0$

#### Пример 3. Преобразуем выражения:

а)  $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{8 \cdot 4} = \sqrt[5]{32} = 2$  (свойство 1<sup>0</sup>)

б)  $\sqrt[4]{5 \frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{3}{2}$  (свойство 2<sup>0</sup>)

в)  $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}} = \sqrt[15]{7}$  (свойство 3<sup>0</sup>)

г)  $\sqrt[21]{128} = \sqrt[21]{2^7} = \sqrt[3]{2}$  (свойство 4<sup>0</sup>);

д)  $\sqrt[7]{128^3} = (\sqrt[7]{128})^3 = 2^3 = 8$  (свойство 5<sup>0</sup>).

### Содержание работы

#### Вариант 1

1. Вычислите:

$$\sqrt[3]{4^3 \cdot 7^3}; \quad \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{125}; \quad \sqrt[3]{3 \frac{3}{8}};$$

$$\sqrt[3]{64 \cdot 0,008}; \quad \sqrt[5]{32 \cdot 100000};$$

$$\frac{\sqrt{320}}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{45}}; \quad \sqrt{\frac{4}{81} x^6 y^{20}}$$

2. Вычислите:

$$a) \sqrt[4]{81} + \sqrt[3]{125}; \quad б) (\sqrt[5]{2})^5 - \sqrt[3]{0,001};$$

$$в) \sqrt[4]{(-3)^4} + 3\sqrt[3]{\frac{8}{27}};$$

$$г) \sqrt{\sqrt[3]{64}} + \frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}};$$

$$д) \sqrt[4]{0,001} \cdot \sqrt[4]{0,1} + \sqrt[3]{5^6}$$

3. а) Внесите множитель под знак корня:  $2\sqrt[3]{7}$

б) Вынесите множитель из-под знака корня:  $\sqrt[4]{32}$

4. Найдите значение выражения:

а)  $\sqrt[4]{11-\sqrt{40}} \cdot \sqrt[4]{11+\sqrt{40}}$

б)  $\frac{1}{5-2\sqrt{3}} - \frac{1}{5+2\sqrt{3}}$

в)  $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} - \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{3}$

## Вариант 2

1. Вычислите:

$$\sqrt[4]{7^4 \cdot 9^4}; \quad \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}; \quad \sqrt[5]{7 \frac{19}{32}};$$

$$\sqrt[3]{8 \cdot 0,001}; \quad \sqrt[4]{81 \cdot 10000};$$

$$\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{48}}; \quad \sqrt{\frac{9}{49} x^8 y^{12}}$$

2. Вычислите:

$$а) \sqrt[6]{64} + \sqrt[3]{-27}; \quad б) (\sqrt[4]{2})^4 - \sqrt[4]{0,0001};$$

$$в) \sqrt[6]{(-3)^6} + 3\sqrt[4]{\frac{16}{81}};$$

$$г) \sqrt{\sqrt[3]{64}} + \frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}};$$

$$д) \sqrt[3]{0,04} \cdot \sqrt[3]{0,2} + \sqrt[4]{3^8}$$

3. а) Внесите множитель под знак корня:  $3\sqrt[4]{2}$

б) Вынесите множитель из-под знака корня:  $\sqrt[3]{81}$

4. Найдите значение выражения:

а)  $\sqrt[5]{7-\sqrt{17}} \cdot \sqrt[5]{7+\sqrt{17}}$

б)  $\frac{1}{7-4\sqrt{3}} - \frac{1}{7+4\sqrt{3}}$

$$в) \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} - \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{5}$$

### ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 38

**Тема:** «Решение иррациональных уравнений и неравенств»

**Цель:** обобщить и систематизировать знания по теме «иррациональные уравнения». Закрепить умения использовать полученные знания для решения уравнений.

**Оборудование:** справочные пособия.

#### Справочный материал

Для решения рационального уравнения используем последовательно знания следующих свойств:

- Стандартные приемы: раскрытие скобок.
- Методы решения уравнений: введение новой переменной.
- Правила преобразования уравнений.
- Решение квадратного уравнения.

Уравнение, которое можно свести к дроби  $f(x)/g(x)=0$ , называется *дробно рациональным уравнением*. Если уравнение имеет несколько слагаемых, то переносим их по одну сторону знака равенства и сводим к общему знаменателю. В результате получим дробную функцию  $f(x)/g(x)$ , которая равна

нулю  $\frac{f(x)}{g(x)}=0$ .

Следующим шагом находим корни числителя. Отвергаем среди них те, которые не принадлежат области допустимых значений (нули знаменателя) и записываем правильный ответ.

Иррациональным называется уравнение, в котором неизвестное (переменная) содержится под знаком корня или под знаком операции возведения в рациональную (дробную) степень.

Для решения иррациональных уравнений обычно используются следующие приемы:

- 1) «уединение» корня в одной из частей уравнения и возведение в соответствующую степень;
- 2) введение новой переменной;
- 3) сведение к системе уравнений;
- 4) применение свойств функций, входящих в уравнение.

Следует помнить, что при решении иррациональных уравнений необходима проверка всех найденных корней путем их подстановки в исходное уравнение или нахождение ОДЗ и следующий анализ корней (при решении методом приведения к равносильной смешанной системе уравнений и неравенств необходимость в этом отпадает).

## Содержание работы

### Решите уравнения

A)  $(3x - 4)^2 - (5x - 2)(5x + 2) + 20 = 0$

B)  $\frac{2x^2+4}{3} - \frac{2-3x}{4} = \frac{x^2+8}{6}$

C)  $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} = \frac{5}{8}$

D)  $\sqrt{1-x} = x + 1$

E)  $\sqrt{x^2 + x + 4} = 4$

F)  $\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x} = 2$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 39

**Тема:** «Решение иррациональных уравнений и неравенств»

**Цель:** обобщить и систематизировать знания по теме «иррациональные неравенства». Совершенствовать умения и навыки решения иррациональных неравенств.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Справочный материал

Свойства числовых неравенств.

1. Если  $a < b$ , то  $b > a$ .

2. Если  $a < b$  и  $b < c$ , то  $a < c$ . Точно так же, если  $a > b$  и  $b > c$ , то  $a > c$ .

3. Если  $a < b$ , то  $a + c < b + c$  (и  $a - c < b - c$ ). Если же  $a > b$ , то  $a + c > b + c$  (и  $a - c > b - c$ ).

4. Если  $a < b$  и  $c < d$ , то  $a + c < b + d$ ; точно так же, если  $a > b$  и  $c > d$ , то  $a + c > b + d$ ; Замечание. Два неравенства одинакового смысла нельзя почленно вычитать друг из друга, так как результат может быть верным, но может быть и неверным.

5. Если  $a < b$  и  $c < b - d$ ; если  $a < d$ , то  $a - c < b - d$ .

6. Если  $a < b$  и  $m$  – положительное число, то  $ma < mb$  и  $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$ ,

т.е. обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же положительное число (знак неравенства остаётся тем же).

Если же  $a < b$  и  $n$  – отрицательное число, то  $na > nb$  и  $\frac{a}{n} > \frac{b}{n}$ , т.е. обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, но при этом знак неравенства нужно переменить на противоположный.

7. Если  $a < b$  и  $c < d$ , где  $a, b, c, d > 0$ , то  $ac < bd$  и если  $a < b$ , то  $a^2 < b^2$  и если  $a > b$ , то  $a^2 > b^2$ , т.е. на множестве положительных чисел обе части неравенства можно возводить в квадрат.

8. Если  $a < b$ , где  $a, b > 0$ , то  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$  и если  $a > b$ , то  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ .

Опр. Иррациональными неравенствами называются, в которых переменные или рациональные функции переменных находятся под знаками корней.

При решении таких неравенств используют следующее утверждение: если обе части принимают только неотрицательные значения, то возведя обе части неравенства в квадрат, сохранив знак исходного неравенства, получим неравенство равносильное данному.

## Содержание работы

### Вариант 1.

$$\text{А) } \frac{x^2 - 14x - 15}{10 - 4x} > 0 \quad \text{б) } \sqrt{2x-1} < 3 \quad \text{в) } \frac{11+x}{x+3} \leq \frac{4}{x} - 1 \quad \text{г) } (2x-3) \cdot \sqrt{4-x} \geq 0$$

### Вариант 2

$$\text{А) } \frac{5x^2 + 4x - 1}{7 - 2x} < 0 \quad \text{б) } \sqrt{3x+2} > 4 \quad \text{в) } \frac{11+x}{x+3} \leq \frac{4}{x} - 1 \quad \text{г) } \sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} \leq \sqrt{2x-12}$$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 40

**Тема:** «Степени и корни. Степенная функция»

**Цель:** повторить и обобщить умения вычислять корень разной степени и применение этих действий для преобразования выражений содержащих корень.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Справочный материал

**Определение:** Арифметическим корнем натуральной степени  $n \geq 2$  из неотрицательного числа  $a$  называется

неотрицательное число,  $n$  – ая степень которого равна  $a$ .

### Примеры

$$1. \sqrt[3]{64} = 4, \text{ так как } 4 > 0 \text{ и } 4^3 = 64 \quad 2. \sqrt[3]{125} = 5, \text{ так как } 5 > 0 \text{ и } 5^3 = 125$$

Из определения арифметического корня следует, что если  $a \geq 0$ , то

$$(\sqrt[n]{a})^n = a \text{ и } \sqrt[n]{a^n} = a$$

### Свойства арифметического корня:

Арифметический корень  $n$  – ой степени обладает следующими свойствами: если  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$  и  $n, m$  – натуральные числа, причём  $n \geq 2$ ,  $m \geq 2$ , то

$$\begin{aligned} 1. \sqrt[n]{a \cdot b} &= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} & 2. \sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \\ 3. (\sqrt[n]{a})^m &= \sqrt[n]{a^m} & 4. \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[mn]{a} \end{aligned}$$

Корень нечётной степени из отрицательного числа  $a$  вычисляется следующим образом:

$$\sqrt[2k+1]{a} = -\sqrt[2k+1]{|a|}$$

$$\text{Например, } \sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{2^5} = -2$$

Примеры применения свойств арифметического корня.

$$1. \sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{27 \cdot 3} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$$

$$2. \sqrt[3]{\frac{256}{625}} : \sqrt[3]{\frac{4}{5}} = \sqrt[3]{\frac{256}{625} : \frac{4}{5}} = \sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{4}{5}$$

$$3. \sqrt[7]{5^{21}} = \sqrt[7]{(5^3)^7} = 5^3 = 125$$

$$4. \sqrt[3]{\sqrt[4]{4096}} = \sqrt[12]{2^{12}} = 2$$

$$5. (\sqrt[4]{9})^{-2} = \sqrt[4]{9^{-2}} = \sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \frac{1}{3}$$

## Содержание работы

### 1 вариант

$$1. \text{ Вычислить: а) } \sqrt[5]{3^{10} \cdot 2^{15}} ; \quad \text{б) } \sqrt[4]{3^{12} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8}$$

$$2. \text{ Упростить выражение: а) } (\sqrt[3]{y^2})^3 ; \quad \text{б) } (\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{b^3})^{12} ;$$

$$3. \text{ Вычислить: а) } \frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}} + \sqrt[6]{27^2} - \sqrt{\sqrt[3]{64}} ; \text{ б) } \sqrt[3]{11 - \sqrt{57}} \cdot \sqrt[3]{11 + \sqrt{57}} ; \quad \text{в) }$$

$$\left( \sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \right) : \sqrt[3]{2}$$

$$4. \text{ Упростить выражение: } \sqrt[3]{\sqrt[3]{a^{18}}} + \left( \sqrt{\sqrt[3]{a^4}} \right)^3$$

### 2 вариант

$$1. \text{ Вычислить: а) } \sqrt[3]{2^3 \cdot 5^6} \quad \text{б) } \sqrt[10]{4^{30} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20}}$$

$$2. \text{ Упростить выражение: ; а) } \left( \sqrt{\sqrt[3]{a^2 b}} \right)^6 ; \quad \text{б) } (\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b})^6$$

$$3. \text{ Вычислить: а) } \sqrt[3]{3\frac{3}{8}} + \sqrt[4]{18} \cdot \sqrt[4]{4\frac{1}{2}} - \sqrt{\sqrt{256}} ; \text{ б) } \sqrt[4]{17 - \sqrt{33}} \cdot \sqrt[4]{17 + \sqrt{33}} ; \text{ в) }$$

$$(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}) \cdot (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})$$

$$4. \text{ Упростить выражение: } \sqrt[3]{\sqrt{x^6 y^{12}}} - (\sqrt[5]{xy^2})^5$$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 41

**Тема:** «Показательная функция, ее свойства»

**Цель:** закрепить знания и совершенствовать умения в работе с показательной функцией.

**Оборудование:** справочные пособия.

## Содержание работы

### Образец выполнения задания

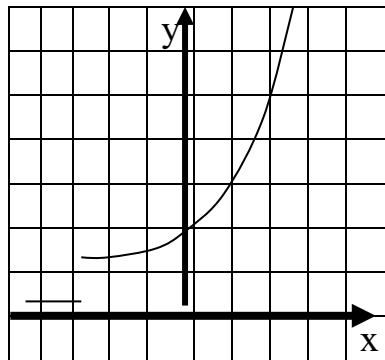
**Построить график функции и записать его свойства:  $y=2^x$**

Решение:

1. Зададим таблицу значений:  
график функции:

2. Построим

|   |   |   |   |     |     |
|---|---|---|---|-----|-----|
| X | 0 | 1 | 2 | -1  | -2  |
| y | 1 | 2 | 4 | 1/2 | 1/4 |



3. Свойства

1). ООФ  $x \in R$

2). Множество значений  $y > 0$

3). Монотонность: функция  $\uparrow$

### Решить самостоятельно

**Задание 1.** Построить график функции и записать его свойства:  $y=4^x$ .

**Задание 2.** Построить график функции и записать его свойства:  $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ .

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 42

**Тема:** «Решение показательных уравнений и неравенств»

**Цель:** закрепить умение построения графика показательной функции, научиться решать показательные уравнения и неравенства.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Справочный материал

Решение показательных уравнений часто сводится к решению уравнения  $a^x = a^b$ , где  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $x$  — неизвестное. Это уравнение решается с помощью свойства степени: степени с одинаковым основанием  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  равны тогда и только тогда, когда равны их показатели.

**Пример 1:** Решить уравнение  $4 \cdot 2^x = 1$ .

**Решение:** Запишем уравнение в виде  $2^{x+2} = 2^0$ , откуда  $x + 2 = 0$ ,  $x = -2$ .

**Ответ:**  $x = -2$ .

**Пример 2:** Решить уравнение  $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 25$ .

**Решение:** Вынося в левой части за скобки общий множитель  $3^{x-2}$ , получаем  $3^{x-2}(3^3 - 2) = 25$ ,  $3^{x-2} \cdot 25 = 25$ , откуда  $3^{x-2} = 1$ ,  $x - 2 = 0$ ,  $x = 2$ .

Ответ:  $x = 2$ .

Пример 3: Решить уравнение  $3^x = 7^x$ .

Решение: Так как  $7^x \neq 0$ , то уравнение можно записать в виде  $\frac{3^x}{7^x} = 1$ , откуда

$$\left(\frac{3}{7}\right)^x = 1, x = 0.$$

Ответ:  $x = 0$ .

Пример 4: Решить уравнение  $9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$ .

Решение: Заменой  $3^x = t$  данное уравнение сводится к квадратному уравнению  $t^2 - 4t - 45 = 0$ . Решая это уравнение, находим его корни:  $t_1 = 9$ ,  $t_2 = -5$ , откуда  $3^x = 9$ ,  $3^x = -5$ . Уравнение  $3^x = 9$  имеет корень  $x = 2$ , а уравнение  $3^x = -5$  не имеет корней, так как показательная функция не может принимать отрицательные значения.

Ответ:  $x = 2$ .

Решение показательных неравенств часто сводится к решению неравенств  $a^x > a^b$  или  $a^x < a^b$ .

Эти неравенства решаются с помощью свойства возрастания или убывания показательной функции: для возрастающей функции большему значению функции соответствует большее значение аргумента, а для убывающей функции большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента.

Пример 1: Решить неравенство  $3^x < 81$ .

Решение: Запишем неравенство в виде  $3^x < 3^4$ . Так как  $3 > 1$ , то функция  $y = 3^x$  является возрастающей. Поэтому решениями неравенства  $3^x < 81$  являются числа  $x < 4$ .

Ответ:  $x < 4$ .

Пример 2: Решить неравенство  $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \sqrt{8}$ .

Решение: Запишем неравенство в виде

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2^{\frac{3}{2}}, \text{ или } \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Так как  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  - убывающая функция, то  $x < -\frac{3}{2}$ .

Ответ:  $x < -\frac{3}{2}$ .

Пример 3: Решить неравенство  $16^x + 4^x - 2 > 0$ .

Решение: Обозначим  $4^x = t$ , тогда получим квадратное неравенство  $t^2 + t - 2 > 0$ . Это неравенство выполняется при  $t < -2$  и при  $t > 1$ . Так как  $t = 4^x$ , то получим два неравенства  $4^x < -2$ ,  $4^x > 1$ . Первое неравенство не имеет решений, так как

$4^x > 0$  при всех  $x \in \mathbb{R}$ . Второе неравенство можно записать в виде  $4^x > 4^0$ , откуда



$$x > 0.$$

Ответ:  $x > 0$ .

### Содержание работы

1. Постройте график функций и перечислите их свойства:

а)  $y = 0,4^x + 1$ ;

б)  $y = 2^{x-3}$ ;

в)  $y = 7^{x-1} - 3$ .

2. Решите уравнения:

а)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4x}$ ;

б)  $4^{x+3} + 4^x = 260$ ;

в)  $5^{x+2} - 5^x = 120$ ;

г)  $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$ ;

д)  $36^x + 3 \cdot 6^x - 4 = 0$ .

### ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 43

**Тема:** «Решение показательных уравнений и неравенств»

**Цель:** закрепить умение построения графика показательной функции, научиться решать показательные уравнения и неравенства.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Содержание работы

1. Постройте график функций и перечислите их свойства.

а)  $y = 0.5^x - 1$ ;

б)  $y = 3^{x-4}$ ;

в)  $y = 5^{x+2} - 1$ .

2. Решите уравнения:

а)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2-12} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10x}$ ;

б)  $3^{x+3} + 3^x = 84$ ;

в)  $2^{x+5} - 2^x = 60$ ;

г)  $144^x - 10 \cdot 12^x + 21 = 0$ ;

д)  $4^x + 4 \cdot 2^x - 5 = 0$ .

### ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 44

**Тема:** «Решение показательных уравнений и неравенств»

**Цель:** научиться решать показательные неравенства.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Содержание работы

Решить неравенства:

1.  $3^x < 81$

2.  $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \sqrt{27}$

3.  $5^x > 125$

4.  $4^x < 16$

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 45**

**Тема:** «Решение показательных уравнений и неравенств»

**Цель:** освоить решение показательных неравенств.

**Оборудование:** справочные пособия.

#### **Содержание работы**

Решить неравенства:

1.  $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \sqrt[3]{128}$

2.  $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \sqrt{32}$

3.  $2^{3x+2} - 2^{3x-2} < 30$

4.  $2^{x+3} - 2^{x+1} \geq 12$

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 46**

**Тема:** «Системы показательных уравнений»

**Цель:** освоить решение систем показательных уравнений.

**Оборудование:** справочные пособия.

#### **Содержание работы**

Решить систему:

1. 
$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 3^{x+y} = 27 \end{cases}$$

2. 
$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3^{x-y} = 81 \end{cases}$$

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 47**

**Тема:** «Решение задач. Показательная функция»

**Цель:** проверить знания учащихся по изученному материалу.

**Оборудование:** справочные пособия.

## Содержание работы

### Задание 1.

Решить уравнение:

1)  $4^x = 16$

2)  $\left(\frac{1}{27}\right)^x = \frac{1}{3}$

3)  $6^{x-2} = 5^{x-2}$

4)  $3^{4x-4} - 3^{4x-7} = 78$

5)  $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$

### Задание 2.

Решить неравенство:

1)  $2^x > 32$

2)  $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \sqrt[3]{81}$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 48

**Тема:** «Свойства логарифмов. Операция логарифмирования»

**Цель:** обеспечить закрепление понятия логарифм числа; формирование практических навыков преобразования логарифмических выражений на основе изученного теоретического материала (определения и свойств логарифмов).

**Оборудование:** справочные пособия.

## Содержание работы

Найдите  $x$ :

1)  $\log_3 x = -2$ ;      2)  $\log_{36} x = \frac{1}{2}$ ;      3)  $\log_3 x = 3$ ;

4)  $\log_{64} 4 = x$ ;      5)  $\log_3 \frac{1}{27} = x$ ;      6)  $\log_2 16 = x$ ;

7)  $\log_x 16 = 2$ ;      8)  $\log_x \frac{1}{8} = -3$ ;      9)  $\log_x 5 = \frac{1}{3}$ .

10)  $\log_2 x = -3$ ;      11)  $\log_{49} x = \frac{1}{2}$ ;      12)  $\log_2 x = 3$ ;

13)  $\log_{625} 5 = x$ ;      14)  $\log_2 \frac{1}{32} = x$ ;      15)  $\log_3 27 = x$ ;

16)  $\log_x 25 = 2$ ;      17)  $\log_x \frac{1}{27} = -3$ ;      18)  $\log_x 4 = \frac{1}{3}$ .

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 49

**Тема:** «Свойства логарифмов. Операция логарифмирования»

**Цель:** обеспечить закрепление понятия логарифм числа; формирование практических навыков преобразования логарифмических выражений на основе изученного теоретического материала (определения и свойств логарифмов).

**Оборудование:** справочные пособия.

### Содержание работы

**Вычислите:**

1)  $\log_4 9 + 2 \log_4 8 - 2 \log_4 3$ ;

2)  $\log_6 \sqrt{60} - \log_6 \sqrt{10}$ ;

3)  $2^{1 + \log_2 5}$

4)  $\log_8 3 + 3 \log_8 4 - \frac{1}{2} \log_8 9$ ;

5)  $\log_7 \sqrt{14} - \log_7 \sqrt{2}$ ;

6)  $5^{\log_5 10 - 1}$

7)  $\log_{13} \sqrt[5]{169}$ ;

8)  $\frac{5}{3} \log_{0,6} \sqrt[5]{8} - 3 \log_{0,6} 3 + \frac{1}{2} \log_{0,6} 36$ .

9)  $\log_2 8^7$ ;

10)  $\log_3 3,6 - \log_3 1,4 + \log_3 1\frac{1}{6}$ .

11)  $\log_3 4 - 4 \log_3 2 + \log_3 \frac{4}{9} + \log_3 1$

12)  $\frac{5}{3} \log_{0,6} \sqrt[5]{8} - 3 \log_{0,6} 3 + \frac{1}{2} \log_{0,6} 36$ .

13)  $2^{3 \log_2 4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 1}$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 50

**Тема:** «Логарифмическая функция, ее свойства»

**Цель:** закрепить знания и умения студентов по освоению логарифмов и свойств логарифмической функции.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Содержание работы

1) Построить графики функции  $y = \log_2 x$ ,  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ .

2) Привести 3 примера возрастающей логарифмической функции.

3) Привести 3 примера убывающей логарифмической функции.

4) Схематически изобразить графики функций  $y = \log_6 x$ ,  $y = \log_{0,4} x$ .

5) Найти область определения функции  $y = \log_6(x^2 + 4x - 5)$ .

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 51

**Тема:** «Решение логарифмических уравнений и неравенств»

**Цель:** научиться решать логарифмические уравнения и неравенства.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Справочный материал

Логарифмом числа  $b$  по основанию  $a$ , где  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , называется показатель степени, в которую надо возвести число  $a$ , чтобы получить  $b$ , т.е.

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b.$$

Например,  $\log_2 8 = 3$ , так как  $2^3 = 8$ ;  $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ , так как  $3^{-2} = \frac{1}{9}$ .

При выполнении преобразований выражений, содержащих логарифмы, при вычислениях и при решении уравнений часто используются различные свойства логарифмов. Рассмотрим основные из них.

Пусть  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ ,  $r$  – любое действительное число. Тогда справедливы формулы:

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c,$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c,$$

$$\log_a b^r = r \log_a b,$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \text{ (формула перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию).}$$

В математике и ее приложениях часто встречается логарифмическая функция  $y = \log_a x$ , где  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ . Область определения данной функции – множество всех положительных чисел, т.е.  $x > 0$ .

Пример 1: Решить уравнение

$$\log_2 (x + 1) + \log_2 (x + 3) = 3. \quad (1)$$

Решение: По свойству логарифма верно равенство

$$\log_2 ((x + 1)(x + 3)) = 3. \quad (2)$$

Из этого равенства по определению логарифма получаем

$$((x + 1)(x + 3)) = 8. \quad (3)$$

$$x^2 + 4x + 3 = 8, \text{ т.е. } x^2 + 4x - 5 = 0, \text{ откуда } x_1 = 1, x_2 = -5.$$

Так как уравнение (3) является следствием исходного уравнения, то необходима проверка. Проверим, являются ли числа 1 и -5 корнями уравнения (1). Подставляя в левую часть исходного уравнения  $x = 1$ , получаем  $\log_2 (1 + 1) + \log_2 (1 + 3) = \log_2 2 + \log_2 4 = 1 + 2 = 3$ , т.е.  $x = 1$  – корень уравнения (1).

При  $x = -5$  числа  $x + 1$  и  $x + 3$  отрицательны, и поэтому левая часть уравнения (1) не имеет смысла, т.е.  $x = -5$  не является корнем этого уравнения.

Ответ:  $x = 1$ .

Пример 2: Решить уравнение

$$\log_4 (2x - 1) \cdot \log_4 x = 2 \log_4 (2x - 1).$$

Решение: Преобразуем данное уравнение:

$$\log_4 (2x - 1) \cdot \log_4 x - 2 \log_4 (2x - 1) = 0,$$

$$\log_4 (2x - 1) \cdot (\log_4 x - 2) = 0.$$

Приравнивая каждый из множителей левой части уравнения к нулю, получаем:

1)  $\log_4 (2x - 1) = 0$ , откуда  $2x - 1 = 1$ ,  $x_1 = 1$ ;

2)  $\log_4 x - 2 = 0$ , откуда  $\log_4 x = 2$ ,  $x_2 = 16$ .

Проверка показывает, что оба значения  $x$  являются корнями исходного уравнения.

Ответ:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 16$ .

Пример 3: Решить уравнение  $\log_3 x + \log_x 3 = \frac{5}{2}$ .

Решение: Уравнение имеет смысл, если  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ .

Пусть  $t = \log_3 x$ , тогда  $\log_x 3 = \frac{1}{t}$  и уравнение примет вид  $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$ , или  $2t^2 - 5t + 2 = 0$ , откуда  $t_1 = 2$ ,  $t_2 = \frac{1}{2}$ . Если  $t = 2$ , то  $\log_3 x = 2$ ,  $x = 9$ . Если  $t = \frac{1}{2}$ , то  $\log_3 x = \frac{1}{2}$ ,  $x = \sqrt{3}$ .

Найденные значения  $x$  удовлетворяют условиям  $x > 0$  и  $x \neq 1$  и являются корнями данного уравнения.

Ответ:  $x_1 = 9$ ,  $x_2 = \sqrt{3}$ .

Приведем примеры решения логарифмических неравенств. Обычный способ таких неравенств заключается в переходе от них к более простому неравенству или системе неравенств, имеющей то же самое множество решений, т.е. к равносильному неравенству или к равносильной системе неравенств.

Пример: Решить неравенство  $\lg(x + 1) \leq 2$ .

Решение: Правая часть данного неравенства имеет смысл при всех значениях  $x$ , а левая часть – при  $x + 1 > 0$ , откуда  $x > -1$ , т.е.  $x > -1$  – область определения исходного неравенства.

Запишем исходное неравенство в виде:

$$\lg(x + 1) \leq \lg 100.$$

Так как  $10 > 1$ , то  $x + 1 \leq 100$ , откуда  $x \leq 99$ . Учитывая область определения исходного неравенства, получаем  $-1 < x \leq 99$ .

## Содержание работы

### 1. Решить уравнения:

1)  $\log_2(x - 5) + \log_2(x + 2) = 3$ ;

2)  $\lg(x - 1) + \lg(x + 1) = 0$ ;

3)  $\lg(3x - 1) - \lg(x + 5) = \lg 5$ ;

4)  $\log_3(5x + 3) = \log_3(7x + 5)$ .

### 2. Решить уравнения:

1)  $\log_5 x^2 = 0$ ;

2)  $\log_4 x^2 = 3$ ;

3)  $\lg x^4 + \lg(4x) = 2 + \lg x^3$ ;

4)  $\log_3 x^2 - \log_3 \frac{x}{x+6} = 3$ ;

5)  $\log_2 x - 2\log_x 2 = -1$ ;

6)  $\log_3 x + 2\log_x 3 = 3$ .

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 52

**Тема:** «Решение логарифмических уравнений и неравенств»

**Цель:** научиться решать логарифмические уравнения и неравенства.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Содержание работы

Найти область определения функции:

1)  $y = \lg(3x - 2)$ ;

2)  $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2)$ ;

3)  $y = \log_2(7 - 5x)$ ;

4)  $y = \log_7(4 - x^2)$ ;

5)  $y = \log_5(x^2 - 4x + 3)$ ;

6)  $y = \sqrt{\lg x + \lg(x + 2)}$ ;

7)  $y = \frac{3x+2}{1-x}$ .

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 53

**Тема:** «Решение задач. Логарифмы. Логарифмическая функция»

**Цель:** научиться решать логарифмические уравнения и неравенства.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Содержание работы

**Задание 1.** Решить уравнение:

1)  $\log_3(2x - 11) = 2$ ;

2)  $\log_4(2x - 7) = 0$ ;

3)  $\log_{\frac{1}{6}}(3x + 12) = -1$ ;

4)  $\log_7(6 - 4x) = 2$ ;

5)  $\log_{\frac{1}{3}}(x + 5) = -3$

6)  $\log_3(x^2 - 6x + 17) = 2$

7)  $\log_3(3x + 2) = \log_3(x + 4)$

8)  $\log_{0,3}(-x^2 + 5x + 7) = \log_{0,3}(10x - 7)$ .

**Задание 2.** Решить неравенство:

1)  $\log_3(x + 2) < 3$ ;

2)  $\log_8(4 - 2x) \geq 2$ ;

3)  $\log_3(x + 1) < -2$ ;

4)  $\log_{\frac{1}{3}}(x - 1) \geq -2$ ;

5)  $\lg x > \lg 8 + 1$ ;

6)  $\lg x > 2 - \lg 4$ ;

7)  $\log_{\frac{1}{5}}(3x - 5) > \log_{\frac{1}{5}}(x + 1)$ ;

$$8) \log_{15} (x - 3) + \log_{15} (x - 5) < 1.$$

**Задание 3.** Построить графики функции  $y = \log_2 x$ ,  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ .

**Задание 4.** Найти область определения функции  $y = \log_9(x^2 - 7x + 12)$ .

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 54

**Тема:** «Графы»

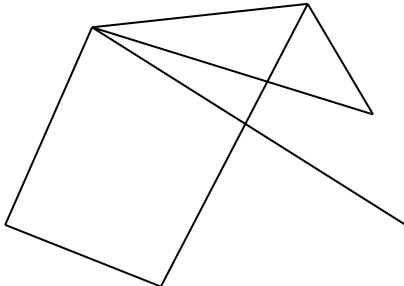
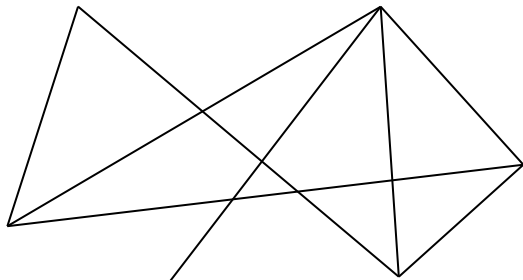
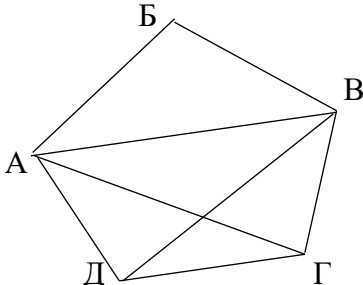
**Цель:** задание графа, вычисление степеней вершин.

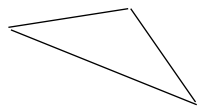
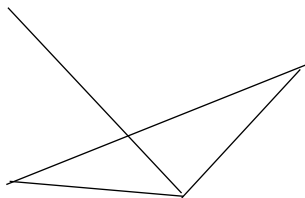
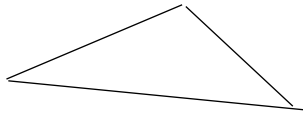
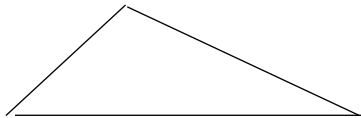
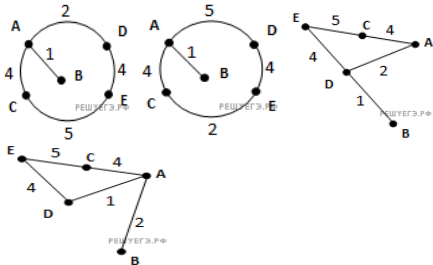
**Оборудование:** справочные пособия.

### Содержание работы

|         | 1 вариант   | 2 вариант   |
|---------|---|---|
| Часть А |   |   |
| 1       | Точки графа называются...<br>а) рёбрами графа;<br>б) пунктами графа;<br>в) вершинами графа<br>г) узлами графа.  | Граф - это...<br>а) множество точек, две из которых обязательно соединяются линиями;<br>б) множество точек, которые никогда не соединяются линиями;<br>в) только две точки, которые соединяются линиями;<br>г) множество точек, которые могут соединяться линиями.  |
| 2       | Линии, которые связывают вершины, называются...<br>а) сторонами графа; б) вершинами графа;<br>в) рёбрами графа; г) отрезками.   | Какого элемента нет в графах?<br>а) ребра; б) вершины; в) высоты;<br>г) все элементы присутствуют.  |
| 3       | Как называется направленная линия (со стрелкой)?<br>а) дуга; б) ребро; в) вершина.  | Как называется ненаправленная линия (без стрелки)?<br>а) дуга; б) ребро; в) вершина.  |
| 4       | Изобразите графически полный ориентированный граф на 6 вершинах.  | Изобразите графически полный ориентированный граф на 4 вершинах.  |
| 5       | Изобразите графически неполный ориентированный граф на 4 вершинах.  | Изобразите графически неполный ориентированный граф на 6 вершинах.  |
| 6       | Сколько рёбер имеет полный граф с пятью вершинами?  | Сколько рёбер имеет полный граф с шестью вершинами?   |
| 7       | Изобразите с помощью графа договорные отношения между предприятиями А, Б, В, Г, Д, Е, если к рассматриваемому моменту:<br>1) предприятие А установило договорные отношения со всеми другими предприятиями;<br>2) Б установило с Г и Д;<br>3) В установило со всеми предприятиями, кроме предприятия Е.<br>Сколько вершин и сколько ребер имеет полученный граф? | Изобразите с помощью графа договорные отношения между предприятиями А, Б, В, Г, Д, Е, если к рассматриваемому моменту:<br>1) предприятие В установило договорные отношения со всеми другими предприятиями;<br>2) А установило с Г и Д;<br>3) Б установило со всеми предприятиями, кроме предприятия Д.<br>Сколько вершин и сколько ребер имеет полученный граф? |
|         | а) 5 вершин ,10 рёбер ; б) 6 вершин ,11 рёбер ; в) 6 вершин , 10 рёбер ; г) 5 вершин ,12  |   |



|    |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|----|---|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|    | рёбер.  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 8  | В соревнованиях по футболу участвуют 6 команд. Каждую из команд обозначили А,В, С, D, E, F.Определите по графу, какие из команд уже сыграли друг с другом. Сколько матчей сыграла каждая команда?   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|    |    |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|    | <table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td><td>F</td></tr><tr><td>а</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>4</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>б</td><td>3</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>в</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>г</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>3</td><td>1</td><td>3</td></tr></table> |  |   | A | B | C | D | E | F | а | 3 | 2 | 2 | 4 | 2 | 1 | б | 3 | 4 | 2 | 2 | 1 | 2 | в | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | г | 2 | 4 | 3 | 3 | 1 | 3 |
|    | A   | B  | C | D | E | F |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| а  | 3   | 2  | 2 | 4 | 2 | 1 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| б  | 3   | 4  | 2 | 2 | 1 | 2 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| в  | 4   | 3  | 2 | 1 | 2 | 2 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| г  | 2   | 4  | 3 | 3 | 1 | 3 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 9  | Определите вид графа:   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|    |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|    | а) неограф ; б) мультиграф ; в) псевдограф ; г) орграф .  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 10 | На рисунке изображен :  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|    |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|    | а) полный граф; б) неполный граф; в) граф типа «дерево» ; г) нулевой.   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 11 | Вершина графа нулевой степени называется:   | Вершина графа первой степени называется:   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|    | а) висячей ;б) доминирующей ;в) изолированной.  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 12 | Какие из указанных в графе на рисунке маршрутов являются путем?   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|    |    |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|    | а) АВГВБ; б) АВГВ; в) АВДАГ ; г) АБВ.   | а) АВГВБ; б) АВГВ; в) АВДАГ ; г) АБВ.  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 13 | Сколько ребер нужно провести чтобы достроить граф, изображенный на рисунке до полного?  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |

|                 |    |  |                                    |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
|-----------------|---|---|------------------------------------|--------------|---------------|--------|-------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|--------|---|-------|-------|--------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|---|---------|---------|--------------------|------------------------------------|---------|--------|---|----|---------|---------|---|----|---------|----------|---|----|--------|---------|----|---|--------|---------|----|---|---------|--------|----|---|---------|----------|----|---|----------|---------|---|----|--|---|---|---|---|---|--|---|--|---|---|---|--|---|---|---|--|---|--|--|--|---|---|---|---|---|---|--|---|---|---|--|---|---|--|--|--|--|---|---|--|--|--|---|---|---|--|--|--|---|---|--|--|---|---|--|
|                 | а) 3 ; б) 4 ; в) 5 ; г) 6 .   |   |                                    |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| 14              | Дан граф:   |   |                                    |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
|                 |    |  |                                    |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
|                 | Степень вершины 1 равна: а) 3; б) 4; в) 5; г) 6;  |   |                                    |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| 15              | По матрицам смежности определить какие из неграфов являются полными:  |   |                                    |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
|                 | <table><tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>   |   | 1                                  | 2            | 3             | 4      | 0     | 1     | 0     | 1      | 1      | 1     | 1     | 1     | 1      | 1     | 0     | 1      | 0      | 1     | 1     | 1     | 1      | 1     | 1     | 1      | <table><tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table> |       | 1     | 2      | 3     | 4     | 1     | 1      | 1     | 0     | 1     | 1      | 1      | 0     | 1     | 1     | 1      | 0     | 1     | 1   | 1       | 0       | 1                  | 1                                  | 1       | 1      |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
|                 | 1   | 2   | 3                                  | 4            |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| 0               | 1   | 0   | 1                                  | 1            |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| 1               | 1   | 1   | 1                                  | 1            |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| 0               | 1   | 0   | 1                                  | 1            |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| 1               | 1   | 1   | 1                                  | 1            |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
|                 | 1   | 2   | 3                                  | 4            |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| 1               | 1   | 1   | 0                                  | 1            |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| 1               | 1   | 0   | 1                                  | 1            |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| 1               | 0   | 1   | 1                                  | 1            |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| 0               | 1   | 1   | 1                                  | 1            |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
|                 | а) 1,2 ;б) 3 ;в) 3 ,4 ; г) 4.   |   |                                    |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| 16              | <p>В таблицах приведена стоимость перевозки грузов между соседними станциями. Если пересечение строки и столбца пусто, то соответствующие станции не являются соседними. Укажите номер таблицы, для которой выполняется условие «Максимальная стоимость перевозки грузов от пункта В до пункта D не больше 6»</p> <table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr><tr><td>A</td><td></td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr><tr><td>B</td><td>2</td><td></td><td>4</td><td>3</td></tr><tr><td>C</td><td></td><td>4</td><td></td><td>4</td></tr><tr><td>D</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td></td></tr></table> <p>1</p> <table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr><tr><td>A</td><td></td><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>B</td><td>2</td><td></td><td>4</td><td></td></tr><tr><td>C</td><td>1</td><td>4</td><td></td><td>1</td></tr><tr><td>D</td><td>1</td><td></td><td>1</td><td></td></tr></table> <p>2</p> <table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr><tr><td>A</td><td></td><td>1</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>B</td><td>1</td><td></td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>C</td><td>3</td><td>2</td><td></td><td></td></tr><tr><td>D</td><td>6</td><td>4</td><td></td><td></td></tr></table> <p>3</p> <table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr><tr><td>A</td><td></td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>B</td><td>3</td><td></td><td>2</td><td></td></tr><tr><td>C</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td>4</td></tr><tr><td>D</td><td>1</td><td></td><td>4</td><td></td></tr></table> <p>4</p> |   | A                                  | B            | C             | D      | A     |       | 2     | 2      |        | B     | 2     |       | 4      | 3     | C     |        | 4      |       | 4     | D     | 2      | 3     | 4     |        |   | A     | B     | C      | D     | A     |       | 2      | 1     | 1     | B     | 2      |        | 4     |       | C     | 1      | 4     |       | 1   | D       | 1       |                    | 1                                  |         |        | A | B  | C       | D       | A |    | 1       | 3        | 6 | B  | 1      |         | 2  | 4 | C      | 3       | 2  |   |         | D      | 6  | 4 |         |          |    | A | B        | C       | D | A  |  | 3 | 2 | 1 | B | 3 |  | 2 |  | C | 2 | 2 |  | 4 | D | 1 |  | 4 |  | <p>В таблице приведена стоимость перевозки пассажиров между соседними населенными пунктами. Укажите схему, соответствующую таблице.</p> <table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td></tr><tr><td>A</td><td></td><td>2</td><td>4</td><td>1</td><td></td></tr><tr><td>B</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>C</td><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td>5</td></tr><tr><td>D</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>4</td></tr><tr><td>E</td><td></td><td></td><td>5</td><td>4</td><td></td></tr></table>  |  | A | B | C | D | E | A |  | 2 | 4 | 1 |  | B | 2 |  |  |  |  | C | 4 |  |  |  | 5 | D | 1 |  |  |  | 4 | E |  |  | 5 | 4 |  |
|                 | A   | B   | C                                  | D            |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| A               |   | 2   | 2                                  |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| B               | 2   |   | 4                                  | 3            |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| C               |   | 4   |                                    | 4            |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| D               | 2   | 3   | 4                                  |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
|                 | A   | B   | C                                  | D            |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| A               |   | 2   | 1                                  | 1            |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| B               | 2   |   | 4                                  |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| C               | 1   | 4   |                                    | 1            |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| D               | 1   |   | 1                                  |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
|                 | A   | B   | C                                  | D            |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| A               |   | 1   | 3                                  | 6            |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| B               | 1   |   | 2                                  | 4            |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| C               | 3   | 2   |                                    |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| D               | 6   | 4   |                                    |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
|                 | A   | B   | C                                  | D            |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| A               |   | 3   | 2                                  | 1            |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| B               | 3   |   | 2                                  |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| C               | 2   | 2   |                                    | 4            |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| D               | 1   |   | 4                                  |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
|                 | A   | B   | C                                  | D            | E             |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| A               |   | 2   | 4                                  | 1            |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| B               | 2   |   |                                    |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| C               | 4   |   |                                    |              | 5             |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| D               | 1   |   |                                    |              | 4             |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| E               |   |   | 5                                  | 4            |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
|                 | а) 3;б) 1,3;в) 1,2,4; г) 2.   | а) 1;б) 1,3;в) 1,2,4; г) 4.   |                                    |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| 17              | <p>Путешественник оказался в аэропорту ОСТРОВ в полночь (0:00). Определите самое раннее время, когда он может попасть в аэропорт СИНЕЕ.</p> <table><tr><th>Аэропорт вылета</th><th>Аэропорт прилета</th><th>Время вылета</th><th>Время прилета</th></tr><tr><td>НОВАБЬ</td><td>СИНЕЕ</td><td>07:30</td><td>09:50</td></tr><tr><td>ОСТРОВ</td><td>НОВАБЬ</td><td>08:15</td><td>10:35</td></tr><tr><td>СИНЕЕ</td><td>ЕЛКИНО</td><td>11:35</td><td>13:25</td></tr><tr><td>НОВАБЬ</td><td>ЕЛКИНО</td><td>11:40</td><td>13:10</td></tr><tr><td>СИНЕЕ</td><td>НОВАБЬ</td><td>12:20</td><td>14:30</td></tr><tr><td>НОВАБЬ</td><td>ОСТРОВ</td><td>12:30</td><td>14:30</td></tr><tr><td>ОСТРОВ</td><td>СИНЕЕ</td><td>13:10</td><td>16:20</td></tr><tr><td>ЕЛКИНО</td><td>СИНЕЕ</td><td>14:20</td><td>16:10</td></tr><tr><td>ЕЛКИНО</td><td>НОВАБЬ</td><td>17:40</td><td>19:10</td></tr><tr><td>СИНЕЕ</td><td>ОСТРОВ</td><td>18:10</td><td>21:20</td></tr></table>  | Аэропорт вылета   | Аэропорт прилета                   | Время вылета | Время прилета | НОВАБЬ | СИНЕЕ | 07:30 | 09:50 | ОСТРОВ | НОВАБЬ | 08:15 | 10:35 | СИНЕЕ | ЕЛКИНО | 11:35 | 13:25 | НОВАБЬ | ЕЛКИНО | 11:40 | 13:10 | СИНЕЕ | НОВАБЬ | 12:20 | 14:30 | НОВАБЬ | ОСТРОВ  | 12:30 | 14:30 | ОСТРОВ | СИНЕЕ | 13:10 | 16:20 | ЕЛКИНО | СИНЕЕ | 14:20 | 16:10 | ЕЛКИНО | НОВАБЬ | 17:40 | 19:10 | СИНЕЕ | ОСТРОВ | 18:10 | 21:20 | <p>В одной сказочной стране всего 5 городов, которые соединены между собой непересекающимися магистралями. Расход топлива для каждого отрезка и цены на топливо приведены в таблице:</p> <table><tr><th>Город А</th><th>Город Б</th><th>Расход топлива (л)</th><th>Цена 1 л топлива в городе А (у.е.)</th></tr><tr><td>АИСТОВО</td><td>БЫКОВО</td><td>6</td><td>10</td></tr><tr><td>АИСТОВО</td><td>ЦАПЛИНО</td><td>7</td><td>10</td></tr><tr><td>АИСТОВО</td><td>ДРОНТОВО</td><td>8</td><td>10</td></tr><tr><td>БЫКОВО</td><td>ЦАПЛИНО</td><td>10</td><td>2</td></tr><tr><td>БЫКОВО</td><td>ЕНОТОВО</td><td>16</td><td>2</td></tr><tr><td>ЦАПЛИНО</td><td>БЫКОВО</td><td>15</td><td>2</td></tr><tr><td>ЦАПЛИНО</td><td>ДРОНТОВО</td><td>10</td><td>2</td></tr><tr><td>ДРОНТОВО</td><td>ЕНОТОВО</td><td>1</td><td>10</td></tr></table> <p>Проезд по магистралям возможен в обоих направлениях, однако в стране действует закон: выезжая из города А, путешественник обязан на весь ближайший отрезок до города Б закупить</p> | Город А | Город Б | Расход топлива (л) | Цена 1 л топлива в городе А (у.е.) | АИСТОВО | БЫКОВО | 6 | 10 | АИСТОВО | ЦАПЛИНО | 7 | 10 | АИСТОВО | ДРОНТОВО | 8 | 10 | БЫКОВО | ЦАПЛИНО | 10 | 2 | БЫКОВО | ЕНОТОВО | 16 | 2 | ЦАПЛИНО | БЫКОВО | 15 | 2 | ЦАПЛИНО | ДРОНТОВО | 10 | 2 | ДРОНТОВО | ЕНОТОВО | 1 | 10 |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| Аэропорт вылета | Аэропорт прилета  | Время вылета  | Время прилета                      |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| НОВАБЬ          | СИНЕЕ   | 07:30   | 09:50                              |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| ОСТРОВ          | НОВАБЬ  | 08:15   | 10:35                              |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| СИНЕЕ           | ЕЛКИНО  | 11:35   | 13:25                              |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| НОВАБЬ          | ЕЛКИНО  | 11:40   | 13:10                              |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| СИНЕЕ           | НОВАБЬ  | 12:20   | 14:30                              |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| НОВАБЬ          | ОСТРОВ  | 12:30   | 14:30                              |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| ОСТРОВ          | СИНЕЕ   | 13:10   | 16:20                              |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| ЕЛКИНО          | СИНЕЕ   | 14:20   | 16:10                              |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| ЕЛКИНО          | НОВАБЬ  | 17:40   | 19:10                              |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| СИНЕЕ           | ОСТРОВ  | 18:10   | 21:20                              |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| Город А         | Город Б   | Расход топлива (л)  | Цена 1 л топлива в городе А (у.е.) |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| АИСТОВО         | БЫКОВО  | 6   | 10                                 |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| АИСТОВО         | ЦАПЛИНО   | 7   | 10                                 |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| АИСТОВО         | ДРОНТОВО  | 8   | 10                                 |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| БЫКОВО          | ЦАПЛИНО   | 10  | 2                                  |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| БЫКОВО          | ЕНОТОВО   | 16  | 2                                  |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| ЦАПЛИНО         | БЫКОВО  | 15  | 2                                  |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| ЦАПЛИНО         | ДРОНТОВО  | 10  | 2                                  |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |
| ДРОНТОВО        | ЕНОТОВО   | 1   | 10                                 |              |               |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |        |   |       |       |        |       |       |       |        |       |       |       |        |        |       |       |       |        |       |       |   |         |         |                    |                                    |         |        |   |    |         |         |   |    |         |          |   |    |        |         |    |   |        |         |    |   |         |        |    |   |         |          |    |   |          |         |   |    |  |   |   |   |   |   |  |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |   |  |  |  |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |  |   |   |  |  |  |  |   |   |  |  |  |   |   |   |  |  |  |   |   |  |  |   |   |  |

|  |                                       |  |
|--|---------------------------------------|--|
|  |                                       | топливо по ценам, установленным в городе А. Определите самый дешевый маршрут из АИСТОВО в ЕНОТОВО.   |
|  | а) 11:35;б) 16:10 ;в) 16:20; г) 9:50. | а) АИСТОВО - ЦАПЛИНО - БЫКОВО – ЕНОТОВО; б) АИСТОВО - ДРОНТОВО – ЕНОТОВО;<br>в) АИСТОВО - ЦАПЛИНО - ДРОНТОВО – ЕНОТОВО; г) АИСТОВО - БЫКОВО – ЕНОТОВО. |

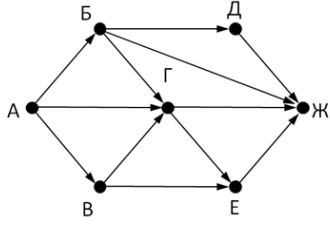
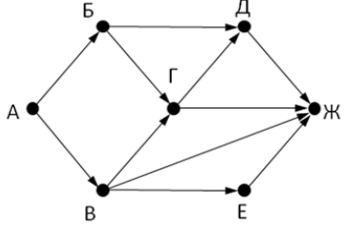
## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 55

**Тема:** «Графы»

**Цель:** задание графа, вычисление степеней вершин.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Содержание работы

|         | 1 вариант   | 2 вариант  |
|---------|---|--|
| Часть Б |   |  |
| 18      | Среди семи стран установлены экономические отношения, причем каждая страна имеет экономические договоры с каждой другой страной. Изобразите в виде графа результат установленных экономических отношений. Сколько вершин и ребер имеет полученный граф?   | Среди шести стран установлены экономические отношения, причем каждая страна имеет экономические договоры с каждой другой страной. Изобразите в виде графа результат установленных экономических отношений. Сколько вершин и ребер имеет полученный граф? |
| 19      | <p>На рисунке - схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город Ж?</p>  |    |
| 20      | Между населёнными пунктами А, В, С, D, Е, F построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. (Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет).   |  |

|    |   |  |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
|----|---|--|----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|---|--|--|---|--|---|---|--|--|
|    | Определите длину кратчайшего маршрута из А в F.   | Определите длину кратчайшего маршрута из А в В.  |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
|    | <table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td><td>F</td></tr><tr><td>A</td><td></td><td>2</td><td>4</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>B</td><td>2</td><td></td><td>1</td><td></td><td>7</td><td></td></tr><tr><td>C</td><td>4</td><td>1</td><td></td><td>3</td><td>4</td><td></td></tr><tr><td>D</td><td></td><td></td><td>3</td><td></td><td>3</td><td></td></tr><tr><td>E</td><td></td><td>7</td><td>4</td><td>3</td><td></td><td>2</td></tr><tr><td>F</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>2</td><td></td></tr></table> |  | A  | B  | C  | D  | E | F | A |   | 2 | 4 |   |   |   | B | 2 |   | 1 |   | 7 |  | C | 4 | 1 |   | 3 | 4 |   | D |   |   | 3 |  | 3 |   | E |   | 7 | 4 | 3 |   | 2 | F |   |  |   |   | 2 |   | <table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td></tr><tr><td>A</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td></td></tr><tr><td>B</td><td></td><td></td><td>4</td><td></td><td>1</td></tr><tr><td>C</td><td></td><td>4</td><td></td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>D</td><td>1</td><td></td><td>4</td><td></td><td></td></tr><tr><td>E</td><td></td><td>1</td><td>2</td><td></td><td></td></tr></table> |   | A | B | C | D | E | A |  |  |   | 1 |   | B |   |   | 4 |   | 1 | C |   | 4 |   | 4 | 2 | D | 1 |  | 4 |  |  | E |  | 1 | 2 |  |  |
|    | A   | B  | C  | D  | E  | F  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| A  |   | 2  | 4  |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| B  | 2   |  | 1  |    | 7  |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| C  | 4   | 1  |    | 3  | 4  |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| D  |   |  | 3  |    | 3  |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| E  |   | 7  | 4  | 3  |    | 2  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| F  |   |  |    |    | 2  |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
|    | A   | B  | C  | D  | E  |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| A  |   |  |    | 1  |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| B  |   |  | 4  |    | 1  |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| C  |   | 4  |    | 4  | 2  |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| D  | 1   |  | 4  |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| E  |   | 1  | 2  |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| 21 | На рисунке приведена весовая матрица графа. Определите, сколько рёбер имеет такой граф.   |  |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
|    | <table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td></tr><tr><td>A</td><td></td><td>5</td><td>2</td><td></td><td>6</td></tr><tr><td>B</td><td>5</td><td></td><td></td><td>5</td><td></td></tr><tr><td>C</td><td>2</td><td></td><td></td><td>2</td><td></td></tr><tr><td>D</td><td></td><td>5</td><td>2</td><td></td><td>3</td></tr><tr><td>E</td><td>6</td><td></td><td></td><td>3</td><td></td></tr></table>   |  | A  | B  | C  | D  | E | A |   | 5 | 2 |   | 6 | B | 5 |   |   | 5 |   | C | 2 |  |   | 2 |   | D |   | 5 | 2 |   | 3 | E | 6 |  |   | 3 |   | <table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td></tr><tr><td>A</td><td></td><td></td><td>2</td><td></td><td>6</td></tr><tr><td>B</td><td></td><td></td><td></td><td>5</td><td>7</td></tr><tr><td>C</td><td>2</td><td></td><td></td><td>2</td><td>8</td></tr><tr><td>D</td><td></td><td>5</td><td>2</td><td></td><td>3</td></tr><tr><td>E</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>3</td><td></td></tr></table> |   | A | B | C | D | E | A |  |   | 2 |   | 6 | B   |   |   |   | 5 | 7 | C | 2 |  |  | 2 | 8 | D |   | 5 | 2 |   | 3 | E | 6 | 7 | 8 | 3 |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
|    | A   | B  | C  | D  | E  |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| A  |   | 5  | 2  |    | 6  |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| B  | 5   |  |    | 5  |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| C  | 2   |  |    | 2  |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| D  |   | 5  | 2  |    | 3  |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| E  | 6   |  |    | 3  |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
|    | A   | B  | C  | D  | E  |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| A  |   |  | 2  |    | 6  |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| B  |   |  |    | 5  | 7  |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| C  | 2   |  |    | 2  | 8  |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| D  |   | 5  | 2  |    | 3  |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| E  | 6   | 7  | 8  | 3  |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| 22 | На рисунке приведена весовая матрица графа, в которой веса обозначают расстояния между соседними пунктами.  |  |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
|    | Определите длину маршрута C-A-E-D-B.  | Определите длину маршрута E-D-C-A.   |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
|    | <table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td></tr><tr><td>A</td><td></td><td></td><td>2</td><td></td><td>6</td></tr><tr><td>B</td><td></td><td></td><td></td><td>5</td><td></td></tr><tr><td>C</td><td>2</td><td></td><td></td><td>2</td><td></td></tr><tr><td>D</td><td></td><td>5</td><td>2</td><td></td><td>3</td></tr><tr><td>E</td><td>6</td><td></td><td></td><td>3</td><td></td></tr></table>   |  | A  | B  | C  | D  | E | A |   |   | 2 |   | 6 | B |   |   |   | 5 |   | C | 2 |  |   | 2 |   | D |   | 5 | 2 |   | 3 | E | 6 |  |   | 3 |   | <table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td></tr><tr><td>A</td><td></td><td>5</td><td>2</td><td></td><td>6</td></tr><tr><td>B</td><td>5</td><td></td><td></td><td>5</td><td></td></tr><tr><td>C</td><td>2</td><td></td><td></td><td>2</td><td></td></tr><tr><td>D</td><td></td><td>5</td><td>2</td><td></td><td>3</td></tr><tr><td>E</td><td>6</td><td></td><td></td><td>3</td><td></td></tr></table>   |   | A | B | C | D | E | A |  | 5 | 2 |   | 6 | B   | 5 |   |   | 5 |   | C | 2 |  |  | 2 |   | D |   | 5 | 2 |   | 3 | E | 6 |   |   | 3 |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
|    | A   | B  | C  | D  | E  |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| A  |   |  | 2  |    | 6  |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| B  |   |  |    | 5  |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| C  | 2   |  |    | 2  |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| D  |   | 5  | 2  |    | 3  |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| E  | 6   |  |    | 3  |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
|    | A   | B  | C  | D  | E  |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| A  |   | 5  | 2  |    | 6  |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| B  | 5   |  |    | 5  |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| C  | 2   |  |    | 2  |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| D  |   | 5  | 2  |    | 3  |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| E  | 6   |  |    | 3  |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| 23 | Найти кратчайший путь от вершины 1 к вершине 5 графа, представленного на рисунке:   | В графе G, показанном на рис. удалить дугу (x3,x2).  |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
|    |   |  |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
|    |   | Результат представлен в матричном виде:  |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
|    |   | <table><tr><td></td><td>а)</td><td>б)</td><td>в)</td></tr><tr><td></td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td></td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td></td><td>1</td><td>1</td></tr></table> |    | а) | б) | в) |   | 1 | 1 | 1 | 1 |   | 1 | 1 | 1 |   | 1 | 1 |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
|    | а)  | б)   | в) |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
|    | 1   | 1  | 1  |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| 1  |   | 1  | 1  |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| 1  |   | 1  | 1  |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| 24 | Изобразите графически: орграф G(V,E) V={1,2,3,4,5}, E={(1,2),(4,3),(3,5),(5,1),(4,1)}.  | Изобразите графически: орграф G(V,E) V={1,2,3,4,5}, E={(1,3),(2,3),(1,5),(2,4),(1,2)}.   |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| 25 | Изобразите графически: неограф G(V,E) V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 2); (1; 5); (2; 3); (3; 1); (3; 4); (4; 2); (4; 5); (4; 6); (5; 3)}.  | Изобразите графически: неограф V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 2); (1; 3); (2; 3); (3; 1); (3; 6); (4; 2); (4; 5); (4; 6); (5; 1)}.  |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| 26 | Задать неограф, представленный множеством вершин и ребер, графически и матрицами, преобразовать граф в плоский, вычислить степени его вершин.   |  |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
|    | V = {1; 2; 3; 4; 5; 6};<br>E = {a; b; c; d; e}<br>E = {(1; 3); (1; 4); (1; 6); (2; 3);(4; 5)}   | V = {1; 2; 3; 4; 5; 6};<br>E = {a; b; c; d; e}<br>E = {(1; 5); (2; 4); (2; 5); (3; 4);(5; 6)}  |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |
| 27 | Задать граф, представленный матрицей инцидентности, алгебраически, графически и матрицей смежности, преобразовать граф в плоский, вычислить степени его вершин.   |  |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |   |  |  |   |  |   |   |  |  |

|   |    |    |    |    |    |    |   |   |    |    |    |    |    |    |   |  |  |
|---|----|----|----|----|----|----|---|---|----|----|----|----|----|----|---|--|--|
|   |    | a  | b  | c  | d  | e  | f |   |    | a  | b  | c  | d  | e  | f |  |  |
| 1 | 1  | 0  | 0  | -1 | 0  | 0  |   | 1 | 1  | -1 | 0  | 0  | 0  | -1 |   |  |  |
| 2 | -1 | 1  | 1  | 0  | 0  | 0  |   | 2 | 0  | 1  | -1 | 0  | 0  | 0  |   |  |  |
| 3 | 0  | -1 | 0  | 0  | 0  | 1  |   | 3 | -1 | 0  | 1  | 1  | 0  | 0  |   |  |  |
| 4 | 0  | 0  | -1 | 0  | 0  | -1 |   | 4 | 0  | 0  | 0  | -1 | -1 | 0  |   |  |  |
| 5 | 0  | 0  | 0  | 1  | -1 | 0  |   | 5 | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | 0  |   |  |  |
| 6 | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | 0  |   | 6 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  |   |  |  |

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 56

**Тема:** «Решение задач. Множества, Графы и их применение»

**Цель:** ознакомление с множествами, функциями, операциями, способами их заданий. Построение кругов Эйлера.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Содержание работы

**Задание 1.** Найти все подмножества множества  $A = \{ 1; 2; 3 \}$ .

**Задание 2.** Найдите:  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$ ,  $\overline{A}$ .

**Задание 3.** Дано множество:  $M = \{ a; u; o; p; c; ы \}$ .

- 1) написать определяющие слова;
- 2) задать с помощью матрицы инцидентности;
- 3) построить модельный граф;
- 4) построить гиперграф;
- 5) построить двудольный граф.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 57

**Тема:** «Основные понятия комбинаторики»

**Цель:** изучить основные понятия комбинаторики, применить их при решении задач.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Справочный материал

#### 1. Комбинаторика и ее возникновение.

**Комбинаторика**- это область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из элементов, принадлежащих данному множеству.

Комбинаторика возникла в XVI веке. В жизни привилегированных слоев тогдашнего общества большое место занимали азартные игры (карты, кости). Широко были распространены лотереи. Первоначально комбинаторные задачи касались в основном азартных игр: сколькими способами можно получить данное число очков, бросая 2 или 3 кости или сколькими способами можно получить 2-ух королей в некоторой карточной игре. Эти и другие проблемы

азартных игр являлись движущей силой в развитии комбинаторики и далее в развитии теории вероятностей.

Одним из первых занялся подсчетом числа различных комбинаций при игре в кости итальянский математик Тарталья. Он составил таблицы (числа способов выпадения  $k$  очков на  $r$  костях). Однако, он не учел, одна и та же сумма очков может выпасть различными способами, поэтому его таблицы содержали большое количество ошибок.

Теоретическое исследование вопросов комбинаторики предприняли в XVII веке французские математики Блез Паскаль и Ферма. Исходным пунктом их исследований были так же проблемы азартных игр.

Дальнейшее развитие комбинаторики связано с именами Я. Бернулли, Г. Лейбница, Л. Эйлера. Однако, и в их работах основную роль играли приложения к различным играм.

Сегодня комбинаторные методы используются для решения транспортных задач, в частности задач по составлению расписаний, для составления планов производства и реализации продукции и т.д.

## **2. Общие правила комбинаторики.**

**Правило суммы:** Если некоторый объект  $A$  может быть выбран  $m$  способами, а объект  $B$  —  $k$  способами, то объект «либо  $A$ , либо  $B$ » можно выбрать  $m+k$  способами.

**Примеры:**

1. Допустим, что в ящике находится  $n$  разноцветных шаров. Произвольным образом вынимается 1 шарик. Сколькими способами это можно сделать?

**Ответ:**  $n$  способами.

Распределим эти  $n$  шариков по двум ящикам: в первый —  $m$  шариков, во второй —  $k$  шариков. Произвольным образом из произвольно выбранного ящика вынимается 1 шарик. Сколькими способами это можно сделать?

**Решение:** Из первого ящика шарик можно вынуть  $m$  способами, из второго —  $k$  способами. Тогда всего способов  $m+k=n$ .

### **2. Морской семафор.**

В морском семафоре каждой букве алфавита соответствует определенное положение относительно тела сигнальщика двух флажков. Сколько таких сигналов может быть?

**Решение:** Общее число складывается из положений, когда оба флажка расположены по разные стороны от тела сигнальщика и положений, когда они расположены по одну сторону от тела сигнальщика. При подсчете числа возможных положений применяется правило суммы.

**Правило произведения:** Если объект  $A$  можно выбрать  $m$  способами, а после каждого такого выбора другой объект  $B$  можно выбрать (независимо от выбора объекта  $A$ )  $k$  способами, то пары объектов « $A$  и  $B$ » можно выбрать  $m \cdot k$  способами.

**Примеры:**

1. Сколько двузначных чисел существует?

**Решение:** Число десятков может быть обозначено любой цифрой от 1 до 9. Число единиц может быть обозначено любой цифрой от 0 до 9. Если число десятков равно 1, то число единиц может быть любым (от 0 до 9). Таким образом, существует 10 двузначных чисел, с числом десятков- 1. Аналогично рассуждаем и для любого другого числа десятков. Тогда можно посчитать, что существует  $9 \cdot 10 = 90$  двузначных чисел.

2. Имеется 2 ящика. В одном лежит  $m$  разноцветных кубиков, а в другом-  $k$  разноцветных шариков. Сколькими способами можно выбрать пару «Кубик-шарик»?

**Решение:** Выбор шарика не зависит от выбора кубика, и наоборот. Поэтому, число способов, которыми можно выбрать данную пару равно  $m \cdot k$ .

### 3. Генеральная совокупность без повторений и выборки без повторений.

**Генеральная совокупность без повторений** – это набор некоторого конечного числа различных элементов  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ .

**Пример:** Набор из  $n$  разноцветных лоскутков.

**Выборкой объема  $k$  ( $k \leq n$ )** называется группа из  $k$  элементов данной генеральной совокупности.

**Пример:** Пестрая лента, сшитая из  $n$  разноцветных лоскутков, выбранных из данных  $n$ .

**Размещениями из  $n$  элементов по  $k$**  называются такие выборки, которые содержат  $k$  элементов, выбранных из числа данных  $n$  элементов генеральной совокупности без повторений, и отличаются друг от друга либо составом элементов, либо порядком их расположения.

- число размещений из  $n$  по  $k$ .

Число размещений из  $n$  по  $k$  можно определить следующим способом: первый объект выборки можно выбрать  $n$  способами, далее второй объект можно выбрать  $n-1$  способом и т.д.

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))$$

Преобразовав данную формулу, имеем:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \text{ где } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \text{ (называется } n \text{ – факториал)}.$$

Следует помнить, что  $0! = 1$ .

**Примеры:**

1. В первой группе класса А первенства по футболу участвует 17 команд. Разыгрываются медали: золото, серебро и бронза. Сколькими способами они могут быть разыграны?

**Решение:** Комбинации команд-победителей отличаются друг от друга составом и порядком следования элементов, т.е. являются размещениями из 17 по 3.

$$A_{17}^3 = \frac{17!}{(17-3)!} = \frac{17!}{14!} = 15 \cdot 16 \cdot 17 = 4080$$

**Перестановками без повторений из  $n$  элементов** называются размещения без повторений из  $n$  элементов по  $n$ , т.е. размещения отличаются друг от друга только порядком следования элементов.

- число перестановок.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

### Примеры:

1. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что они должны состоять из различных цифр?

**Решение:** Имеем перестановки из 5 элементов.

$$P_n = 5! = 120$$

**Сочетаниями без повторений из n элементов по k** называются такие выборки, которые содержат по k элементов, выбранных из числа данных n элементов генеральной совокупности без повторений, и отличаются друг от друга только составом элементов.

### Примеры:

1. Если в полуфинале первенства по шахматам участвует 20 человек, а в финал выходят лишь трое, то сколькими способам и можно определить эту тройку?

**Решение:** В данном случае порядок, в котором располагается эта тройка, не существен. Поэтому тройки, вышедшие в финал, являются сочетаниями из 20 по 3.

$$C_{20}^3 = \frac{20!}{(20-3)! \cdot 3!} = \frac{20!}{17! \cdot 3!} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{2 \cdot 3} = 1140$$

### Содержание работы

1. Сколькими способами можно выбрать председателя, заместителя и профорга из 9 человек?

2. Сколькими способами можно рассадить 7 человек по 9 вагонам?



## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 58

**Тема:** «Событие, вероятность события. Сложение и умножение вероятностей»

**Цель:** изучить основные понятия теории вероятности, применить их при решении задач.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Справочный материал

Согласно классическому определению вероятности **вероятностью события  $A$**  называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу. Вероятность события  $A$  определяется формулой:

$$P(A) = m/n,$$

где  $m$  – число элементарных исходов, благоприятствующих  $A$ ;

$n$  – число всех возможных элементарных исходов испытания.

Формула полной вероятности позволяет определить вероятность события  $A$ , которое может наступить при условии появления одного из несовместных событий  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , образующих полную группу.

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$$

Чтобы оценить вероятности гипотез  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , после того как стал известен результат испытания, используется формула Байеса.

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)}$$

### Содержание работы

1. В ящике имеется 10 красных и 8 синих шаров. Наудачу вынимают один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется синим.

2. Бросаются два игральных кубика. Какова вероятность, что сумма выпавших очков равна 5.

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 59**

**Тема:** «Дискретная случайная величина, закон ее распределения»

**Цель:** изучить основные понятия теории вероятности, применить их при решении задач.

**Оборудование:** справочные пособия.

#### **Содержание работы**

**Задача 1.** В группе 30 студентов. Необходимо выбрать старосту, заместителя старосты и профорга. Сколько существует способов это сделать?

**Задача 2.** Два почтальона должны разнести 10 писем по 10 адресам. Сколькими способами они могут распределить работу?

**Задача 3.** В ящике 100 деталей, из них 30 – деталей 1-го сорта, 50 – 2-го, остальные – 3-го. Сколько существует способов извлечения из ящика одной детали 1-го или 2-го сорта?

**Задача 4.** В ящике 10 красных и 5 синих пуговиц. Вынимаются наудачу две пуговицы. Какова вероятность, что пуговицы будут одноцветными?

**Задача 5.** Среди сотрудников фирмы 28% знают английский язык, 30% – немецкий, 42% – французский; английский и немецкий – 8%, английский и французский – 10%, немецкий и французский – 5%, все три языка – 3%. Найти вероятность того, что случайно выбранный сотрудник фирмы: а) знает английский или немецкий; б) знает английский, немецкий или французский; в) не знает ни один из перечисленных языков.

**Задача 6.** В одном ящике 3 белых и 5 черных шаров, в другом ящике – 6 белых и 4 черных шара. Найти вероятность того, что хотя бы из одного ящика будет вынут белый шар, если из каждого ящика вынуто по одному шару.

### **ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 60**

**Тема:** «Задачи математической статистики»

**Цель:** изучить основные понятия математической статистики, применить их при решении задач.

**Оборудование:** справочные пособия.

#### **Справочный материал**

**Дискретной (прерывной)** называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Для задания дискретной случайной величины необходимо перечислить все возможные ее значения и указать их вероятности.

**Законом распределения дискретной случайной величины** называется соответствие между возможными значениями и их вероятностями. Его можно задать таблично, аналитически в виде функции распределения и графически с помощью многоугольника распределения.

**Функция распределения случайной величины  $X$**  – это функция  $F(x)$ , которая при каждом значении своего аргумента  $x$  численно равна вероятности того, что случайная величина  $X$  кажется меньше, чем значение аргумента  $x$ :  
 $F(x) = P\{X < x\}$

1. Математическое ожидание случайной величины  $X$  определяется по формуле:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

### Содержание работы

1. Возможные значения случайной величины таковы:  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 5$ ,  $x_3 = 8$ . Известны вероятности первых двух возможных значений:  $p_1 = 0,4$ ;  $p_2 = 0,15$ . Найти вероятность  $x_3$ .

2. Дискретная случайная величина  $X$  задана законом распределения. Построить многоугольник распределения.

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| $X$ | 1   | 3   | 6   | 8   |
| $p$ | 0,2 | 0,1 | 0,4 | 0,3 |

3. Найти математическое ожидание случайной величины  $X$ , зная ее закон распределения.

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| $X$ | 3   | 5   | 2   |
| $p$ | 0,1 | 0,6 | 0,3 |

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 61

**Тема:** «Решение задач. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей»

**Цель:** проверить и оценить знания учащихся по изученному материалу.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Содержание работы

1. В соревнованиях по фигурному катанию принимали участие россияне, итальянцы, украинцы, немцы, китайцы и французы. Сколькими способами могут распределиться места по окончании соревнований?

2. Сколько перестановок можно получить из букв слова КОЛОКОЛА?

3. Из учащихся 25 человек нужно выбрать троих дежурных. Сколькими способами это можно сделать?

4. Сколькими способами можно купить 6 пирожных, если имеются 2 сорта пирожных по 5 в каждом?

5. Научное общество состоит из 25-ти человек. Необходимо выбрать президента общества, вице-президента, ученого секретаря и казначея. Сколькими способами это можно сделать?

6. Сколькими способами можно собрать 6 разноцветных лоскутков в пеструю ленту?
7. Сколькими способами можно выбрать трех делегатов из десяти человек на конференцию?
8. В первом ящике содержится 20 деталей, из них 15 стандартных; во втором 30 деталей, из них 24 стандартных; в третьем – 10 деталей, из них 6 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящика – стандартная.
9. На заводе, изготовляющем болты, первая машина производит 25%, вторая - 35%, третья - 40% всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5, 4 и 2%. Случайно выбранный из продукции болт оказался дефектным. Какова вероятность того, что он был произведен первой машиной?

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 62

**Тема:** «Равносильность уравнений и неравенств. Общие методы решения»

**Цель:** научиться решать иррациональные, показательные и логарифмические уравнения.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Справочный материал

Пример. Решить уравнение  $\sqrt{x^2 - 5} = 2$ .

Возведем обе части уравнения в квадрат и получим  $x^2 - 5 = 4$ , откуда следует, что  $x^2 = 9$ , т.е.  $x = 3$  или  $x = -3$ .

Проверим, что полученные числа являются решениями уравнения. Действительно, при подстановке их в данное уравнение получаются верные равенства

$$\sqrt{3^2 - 5} = 2 \text{ и } \sqrt{(-3)^2 - 5} = 2.$$

Следовательно,  $x = 3$  и  $x = -3$  – решения данного уравнения.

Под иррациональным неравенством понимается неравенство, в котором неизвестные величины находятся под знаком радикала.

Пример. Решить неравенство  $\sqrt{3x - 5} > x - 1$ .

Данное неравенство эквивалентно совокупности двух систем:

$$\sqrt{3x - 5} > x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 3x - 5 > (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 3x - 5 > x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 3 > \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 5x + 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \in (2; 3) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2; 3).$$

Ответ:  $(2; 3)$ .

### Содержание работы

Решите уравнение:

- 1)  $\sqrt{x^4 + 19} = 10$ ;
- 2)  $\sqrt[3]{x - 9} = -3$ ;
- 3)  $\sqrt{x + 1} = x - 5$ ;
- 4)  $x + \sqrt{2x + 3} = 6$ ;
- 5)  $x = \sqrt[3]{x^3 + x^2 - 6x + 8}$ ;
- 6)  $\sqrt{5 + \sqrt[3]{x + 10}} = 4$ .

### ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 63

**Тема:** «Графический метод решения уравнений, неравенств»

**Цель:** научиться решать иррациональные, показательные и логарифмические уравнения.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Содержание работы

**Задание 1.** Решите уравнения:

- 1)  $3^x + 3^{3-x} = 12$ ;
- 2)  $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$ ;
- 3)  $4^x - 0,25^{x-2} = 15$ .

**Задание 2.** Решите уравнения:

- 1)  $\log_5 (x^2 + 8) - \log_5 (x + 1) = 3\log_5 2$ ;
- 2)  $\lg (x^2 + 2x - 7) - \lg (x - 1) = 0$ ;
- 3)  $\log_4^2 x + \log_4 \sqrt{x} - 1,5 = 0$ ;
- 4)  $\lg^2 x - \lg x^2 + 1 = 0$ .

### ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 64

**Тема:** «Уравнения и неравенства с модулем»

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** научиться решать неравенства методом интервалов.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** справочные пособия.

### Справочный материал

I. Для решения уравнений, которые содержат переменную под знаком модуля, чаще всего используют такие способы:

- а) раскрытие модуля по определению;
- б) возведение обеих частей уравнения в квадрат;

в) метод интервалов.

По определению модуля имеем:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$$

### 1. Уравнение вида $|f(x)| = a$ , где $a \geq 0$

По определению абсолютной величины данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\begin{cases} f(x) = a \\ f(x) = -a \end{cases}$$

Если  $a < 0$ , то уравнение  $|f(x)| = a$  не имеет решений.

#### Пример 1

Решите уравнения

а)  $|x - 8| = 5$

б)  $|2x + 5| = -1$

Решение

а) Т.к.  $5 > 0$ , то уравнение  $|x - 8| = 5$  равносильно совокупности уравнений:

$$\begin{cases} x - 8 = 5 \\ x - 8 = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 13 \\ x = 3 \end{cases}$$

Ответ: 3; 13

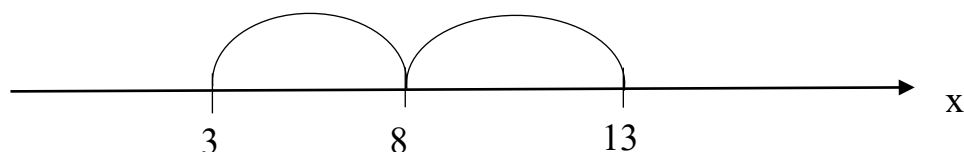
б) Т.к.  $-1 < 0$ , то уравнение  $|2x + 5| = -1$  не имеет решений.

Ответ:  $\emptyset$

Некоторые уравнения и неравенства с модулем решаются проще с помощью геометрических соображений.

$|a - b|$  - это расстояние между  $a$  и  $b$ .

Решим предыдущее уравнение  $|x - 8| = 5$

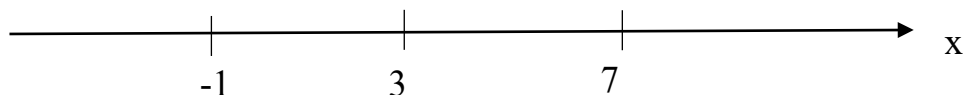


Ответ: 3; 13

#### Пример 2

Решим уравнение  $|2x - 3| = 4$  на основе геометрической интерпретации.

Решение



На расстоянии 4 от точки 3 лежат две точки -1 и 7, а  $2x$  есть одна из них.

Следовательно:

$$\begin{array}{ll} 2x = -1 & \text{или} \quad 2x = 7 \\ x = -0.5 & \quad \quad x = 3.5 \end{array}$$

Ответ: -0,5; 3,5

## 2. Уравнение вида $f(|x|) = a$

Уравнение вида  $f(|x|) = a$  равносильно совокупности двух систем:

$$\left[ \begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = a \\ x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(-x) = a \\ x < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

### Пример 3

Решите уравнение

$$x^2 - |x| - 6 = 0$$

Решение

Данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$1) \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 6 = 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases}$$

Решим первую систему уравнений:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x = 3; x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

Решим вторую систему уравнений:

$$\begin{cases} x < 0 \\ x = -3; x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3$$

Ответ: -3; 3

### 3. Уравнение вида $|f(x)| = g(x)$

Уравнение вида  $|f(x)| = g(x)$  равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) = -g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

#### Пример 4

Решите уравнение:

$$|x^2 + 3x - 10| = 3x - 1$$

Решение

Уравнение равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 10 = 3x - 1 \\ 3x - 1 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 9 = 0 \\ x \geq \frac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 + 2\sqrt{5} \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^2 + 3x - 10 = 1 - 3x \\ 3x - 1 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 6x - 11 = 0 \\ x \geq \frac{1}{3} \end{cases}$$

Ответ:  $3; -3 + 2\sqrt{5}$

#### Пример 5

Решите уравнение:

$$|2x - 3| = 3 - 2x$$

Решение

$$|2x - 3| = -(2x - 3)$$

Воспользуемся следующим фактом:  $|f(x)| = -f(x)$ , если  $f(x) \leq 0$

Тогда данное уравнение равносильно неравенству:

$$2x - 3 \leq 0; x \leq \frac{3}{2}$$

Ответ:  $(-\infty; 1.5]$

### 4. Уравнение вида $|f(x)| = |g(x)|$

Уравнение вида  $|f(x)| = |g(x)|$  равносильно совокупности двух уравнений:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$



### Пример 6

а)  $|x^2 - 5x + 7| = |2x - 5|$

б)  $|2x - 1| = |x - 1|$

Решение

а) Уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 7 = 2x - 5 \\ x^2 - 5x + 7 = 5 - 2x \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

Ответ: 1; 2; 3; 4

б) Возведем обе части уравнения в квадрат, учитывая, что

$$|f(x)|^2 = (f(x))^2$$

Имеем:

$$|2x - 1|^2 = |x - 1|^2$$

$$(2x - 1)^2 = (x - 1)^2$$

$$4x^2 - 4x + 1 = x^2 - 2x + 1$$

$$3x^2 - 2x = 0$$

$$x(3x - 2) = 0$$

$$x_1 = 0 \text{ или } x_2 = \frac{2}{3}$$

Ответ: 0;  $\frac{2}{3}$

II. Для решения неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, используют определение модуля:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$$

Также можно воспользоваться свойствами модуля, а именно:

❖  $|f(x)| \geq 0$

❖  $|f(x)|^2 = (f(x))^2$

❖  $|-f(x)| = |f(x)|$

$$\diamond |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)|$$

$$\diamond \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \frac{|f(x)|}{|g(x)|}$$

$$\diamond |f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow (f(x))^2 > (g(x))^2$$

**1. Решения неравенств вида  $|f(x)| \leq a$  и  $|f(x)| \leq |g(x)|$**

Неравенства  $|f(x)| \leq a$  ( $a \geq 0$ ; при  $a < 0$  – решений нет) и  $|f(x)| \leq |g(x)|$  – можно заменить равносильными им неравенствами.

$$f^2(x) - a^2 \leq 0 \text{ и } f^2(x) - g^2(x) \leq 0$$

Аналогичные рассуждения верны и для неравенств

$$|f(x)| \geq a \text{ где } a \geq 0 \text{ и } |f(x)| \geq |g(x)|.$$

Неравенство  $|f(x)| \geq a$ , где  $a > 0$  выполняется при любом  $x$ .

### Пример 1

Решите неравенство

$$|x^2 - 5x| \leq 6$$

Решение

Данное неравенство равносильно неравенству

$$(x^2 - 5x - 6)(x^2 - 5x + 6) \leq 0$$

Решаем методом интервалов.

Ответ:  $-1 \leq x \leq 2$ ;  $3 \leq x \leq 6$

**2. Решения неравенств вида  $|f(x)| \leq |g(x)|$  и  $|f(x)| \geq |g(x)|$ .**

#### I способ

#### II способ

Неравенство равносильно системе неравенств

$$|f(x)| \leq |g(x)| \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) \leq g(x) \end{cases} \text{ и } \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f^2(x) - g^2(x) \leq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Аналогичные рассуждения верны и для неравенства  $|f(x)| \geq |g(x)|$ .

Неравенство  $|f(x)| \geq g(x)$  выполняется для всех  $x$  из области определения функции  $f$ , при которых  $g(x) < 0$

Если же  $g(x) \geq 0$ ,

то  $f(x) \geq g(x) \Rightarrow f^2(x) - g^2(x) \geq 0$ .

Итак, при решении неравенств  $|f(x)| \geq |g(x)|$  необходимо рассматривать два условия.

### Пример 2

Решите неравенство

$$|x^2 - x| \leq x + 2$$

Решение

$$|x^2 - x| < x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - x)^2 - (x + 2)^2 \leq 0 & (1) \\ x + 2 \geq 0 & (2) \end{cases}$$

Решением исходного неравенства является промежуток

$$1 - \sqrt{3} \leq x \leq 1 + \sqrt{3}$$

Ответ:  $1 - \sqrt{3} \leq x \leq 1 + \sqrt{3}$

Если под знаком модуля стоит более сложная функция, чем квадратный трехчлен, тогда удобно пользоваться равносильными неравенствами:

$$(1) \quad |f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{cases} \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x)$$

$$(2) \quad |f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{cases}$$

$$(3) \quad |f(x)| > g(x) \Leftrightarrow f^2(x) > g^2(x) \Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) > 0$$

### Пример 3

Решите неравенство

$$|x^2 - 2x| \leq x - 1$$

Решение

$$|x^2 - 2x| \leq x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x \leq x - 1 \\ x^2 - 2x \geq -(x - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 1 \leq 0 & (1) \\ x^2 - x - 1 \geq 0 & (2) \end{cases}$$

(1) Решением первого является отрезок  $x \in \left[ \frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right]$

(2) Решением второго – объединение двух промежутков:

$$x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cup \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$$

Находим пересечение множеств.

$$\text{Ответ: } x \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$$

#### Пример 4

Решите неравенство

$$2|x^2 - 1| > x + 1$$

Решение

$$2|x^2 - 1| > x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2 > x + 1 \\ 2x - 2 < -(x + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - 3 > 0 & (1) \\ 2x^2 + x - 1 < 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$$

$$(2) \quad x \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$$

Объединяя полученные множества решений неравенств, находим решение совокупности.

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$$

#### Содержание работы

**Задание 1.** Решите уравнения:

а)  $|3x + 2| - 4 = 0$

б)  $|x + 4| + 1 = 0$

в)  $\left|\frac{3-x}{x-1}\right| = 1$

г)  $|4 - 5x| = 5x - 4$

д)  $x^2 + 3|x| = 10$

**Задание 2.** Решите неравенства:

1)  $|x^2 - 2x| < 3$

2)  $|x^2 + x - 3| \leq |2x^2 + x - 2|$

3)  $|5x - 6| < x + 1$

4)  $|x + 2| - |x - 3| \leq 1$

5)  $|x^2 - 6x + 8| \leq 2x + 1$

6)  $\frac{1-|x^2-3|}{|2x^2-x|-1} \leq 0$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 65

**Тема:** «Уравнения и неравенства с параметрами»

**Цель:** научиться решать неравенства методом интервалов.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Справочный материал

Если в уравнении или неравенстве некоторые коэффициенты заданы не конкретными числовыми значениями, а обозначены буквами, то они называются *параметрами*, а само уравнение или неравенство *параметрическим*.

Для того, чтобы решить уравнение или неравенство с параметрами необходимо:

1. Выделить особое значение - это то значение параметра, в котором или при переходе через которое меняется решение уравнения или неравенства.
2. Определить допустимые значения – это значения параметра, при которых уравнение или неравенство имеет смысл.

Решить уравнение или неравенство с параметрами означает:

- 1) определить, при каких значениях параметров существуют решения;
- 2) для каждой допустимой системы значений параметров найти соответствующее множество решений.

Решить уравнение с параметром можно следующими методами: аналитическим или графическим.

**Аналитический метод** предполагает задачу исследования уравнения рассмотрением нескольких случаев, ни один из которых нельзя упустить.

Решение уравнения и неравенства с параметрами каждого вида аналитическим методом предполагает подробный анализ ситуации и

последовательное исследование, в ходе которого возникает необходимость «аккуратного обращения» с параметром.

**Графический метод** предполагает построение графика уравнения, по которому можно определить, как влияет соответственно, на решение уравнения изменение параметра. График подчас позволяет аналитически сформулировать необходимые и достаточные условия для решения поставленной задач. Графический метод решения особенно эффективен тогда, когда нужно установить, сколько корней имеет уравнение в зависимости от параметра и обладает несомненным преимуществом увидеть это наглядно.

### **Линейные уравнения и неравенства.**

Линейное уравнение  $ax=b$ , записанное в общем виде, можно рассматривать как уравнение с параметрами, где  $x$  – неизвестное,  $a, b$  – параметры. Для этого уравнения особым или контрольным значением параметра является то, при котором обращается в нуль коэффициент при неизвестном.

При решении линейного уравнения с параметром рассматриваются случаи, когда параметр равен своему особому значению и отличен от него.

Особым значением параметра  $a$  является значение  $a = 0$ .

1. Если  $a \neq 0$ , то при любой паре параметров  $a$  и  $b$  оно имеет единственное решение  $x = \frac{b}{a}$ .
2. Если  $a = 0$ , то уравнение принимает вид:  $0x = b$ . В этом случае значение  $b = 0$  является особым значением параметра  $b$ .

При  $b \neq 0$  уравнение решений не имеет.

При  $b = 0$  уравнение примет вид:  $0x = 0$ . Решением данного уравнения является любое действительное число.

Неравенства вида  $ax > b$  и  $ax < b$  ( $a \neq 0$ ) называются линейными неравенствами. Множество решений неравенства  $ax > b$  – промежуток  $(\frac{b}{a}; +\infty)$ , если  $a > 0$ , и  $(-\infty; \frac{b}{a})$ , если  $a < 0$ . Аналогично для неравенства

$ax < b$  множество решений – промежуток  $(-\infty; \frac{b}{a})$ , если  $a > 0$ , и  $(\frac{b}{a}; +\infty)$ , если  $a < 0$ .

**Пример 1.** Решить уравнение  $ax = 5$

Решение: Это линейное уравнение .

Если  $a = 0$ , то уравнение  $0x = 5$  решения не имеет.

Если  $a \neq 0$ ,  $x = \frac{5}{a}$  - решение уравнения.

Ответ: при  $a \neq 0$ ,  $x = \frac{5}{a}$

при  $a = 0$  решения нет.

**Пример 2.** Решить уравнение  $ax - 6 = 2a - 3x$ .

Решение: Это линейное уравнение,  $ax - 6 = 2a - 3x$  (1)

$$ax + 3x = 2a + 6$$

Переписав уравнение в виде  $(a+3)x = 2(a+3)$ , рассмотрим два случая:

$a = -3$  и  $a \neq -3$ .

Если  $a = -3$ , то любое действительное число  $x$  является корнем уравнения (1). Если же  $a \neq -3$ , уравнение (1) имеет единственный корень  $x = 2$ .

Ответ: При  $a = -3$ ,  $x \in R$ ; при  $a \neq -3$ ,  $x = 2$ .

**Пример 3.** При каких значениях параметра  $a$  среди корней уравнения

$2ax - 4x - a^2 + 4a - 4 = 0$  есть корни больше 1 ?

Решение: Решим уравнение  $2ax - 4x - a^2 + 4a - 4 = 0$  – линейное уравнение

$$2(a - 2)x = a^2 - 4a + 4$$

$$2(a - 2)x = (a - 2)^2$$

При  $a = 2$  решением уравнения  $0x = 0$  будет любое число, в том числе и большее 1.

При  $a \neq 2$   $x = \frac{a-2}{2}$ . По условию  $x > 1$ , то есть  $\frac{a-2}{2} > 1$ ,  $a > 4$ .

Ответ: При  $a \in \{2\} \cup (4; \infty)$ .

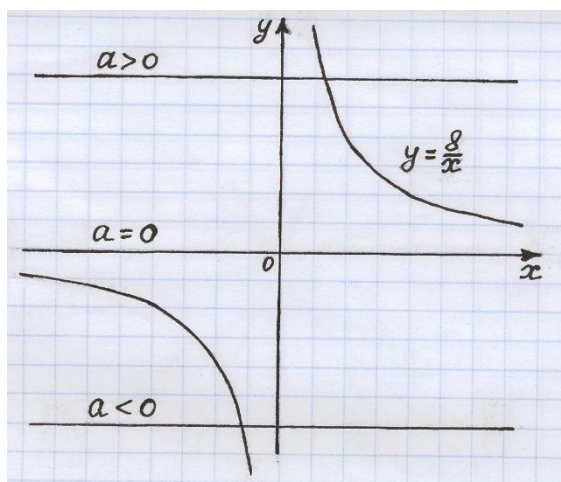
**Пример 4.** Для каждого значения параметра  $a$  найти количество корней уравнения  $ax=8$ .

Решение.  $ax = 8$  – линейное уравнение.

$$a = \frac{8}{x},$$

$y = a$  – семейство горизонтальных прямых;

$y = \frac{8}{x}$  – графиком является гипербола. Построим графики этих функций.



Ответ: Если  $a = 0$ , то уравнение решений не имеет. Если  $a \neq 0$ , то уравнение имеет одно решение.

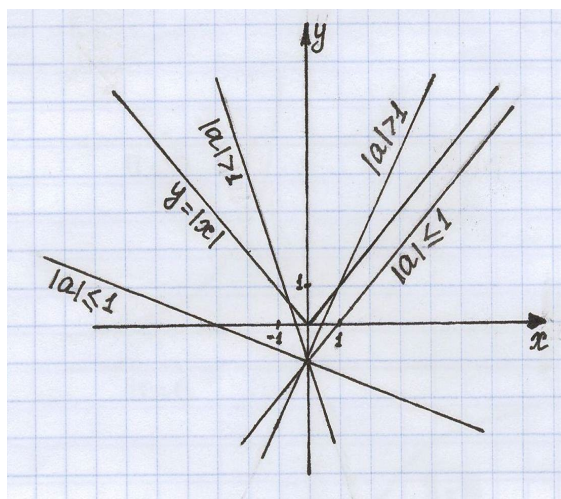
**Пример 5.** С помощью графиков выяснить, сколько корней имеет уравнение:

$$|x| = ax - 1.$$

$$y = |x|,$$

$y = ax - 1$  – графиком является прямая, проходящая через точку  $(0; -1)$ .

Построим графики этих функций.





Ответ: При  $|a| > 1$  - один корень

при  $|a| \leq 1$  - уравнение корней не имеет.

**Пример 6.** Решить неравенство  $ax + 4 > 2x + a^2$

Решение :  $ax + 4 > 2x + a^2 \Leftrightarrow (a - 2)x > a^2 - 4$ . Рассмотрим три случая.

1.  $a = 2$ . Неравенство  $0x > 0$  решений не имеет.

2.  $a > 2$ .  $(a - 2)x > (a - 2)(a + 2) \Leftrightarrow x > a + 2$

3.  $a < 2$ .  $(a - 2)x > (a - 2)(a + 2) \Leftrightarrow x < a + 2$

Ответ.  $x > a + 2$  при  $a > 2$ ;  $x < a + 2$ , при  $a < 2$ ; при  $a = 2$  решений нет.

### Квадратные уравнения и неравенства

*Квадратное уравнение* – это уравнение вида  $ax^2 + bx + c = 0$ , где  $a \neq 0$ ,  $a, b, c$  – параметры.

Для решения квадратных уравнений с параметром можно использовать стандартные способы решения на применение следующих формул:

1) дискриминанта квадратного уравнения:  $D = b^2 - 4ac$ ,  $(\frac{D}{4} = k^2 - ac)$

2) формул корней квадратного уравнения:  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ ,  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ ,

$$(x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D}}{a})$$

Квадратными называются неравенства вида

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad ax^2 + bx + c < 0, \quad (1), (2)$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0, \quad ax^2 + bx + c \leq 0, \quad (3), (4)$$

Множество решений неравенства (3) получается объединением множеств решений неравенства (1) и уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ . Аналогично находится множество решений неравенства (4).

Если дискриминант квадратного трехчлена  $ax^2 + bx + c$  меньше нуля, то при  $a > 0$  трехчлен положителен при всех  $x \in \mathbb{R}$ .

Если квадратный трехчлен имеет корни  $(x_1 < x_2)$ , то при  $a > 0$  он положителен на множестве  $(-\infty; x_2) \cup (x_2; +\infty)$  и отрицателен на интервале

$(x_1; x_2)$ . Если  $a < 0$ , то трехчлен положителен на интервале  $(x_1; x_2)$  и отрицателен при всех  $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ .

**Пример 1.** Решить уравнение  $ax^2 - 2(a-1)x - 4 = 0$ .

Это квадратное уравнение

Решение: Особое значение  $a = 0$ .

1. При  $a = 0$  получим линейное уравнение  $2x - 4 = 0$ . Оно имеет единственный корень  $x = 2$ .

2. При  $a \neq 0$ . Найдем дискриминант.

$$D = (a-1)^2 + 4a = (a+1)^2$$

Если  $a = -1$ , то  $D = 0$  – один корень.

Найдем корень, подставив вместо  $a = -1$ .

$-x^2 + 4x - 4 = 0$ , то есть  $x^2 - 4x + 4 = 0$ , находим, что  $x = 2$ .

Если  $a \neq -1$ , то  $D > 0$ . По формуле корней получим:  $x = \frac{(a-1) \pm (a+1)}{a}$ ;

$$x_1 = 2, x_2 = -\frac{2}{a}.$$

Ответ: При  $a = 0$  и  $a = -1$  уравнение имеет один корень  $x = 2$ ; при  $a \neq 0$  и

$a \neq -1$  уравнение имеет два корня  $x_1 = 2, x_2 = -\frac{2}{a}$ .

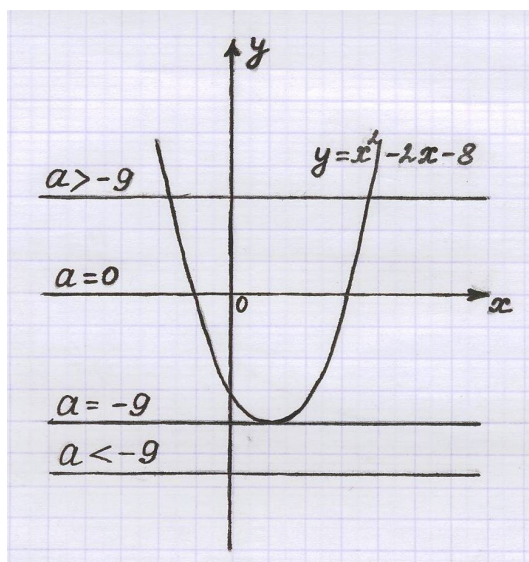
**Пример 2.** Найдите количество корней данного уравнения  $x^2 - 2x - 8 - a = 0$  в зависимости от значений параметра  $a$ .

Решение. Перепишем данное уравнение в виде  $x^2 - 2x - 8 = a$

$y = x^2 - 2x - 8$ - графиком является парабола;

$y = a$ - семейство горизонтальных прямых.

Построим графики функций.



Ответ: При  $a < -9$ , уравнение решений не имеет; при  $a = -9$ , уравнение имеет одно решение; при  $a > -9$ , уравнение имеет два решения.

**Пример 3.** При каких  $a$  неравенство  $(a - 3)x^2 - 2ax + 3a - 6 > 0$  выполняется для всех значений  $x$  ?

Решение. Квадратный трехчлен положителен при всех значениях  $x$ , если  $a - 3 > 0$  и  $D < 0$ , т.е. при  $a$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} a - 3 > 0 \\ a^2 - (a - 3)(3a - 6) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 3 > 0 \\ 2a^2 - 15a + 18 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (3; +\infty) \\ a \in (-\infty; \frac{3}{2}) \cup (6; +\infty) \end{cases}, \text{ откуда следует,}$$

что  $a > 6$ .

Ответ.  $a > 6$

## Содержание работы

1. Решить уравнения:

а)  $ax = -4$

б)  $2 - 5x = ax - 2$

в)  $2x + 3 = ax$

г)  $ax - 2x = 3(x - 1)$

д)  $ax = x + 3$

$$e) 4 + a x = 3 x + 1$$

2. Решить неравенства:

$$a) a x > 5$$

$$б) a x - 2 x < 3 (x + 1)$$

$$в) a^2 x + 3 \geq a + 3 a x$$

$$г) (n - 1) x \leq 2 (n + x)$$

$$д) a > \frac{1}{a} + \frac{x-1}{a-1}$$

3. При каких значениях параметра  $a$  уравнения

$$a) |x| = a x - 2$$

$$б) (a^2 - a - 2)x \leq a^5 - 4a^4 + 4a^3$$

не имеют решений?

4. Решить уравнения:

$$a) x^2 - 5 x + 6 = a$$

$$б) x^2 - 2 |x| - a = 0$$

$$в) x^2 + 5 a x + 4 a^2 = 0$$

$$г) x^2 - (2 a - 4) x - 8 a = 0$$

$$д) x^2 - (3 a - 2) x + 2 a^2 - a - 3 = 0$$

$$e) a x^2 - (a + 1) x + 1 = 0$$

$$ж) (a + 1) x^2 - 2 x + 1 - a = 0$$

$$з) a b x^2 + (a^2 + b^2) x + a b = 0$$

5. Решить неравенства:

$$a) x^2 + 2 x > a + 3$$

б)  $x^2 - c x - 2 c^2 < 0$

в)  $x^2 - 3 a x + 2 a^2 \leq 0$

г)  $x^2 - (3b - 2) - 6 b \leq 0$

д)  $a x^2 - 2 (a - 1) x - 4 \geq 0$

е)  $x^2 - 2x - 8 - a > 0$

ж)  $x^2 - 12 x + c < 0$

6. При каких  $a$  разность корней уравнения  $2x^2 - (a + 1)x + (a - 1) = 0$  равна их произведению?

7. При каком  $a$  уравнения  $x^2 + 2x + a = 0$  и  $x^2 + ax + 2 = 0$  имеют общий корень?

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 66

**Тема:** «Решение задач. Уравнения и неравенства»

**Цель:** научиться решать неравенства методом интервалов.

**Оборудование:** справочные пособия.

### Содержание работы

#### Задание.

1. Решите уравнения:

1)  $x^3 - 3x^2 + x = 3$ ;

2)  $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ ;

3)  $x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 6x - 8 = 0$ .

2. Пусть  $f(x) = x^2(x - 3)$ . Найдите те значения  $x$ , для которых:

а)  $f(x) > 0$ ; б)  $f(x) < 0$ ; в)  $f(x) \geq 0$ ; г)  $f(x) \leq 0$ .

3. Пусть  $f(x) = x(x + 2)^2$ . Найдите те значения  $x$ , для которых:

а)  $f(x) > 0$ ; б)  $f(x) < 0$ ; в)  $f(x) \geq 0$ ; г)  $f(x) \leq 0$ .

3. Решите системы уравнений:

1)  $\begin{cases} x + 2y = -1, \\ 4^{x+y^2} = 16; \end{cases}$

2)  $\begin{cases} 3^{y+1} + 2^x = 5, \\ 4^x - 6 \cdot 3^y + 2 = 0; \end{cases}$

$$3) \begin{cases} xy = 2^4, \\ \log_2^2 x + \log_2^2 y = 10; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 2, \\ x^2 y - 2y + 9 = 0. \end{cases}$$

## **Информационное обеспечение обучения**

### **Печатные и электронные издания**

#### **Основные учебные издания**

1. Башмаков М.И. Математика: учебник / Башмаков М.И. — Москва: КноРус, 2021. — 394 с. — ISBN 978-5-406-08166-2. — URL: <https://book.ru/book/939220>

2. Башмаков М.И. Математика. Практикум: учебно-практическое пособие / Башмаков М.И., Энтина С.Б. — Москва: КноРус, 2021. — 294 с. — ISBN 978-5-406-05758-2. — URL: <https://book.ru/book/939104>

#### **Дополнительные учебные издания:**

3. Колмогоров А.Н. Алгебра и начала математического анализа. 10 – 11 классы: учеб. Пособие для общеобразоват. Организаций / [А.Н. Колмогоров и др.]; под ред. А.Н. Колмогорова. – 29-е изд. – М.: Просвещение, 2021. -384 с.: ил.

#### **Интернет ресурсы:**

4. [www.fcior.edu.ru](http://www.fcior.edu.ru) (Информационные, тренировочные и контрольные материалы).

5. [www.school-collection.edu.ru](http://www.school-collection.edu.ru) (Единая коллекции цифровых образовательных ресурсов).

#### **Электронно-библиотечная система:**

6. ЭБС «Znanium»

7. ЭБС «PROFобразование»

8. ЭБС «Book.ru»