

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Саратовский государственный технический университет имени  
Гагарина Ю.А.»

Филиал федерального государственного бюджетного образовательного  
учреждения высшего образования  
«Саратовский государственный технический университет имени  
Гагарина Ю.А.» в г.Петровске

УТВЕРЖДАЮ  
Директор филиала СГТУ  
имени Гагарина Ю.А. в г.Петровске  
Е.А.Бесшапошникова  
«08» 2024 г.



## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по дисциплине

ЕН.02 «Дискретная математика с элементами математической логики»

специальности

09.02.07 «Информационные системы и программирование»

Методические указания рассмотрены  
на заседании предметной (цикловой) комиссии  
общеобразовательных, ОГСЭ и ЕН дисциплин,  
профессиональных модулей специальностей  
социально-экономического профиля  
«14» июня 2024 года, протокол № 12  
Председатель ПЦК Медведева О.В. /Медведева О.В./

Петровск 2024

## **Пояснительная записка**

Методические указания по выполнению практических работ подготовлены на основе рабочей программы учебной дисциплины «Дискретная математика с элементами математической логики», разработанной на основе ФГОС СПО по специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование» и соответствующих общих (ОК) компетенций:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

При выполнении практических работ студент должен **уметь**:

- применять логические операции, формулы логики, законы алгебры логики;
- формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения.

При выполнении практических работ студент должен **знать**:

- основные принципы математической логики, теории множеств и теории алгоритмов;
- формулы алгебры высказываний;
- методы минимизации алгебраических преобразований;
- основы языка и алгебры предикатов;
- основные принципы теории множеств.

Содержание практических занятий определено рабочей программой и тематическим планированием, соответствует теоретическому материалу изучаемых разделов учебной дисциплины.

Объём практических занятий по дисциплине определяется учебным планом по данной специальности.

Продолжительность практического занятия - 2 академических часа. Перед проведением практического занятия преподавателем организуется инструктаж, а по ее окончании – обсуждение итогов.

Комплект методических указаний по выполнению практических работ дисциплины «Дискретная математика с элементами математической логики» содержит 7 практических занятий.

**Перечень практических работ  
по дисциплине «Дискретная математика с элементами математической  
логики»**

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1.**

Тема: «Упрощение формул логики с помощью равносильных преобразований».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2.**

Тема: «Представление булевой функции в виде СДНФ и СКНФ, минимальной ДНФ и КНФ».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3.**

Тема: «Множества и основные операции над ними».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4.**

Тема: «Графическое изображение множеств на диаграммах Эйлера-Венна».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5.**

Тема: «Нахождение области определения и истинности предиката».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6.**

Тема: «Графы».

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7.**

Тема: «Работа машины Тьюринга».

**ИНСТРУКЦИИ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ  
ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ**

Прежде чем приступить к выполнению заданий, внимательно прочитайте данные рекомендации. Практические работы включают в себя задания следующих видов:

**Решение математических задач.**

Одних вопросов и советов преподавателя студенту недостаточно для обучения решению задач. Нельзя забывать, что "умение решать задачи есть искусство, приобретаемое практикой".

Вопросы и советы студенту условно можно подразделить на четыре группы. Нужно помнить что вопросы, рекомендуемые для первого этапа, окажут помощь и на втором этапе, а рекомендуемые для второго этапа - на третьем и т. п. Дело в том, что этапы решения задачи не могут быть строго изолированы один от другого, между ними существует определенная связь, в их единстве заключается процесс решения задачи.

**1. Вопросы и советы для усвоения содержания задачи (1-й этап).** Нельзя приступать к решению задачи, не уяснив четко, в чем заключается задание, т. е. не установив, каковы данные и искомые или посылки и заключения. **Первый совет:** не спешить начинать решать задачу. Этот совет не означает, что задачу надо решать как можно медленней. Он означает, что решению задачи должна предшествовать подготовка, заключающаяся в следующем:

а) сначала следует ознакомиться с задачей, внимательно прочитав ее содержание. При этом схватывается общая ситуация, описанная в задаче;

б) ознакомившись с задачей, необходимо вникнуть в ее содержание. При этом нужно следовать такому совету: выделить в задаче данные и искомые, а в задаче на доказательство - посылки и заключения.

в) Если задача геометрическая или связана с геометрическими фигурами, полезно сделать чертеж к задаче и обозначить на чертеже данные и искомые г) В том случае, когда данные (или искомые) в задаче не обозначены, надо ввести подходящие обозначения. При решении текстовых задач алгебры и начал анализа вводят обозначения искомых или других переменных, принятых за искомые.

д) Уже на первой стадии решения задачи, стадии понимания задания, полезно попытаться ответить на вопрос: "Возможно ли удовлетворить условию?" Не всегда сразу удастся ответить на этот вопрос, но иногда это можно сделать.

Отвечая на вопрос: "Возможно ли удовлетворить условию?", полезно выяснить, однозначно ли сформулирована задача, не содержит ли она избыточных или противоречивых данных. Одновременно выясняется, достаточно ли данных для решения задачи.

**2. Составление плана решения задачи (2-й этап).** Составление плана решения задачи является главным шагом на пути ее решения. Правильно составленный план решения задачи почти гарантирует правильное ее решение. Но составление плана может оказаться сложным и длительным процессом. Поэтому попробуйте ответить на вопросы которые помогут вам лучше и быстрее составить план решения задачи, "открыть" идею ее решения:

а) Известна ли вам какая-либо родственная задача? Аналогичная задача? Если такая или родственная задача известна, то составление плана решения задачи не будет затруднительным. Но далеко не всегда известна задача, родственная решаемой. В этом случае может помочь в составлении плана решения совет.

б) Подумайте, известна ли вам задача, к которой можно свести решаемую. Если такая задача известна вам, то путь составления плана решения данной задачи очевиден: свести решаемую задачу к решенной ранее. Может оказаться, что родственная задача неизвестна вам и вы не можете свести данную задачу к какой-либо известной. План же сразу составить не удастся.

Стоит воспользоваться советом: "Попытайтесь сформулировать задачу иначе". Иными словами, попытайтесь перефразировать задачу, не меняя ее математического содержания.

При переформулировании задачи пользуйтесь либо определениями данных в ней математических понятий (заменяют термины их определениями), либо их признаками (точнее сказать, достаточными условиями). Надо отметить, что способность учащегося переформулировать текст задачи является показателем понимания математического содержания задачи.

Переформулировка задачи это перевод ее на язык математики, т. е. язык алгебры, геометрии или анализа. Это, скорее, формализация задачи, "математизация" ее. К такому приему и приходится часто прибегать при решении многих текстовых задач.

г) Составляя план решения задачи, всегда следует задавать себе вопрос: "Все ли данные задачи использованы?" Выявление неучтенных данных задачи облегчает составление плана ее решения.

д) При составлении плана задачи иногда бывает полезно следовать совету: "Попытайтесь преобразовать искомые или данные". Часто преобразование искомого или данных способствует более быстрому составлению плана решения. При этом искомые преобразуют так, чтобы они приблизились к данным, а данные - так, чтобы они приблизились к искомым. Так, при каждом случае тождественных преобразований данные преобразуются, постепенно приближаясь к результату (искомому). Аналогично уравнение, систему уравнений, неравенство или систему неравенств преобразуют в равносильные, чтобы найти их корни или множество решений.

е) Нередко случается так, что, вы все же не можете составить план ее решения. Тогда может помочь еще один совет: "Попробуйте решить лишь часть задачи", т. е. попробуйте сначала удовлетворить лишь части условий, с тем чтобы далее искать способ удовлетворить оставшимся условиям задачи.

ж) Нередко в составлении плана решения задачи помогает ответ на вопрос: "Для какого частного случая возможно достаточно быстро решить эту задачу?" Обнаружив такой частный случай, вы ставите перед собой новую цель - воспользоваться решением задачи в найденном частном случае для более общего (но, может быть, не самого общего) случая. Так можно поступить, постепенно обобщая задачу до исходной, решаемой задачи. Предполагаемый вариант рассуждений - явное применение полной индукции. Итак, совет: "Рассмотрите частные случаи задачной ситуации, решите задачу для какого-нибудь частного случая, примените индуктивные рассуждения".

**3. Реализация плана решения задачи (3-й этап).** План указывает лишь общий контур решения задачи. При реализации плана решающий задачи рассматриваются все детали, которые вписываются в этот контур. Эти детали надо рассматривать тщательно и терпеливо. Но при этом (решающему задачу) полезно следовать некоторым советам:

а) Проверяйте каждый свой шаг, убеждайтесь, что он совершен правильно. Иными словами, нужно доказывать правильность каждого шага ссылками на соответствующие, известные ранее математические факты, предложения.

б) При реализации плана поможет и совет: "Замените термины и символы их определениями". Так, термин "параллелограмм" заменяется его определением: "Четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны", термин "предел числовой последовательности" для доказательства, например, того предложения, что предел суммы двух последовательностей, имеющих пределы, равен сумме пределов этих последовательностей, можно заменить, и вполне успешно, его определением.

в) При решении некоторых задач помогает совет: "Воспользуйтесь свойствами данных в условии объектов".

**4. Анализ и проверка правильности решения задачи (4-й этап).** Даже очень хорошие студенты, получив ответ и тщательно изложив ход решения, считают задачу решенной. А ведь получение результата не означает еще, что задача

решена правильно. Тем более не означает, что для решения выбран лучший, наиболее удачный, изящный, если можно так выразиться, вариант. По В. М. Брадису, задачу можно считать решенной, если найденное решение:

- безошибочно,
- обоснованно,
- имеет исчерпывающий характер.

Поэтому анализ решения задачи, проверка решения и достоверности результата должны быть этапом решения задачи. Итак, два совета: "Проверьте результат", "Проверьте ход решения". Проверка результата может производиться различными способами. Проверая правильность хода решения, мы тем самым убеждаемся и в правильности результата. Значит, надо выполнить совет: "Проверьте все узловые пункты решения", еще раз убедитесь в истинности проведенных рассуждений.

Второй способ проверки результата заключается в получении того же результата применением другого метода решения задачи, поэтому полезно всегда задавать решающему вопрос: "Нельзя ли тот же результат получить иначе?" Иными словами, стоит последовать совету: "Решите задачу другим способом". Если при решении задачи другим способом получен тот же результат, что и в первом случае, задачу можно считать решенной правильно. К тому же получение различных вариантов решения одной и той же задачи имеет важное обучающее значение.

### **Выполнение контрольных работ.**

1. При подготовке к любой контрольной работе рекомендуется сначала внимательно разобраться с теоретическим материалом по учебнику, затем закрепить свои знания, решая задачи.
2. Подготовиться к работе означает: вы внимательно просматриваете тексты задач и прикидываете, какие из предложенных задач вам по силам и выполняете их в первую очередь.
3. Если вы переоценили свои силы — взяли трудную задачу — и не решили, то не отчаивайтесь. Дома в спокойной обстановке разберитесь, в чем причина вашей неудачи, и решите эту же задачу.
4. Если у вас пока нет большой любви к определенной дисциплине, и вас нервируют трудные задачи, то не расстраивайтесь: для начала выберите задачи начального уровня. Решая самые простые задачи, вы постепенно приобретаете уверенность в своих силах.
5. Если вы успешно решили легкую задачу на уроке, то попросите у преподавателя более трудную задачу. Если на уроке не успели, то обратитесь к преподавателю с просьбой дать вам возможность решить более трудную задачу во внеурочное время.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1

Тема: «Упрощение формул логики с помощью равносильных преобразований»

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** научиться упрощать формулы логики, определять истинность и ложность составных высказываний.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** справочные пособия.

### Справочный материал

#### Высказывания и операции над высказываниями.

**Высказыванием** называется повествовательное предложение, о котором можно сказать истинно оно или ложно.

1. Москва - столица России.
2. Если студент учится на отлично, то он получит красный диплом.
3. Осадки - это снег или дождь.
4. Курица – не птица.
5. Пейте томатный сок.
6. Я лгу.
7.  $23 < 5$

Высказываниями являются 1, 2, 3,4 и 7 предложения. Предложение 5 не является высказыванием, так как про него нельзя сказать истинно оно или ложно. Предложение 6 является логическим парадоксом.

**Элементарным высказыванием** называется высказывание, которое содержит одно утверждение (предложения 1,7).

**Сложное (составное) высказывание** состоит из элементарных высказываний связанных с помощью следующих предлогов и частиц: *И, НЕ, ИЛИ, ЕСЛИ - ТО, ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА* и другие. Предложения 2,3,4 являются сложными высказываниями.

#### Операции над высказываниями.

**Отрицанием высказывания  $x$**  называется новое высказывание, которое истинно, если высказывание ложное и наоборот. Таблица истинности операции отрицания имеет вид:

| $x$ | $\bar{x}$ |
|-----|-----------|
| 0   | 1         |
| 1   | 0         |

**Дизъюнкцией двух высказываний  $x$  и  $y$  (логическое «или»)** называется новое высказывание, которое будет истинным тогда когда, когда хотя бы одно из высказываний будет истинным.

| $x$ | $y$ | $x \vee y$ |
|-----|-----|------------|
| 0   | 0   | 0          |
| 0   | 1   | 1          |

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

**Конъюнкцией** двух высказываний  $x$  и  $y$  (логическое «и») называется новое высказывание, которое будет истинным тогда когда, когда оба высказывания истинны. Обозначение операции конъюнкция -  $\&(\cdot)$

| $x$ | $y$ | $x \cdot y$ |
|-----|-----|-------------|
| 0   | 0   | 0           |
| 0   | 1   | 0           |
| 1   | 0   | 0           |
| 1   | 1   | 1           |

**Импликацией** двух высказываний  $x$  и  $y$  («если – то») называется новое высказывание, которое ложно тогда, когда  $x$  (*предпосылка*)– истинно, а  $y$  (*следствие*)– ложно.

| $x$ | $y$ | $x \rightarrow y$ |
|-----|-----|-------------------|
| 0   | 0   | 1                 |
| 0   | 1   | 1                 |
| 1   | 0   | 0                 |
| 1   | 1   | 1                 |

**Эквивалентностью** двух высказываний  $x$  и  $y$  («тогда и только тогда») называется новое высказывание, которое будет истинно , если высказывания  $x$  и  $y$  будут одновременно истинны или ложны.

| $x$ | $y$ | $x \leftrightarrow y$ |
|-----|-----|-----------------------|
| 0   | 0   | 1                     |
| 0   | 1   | 0                     |
| 1   | 0   | 0                     |
| 1   | 1   | 1                     |

**Неодназначностью** (суммой по модулю два) двух высказываний  $x$  и  $y$  («тогда и только тогда») называется новое высказывание, которое будет истинно тогда когда одно из высказываний  $x$  или  $y$  истинно, а другое ложно.

| $x$ | $y$ | $x \oplus y$ |
|-----|-----|--------------|
| 0   | 0   | 0            |
| 0   | 1   | 1            |
| 1   | 0   | 1            |
| 1   | 1   | 0            |

**Штрих Шеффера** (логическое «и - не») высказываний  $x$  и  $y$  - это новое высказывание, которое будет ложно тогда и только тогда когда оба высказывания истинны.

| $x$ | $y$ | $x y$ |
|-----|-----|-------|
|-----|-----|-------|



|   |   |   |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

**Стрелка Пирса (логическое «или - не»)** высказываний  $x$  и  $y$  - это новое высказывание, которое будет истинно тогда и только тогда когда оба высказывания ложны.

|     |     |       |
|-----|-----|-------|
| $x$ | $y$ | $x y$ |
| 0   | 0   | 1     |
| 0   | 1   | 0     |
| 1   | 0   | 0     |
| 1   | 1   | 0     |

Для операций справедливы следующие приоритеты:  $\neg$ ,  $\&$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ .

### Формулы математической логики.

**Формулой математической логики** называется сложное высказывание, которое получено из элементарных высказываний с использованием логических операций.

Две формулы **равносильны**, если они принимают одинаковые логические значения на любом наборе значений входящих в формулу элементарных высказываний. Равносильность формул обозначается –  $A \equiv B$ .

### Формулы равносильности.

1) Коммутативность

$$A \vee B \equiv B \vee A$$

$$A \& B \equiv B \& A$$

2) Ассоциативность

$$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$$

$$A \& (B \& C) \equiv (A \& B) \& C$$

3) Дистрибутивность

$$A \vee (B \& C) \equiv (A \vee B) \& (A \vee C)$$

$$A \& (B \vee C) \equiv (A \& B) \vee (A \& C)$$

4) Идемпотентность

$$A \vee A \equiv A$$

$$A \& A \equiv A$$

5) Поглощение

$$A \vee (A \& B) \equiv A$$

$$A \& (A \vee B) \equiv A$$

6) Закон де Моргана

$$\overline{A \vee B} \equiv \bar{A} \& \bar{B}$$

$$\overline{A \& B} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}$$

7) Закон исключающий третьего

$$A \vee 1 \equiv 1$$

$$A \& 1 \equiv A$$

8) Закон противоречия

$$A \vee \emptyset \equiv A$$

$$A \& \emptyset \equiv \emptyset$$

9) Закон двойного отрицания  $\bar{\bar{A}} \equiv A$

10)  $\bar{0} \equiv 1$ ,  $\bar{1} \equiv 0$

- 11)  $A \rightarrow B \equiv \bar{A} \vee B$
- 12)  $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A)$
- 13)  $A \oplus B \equiv A \& \bar{B} \vee \bar{A} \& B$
- 14)  $A | B \equiv \overline{A \& B} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}$
- 15)  $A \downarrow B \equiv \overline{A \vee B} \equiv \bar{A} \& \bar{B}$

## Содержание работы

### 1. Какие из следующих предложений являются высказываниями?

**Определите истинность высказываний:**

1.  $2+2=5$
2. Да здравствуют студенты математического факультета!
3. Который час?
4. Москва – Столица России.
5.  $2*2 = 4$ .

### 2. Записать символически следующие высказывания:

1. Студент не может заниматься, если он устал или голоден.
2. Если Олег счастлив, то Ольга несчастлива, и если Олег несчастлив, то Ольга счастлива.
3. Петр встанет, и он или Иван уйдет.
4. Петр встанет и уйдет или Иван уйдет.

### 3. Найдите значения логических выражений:

1.  $1 \wedge (0 \vee 1)$
2.  $((0 \wedge 1) \vee (1 \vee 1)) \vee (0 \wedge 0)$
3.  $X \wedge 1 \vee (0 \vee X)$
4.  $(a \wedge \neg a) \rightarrow 1$
5.  $x \wedge x \wedge 0$

### 4. Построить таблицу истинности для формулы логики:

1.  $F = (P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow \neg Q) \rightarrow \neg P)$
2.  $F = P \leftrightarrow (Q \wedge (\neg P \vee \neg Q))$

### 5. Упростить:

1.  $(\bar{A} \vee B \rightarrow A \vee B) \wedge B$
2.  $\overline{x \vee y} \wedge (x \wedge y)$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2

Тема: «Представление булевой функции в виде СДНФ и СКНФ, минимальной ДНФ и КНФ»

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** научиться представлять булеву функцию в виде СДНФ и СКНФ, минимальной ДНФ и КНФ.

## ОБОРУДОВАНИЕ: справочные пособия.

### Справочный материал

**Булевой функцией** называется функция  $n$  переменных, которая принимает значение 1 или 0, а так же ее аргументы тоже принимают значение 1 или 0.

Булевая функция имеет следующие свойства:

1. **Свойство сохранения нуля**  $T_0$ . Булевая функция сохраняет ноль, если функция при нулевых значениях аргумента принимает значение ноль.
2. **Свойство сохранения единицы**  $T_1$ . Булевая функция сохраняет единицу, если функция при единичных значениях аргумента принимает значение единица.

#### ПРИМЕР

Логическая операция — дизъюнкция  $F = x \vee y$  обладает и свойством сохранения нуля ( $F(0,0) = x \vee y = 0$ ), и свойством сохранения единицы ( $F(1,1) = x \vee y = 1$ )

3. **Линейность**  $L$ . Функция является линейной, если её можно представить в виде:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_n x_n$$

где  $a_i$  - булевая переменная

#### ПРИМЕР

Эквивалентность является линейной функцией:

$$x \leftrightarrow y \equiv 1 \oplus 1 \cdot x \oplus 1 \cdot y \equiv 1 \oplus x \oplus y$$

4. **Монотонность**  $M$ . Функция является монотонной, если для любых произвольных наборов  $\alpha$  и  $\beta$  выполняются следующие неравенства:

$$\alpha < \beta$$

$$F(\alpha) < F(\beta)$$

5. **Самодвойственность**  $S$ . Функция называется самодвойственной, если она равна двойственной ей функции.

**Двойственной** функцией называется функция:

$$F^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{F(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})}$$

Тогда свойство самодвойственности может представлено:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

#### ПРИМЕР

Отрицание является самодвойственной функцией:

$$F(x) = F^*(x) = \overline{\overline{x}} = \overline{\overline{\overline{x}}} = \overline{x}$$

### Различные формы представления высказываний

**Литерой** — называется элемент высказывания  $x$  или её отрицание.

**Элементарной дизъюнкцией** называется выражение следующего вида:

$$L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_n,$$

где  $L_1$  – литера.

**Элементарной конъюнкцией** называется выражение следующего вида:

$$L_1 \cdot L_2 \cdot \dots \cdot L_n,$$

**Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)** формулы  $A$  называется выражение вида:

$$КНФ\ A \equiv K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_n,$$

где  $K_1$  – элементарная конъюнкция.

**Конъюнктивной нормальной формой (КНФ)** формулы  $A$  называется выражение вида:

$$ДНФ\ A \equiv D_1 \cdot D_2 \cdot \dots \cdot D_n,$$

где  $D_1$  – элементарная дизъюнкция.

Любую формулу можно представить в виде ДНФ или КНФ.

**Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ)** формулы  $A$  называется такая ДНФ, для которой выполняются следующие условия:

1. Все элементарные конъюнкции, входящие в ДНФ  $A$ , различны.
2. Все элементарные конъюнкции, входящие в ДНФ  $A$ , содержат литеры, соответствующие всем переменным.
3. Каждая элементарная конъюнкция, входящая в ДНФ  $A$ , не содержит двух одинаковых литер.
4. Каждая элементарная конъюнкция, входящая в ДНФ  $A$ , не содержит переменную и ее отрицание.

СДНФ  $A$  можно получить двумя способами:

1. по таблице истинности;
2. с помощью равносильных преобразований.

Первый способ получения СДНФ  $A$  рассмотрен выше. Рассмотрим второй способ, который состоит в следующем:

С помощью равносильных преобразований формулы  $A$  получают ДНФ  $A$ . При этом в полученной ДНФ возможны следующие ситуации:

1. Элементарная конъюнкция  $B$  ДНФ  $A$  не содержит переменную  $x_i$ , тогда используются следующие равносильные преобразования:

$$B \equiv B1 \equiv B(x_i \vee \overline{x_i}) \equiv Bx_i \vee B\overline{x_i}$$

2. Если в ДНФ  $A$  входят две одинаковые элементарные конъюнкции, то используя следующее равносильное преобразование:

$$B \vee B \equiv B,$$

одну элементарную конъюнкцию можно отбросить.

3. Если элементарная конъюнкция  $B$  ДНФ  $A$  содержит одновременно переменную  $x_i$  и ее отрицание, то используя следующие равносильные преобразования:

$$Bx_i \overline{x_i} \equiv B0 = 0,$$

эту элементарную конъюнкцию можно отбросить

4. Если элементарная конъюнкция  $B$  ДНФ  $A$  содержит дважды переменную  $x_i$ , то используя следующее равносильное преобразование:

$$Bx_i x_i \equiv Bx_i,$$

одну переменную  $x_i$  можно отбросить

СДНФ формулы  $A$  существует в единственном виде.

**Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ)** формулы  $A$  называется такая КНФ, для которой выполняются следующие условия:

1. Все элементарные дизъюнкции, входящие в КНФ  $A$ , различны.
2. Все элементарные дизъюнкции, входящие в КНФ  $A$ , содержат литеры, соответствующие всем переменным.
3. Каждая элементарная дизъюнкция, входящая в КНФ  $A$ , не содержит двух одинаковых литер.
4. Каждая элементарная дизъюнкция, входящая в КНФ  $A$ , не содержит переменную и ее отрицание.

СКНФ  $A$  можно получить двумя способами:

1. по таблице истинности;
2. с помощью равносильных преобразований.

По первому способу по таблице истинности получаем СДНФ  $\overline{A}$ , а СКНФ  $A$  можно получить, следуя следующему правилу

$$СКНФ A = \overline{СДНФ \overline{A}}$$

С помощью равносильных преобразований формулы  $A$  получают КНФ  $A$ . При этом в полученной КНФ возможны следующие ситуации:

1. Элементарная дизъюнкция  $B$  КНФ  $A$  не содержит переменную  $x_i$ , тогда используются следующие равносильные преобразования:

$$B \equiv B \vee 0 \equiv B \vee x_i \overline{x_i} \equiv (B \vee x_i)(B \vee \overline{x_i})$$

2. Если в КНФ  $A$  входят две одинаковые элементарные дизъюнкции, то используя следующее равносильное преобразование:

$$BB \equiv B,$$

одну элементарную дизъюнкцию можно отбросить.

3. Если элементарная дизъюнкция  $B$  КНФ  $A$  содержит одновременно переменную  $x_i$  и ее отрицание, то используя следующие равносильные преобразования:

$$B \vee x_i \vee \overline{x_i} \equiv B \vee 1 = 1,$$

эту элементарную дизъюнкцию можно отбросить.

4. Если элементарная дизъюнкция  $B$  КНФ  $A$  содержит дважды переменную  $x_i$ , то используя следующее равносильное преобразование:

$$B \vee x_i \vee x_i \equiv B \vee x_i,$$

одну переменную  $x_i$  можно отбросить.

СКНФ формулы  $A$  существует в единственном виде.

## Содержание работы

1. Дана формула  $A = \overline{x \vee y} \leftrightarrow x \cdot y$ . Получить ДНФ и КНФ данной формулы.

Применяя формулы равносильности, получаем КНФ  $A$ :

$$\begin{aligned} A = \overline{x \vee y} \leftrightarrow xy &\equiv \overline{\overline{xy}} \equiv \overline{(x \vee y) \cdot x \cdot y} \vee \overline{(x \vee y) \cdot x \cdot y} \equiv (x \vee y) \cdot (\overline{x \vee y}) \vee \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot x \cdot y \equiv \\ &\equiv (x \vee y) \cdot (\overline{x} \vee \overline{y}) \end{aligned}$$

Применяя формулы равносильности, получаем ДНФ  $A$ :

$$\begin{aligned} A = \overline{x \vee y} \leftrightarrow xy &\equiv \overline{(x \vee y) \cdot x \cdot y} \vee \overline{(x \vee y) \cdot x \cdot y} \equiv (x \vee y) \cdot (\overline{x} \vee \overline{y}) \vee \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot x \cdot y \equiv \\ &\equiv (x \vee y) \cdot (\overline{x} \vee \overline{y}) \equiv x \cdot \overline{x} \vee x \cdot \overline{y} \vee \overline{x} \cdot y \vee y \cdot \overline{y} \equiv x \cdot \overline{y} \vee \overline{x} \cdot y \end{aligned}$$

2. Получить СДНФ формулы  $A = x \rightarrow y\overline{z}$

С помощью равносильных преобразований получаем СДНФ  $A$ :

$$\begin{aligned} A = x \rightarrow y\overline{z} &\equiv \overline{x} \vee y\overline{z} \equiv \overline{x}(y \vee \overline{y})(z \vee \overline{z}) \vee y\overline{z}(x \vee \overline{x}) \equiv \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee xy\overline{z} \vee \\ &\vee xy\overline{z} \equiv \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee xy\overline{z} \end{aligned}$$

С помощью таблицы истинности получаем СДНФ  $A$ :

| $x$ | $y$ | $z$ | $\overline{z}$ | $y\overline{z}$ | $A = x \rightarrow y\overline{z}$ |
|-----|-----|-----|----------------|-----------------|-----------------------------------|
| 0   | 0   | 0   | 1              | 0               | 1                                 |
| 0   | 0   | 1   | 0              | 0               | 1                                 |
| 0   | 1   | 0   | 1              | 1               | 1                                 |
| 0   | 1   | 1   | 0              | 0               | 1                                 |
| 1   | 0   | 0   | 1              | 0               | 0                                 |
| 1   | 0   | 1   | 0              | 0               | 0                                 |
| 1   | 1   | 0   | 1              | 1               | 1                                 |
| 1   | 1   | 1   | 0              | 0               | 0                                 |

$$\text{СДНФ } A = \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee xy\overline{z}$$

Очевидно, что в результат двух способов совпадает.

3. Получить СКНФ формулы  $A = x \rightarrow y\overline{z}$

С помощью равносильных преобразований получаем СКНФ  $A$ :

$$\begin{aligned} A = x \rightarrow y\overline{z} &\equiv \overline{x} \vee y\overline{z} \equiv (\overline{x} \vee y)(\overline{x} \vee \overline{z}) \equiv (\overline{x} \vee y \vee z)(\overline{x} \vee y \vee \overline{z})(\overline{x} \vee \overline{z} \vee y)(\overline{x} \vee \overline{z} \vee \overline{y}) \equiv \\ &\equiv (\overline{x} \vee y \vee z)(\overline{x} \vee y \vee \overline{z})(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \end{aligned}$$

С помощью таблицы истинности получаем СДНФ  $A$ :

| $x$ | $y$ | $z$ | $\bar{z}$ | $y\bar{z}$ | $A = x \rightarrow y\bar{z}$ | $\bar{A}$ |
|-----|-----|-----|-----------|------------|------------------------------|-----------|
| 0   | 0   | 0   | 1         | 0          | 1                            | 0         |
| 0   | 0   | 1   | 0         | 0          | 1                            | 0         |
| 0   | 1   | 0   | 1         | 1          | 1                            | 0         |
| 0   | 1   | 1   | 0         | 0          | 1                            | 0         |
| 1   | 0   | 0   | 1         | 0          | 0                            | 1         |
| 1   | 0   | 1   | 0         | 0          | 0                            | 1         |
| 1   | 1   | 0   | 1         | 1          | 1                            | 0         |
| 1   | 1   | 1   | 0         | 0          | 0                            | 1         |

СДНФ  $\bar{A} = x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xyz$

СКНФ  $A \equiv \overline{\text{СДНФ } \bar{A}} = \overline{x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xyz} \equiv (\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$

### ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3

Тема: «Множества и основные операции над ними»

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** научиться выполнять основные операции над множествами.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** справочные пособия.

#### Справочный материал

**Множеством**  $S$  называется объединение в одно целое объектов, хорошо различимых нашей мыслью или интуицией. Эти объекты называются **элементами** множества  $S$ . Такое интуитивное определение дал немецкий математик Г. Кантор. В данном определении важны следующие два момента:

1. Множество- это нечто, состоящее из хорошо различимых объектов.
2. Это нечто мыслится как единое целое.

Множества бывают конечными и бесконечными. Количество элементов в конечном множестве называется **мощностью** множества. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым множеством** и обозначается  $\emptyset$ . Множество, включающее в себя все рассматриваемые множества, называется универсальным множеством или **универсумом** и обозначается  $U$ . Символом  $\in$  обозначается отношение принадлежности. Запись  $x \in X$  означает, что элемент  $x$  принадлежит множеству  $X$ . Если элемент  $x$  не принадлежит множеству  $X$ , то пишут  $x \notin X$ .

Множества могут быть заданы следующими способами:

1. перечислением (списком своих элементов);
2. описанием свойств, которыми должны обладать его элементы;
3. порождающей процедурой.

#### ПРИМЕР

Множество экзаменационных оценок может быть задано:

1. перечислением  $A = \{2; 3; 4; 5\}$
2. описанием свойств:  $A = \{a | a - \text{экзаменационная оценка}\}$

3. порождающей процедурой:  $A = \{a \mid a = 2 + i, i = \overline{0,3}\}$

**Подмножеством** множества  $A$  называется множество  $B$ , если любой элемент множества  $B$  принадлежит множеству  $A$ :

$$A \subseteq B \mid a \in A \text{ и } a \in B \quad (1)$$

Символом  $\subseteq$  обозначается отношение включения. Запись  $A \subseteq B$  означает множество  $A$  является подмножеством множества  $B$ .

Не следует смешивать отношение принадлежности  $\in$  и отношение включения  $\subseteq$ . Отношение принадлежности применяется к элементам множества, а отношение включения к множествам. Хотя  $1 \in \{1\}, \{1\} \in \{\{1\}\}$ , не верно, что  $1 \in \{\{1\}\}$ , так как единственным элементом множества  $\{\{1\}\}$  является  $\{1\}$ .

Если  $A \subseteq B$  и  $A \neq B$ , то  $A \subset B$ , то есть множество  $A$  строго включено в множество  $B$ . Символ  $\subset$  называется строгим включением.

### Операции над множествами.

1. **Объединением** множеств  $A$  и  $B$  называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств  $A$  или  $B$ :

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\} \quad (2)$$

2. **Пересечением** множеств  $A$  и  $B$  называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству  $A$  и множеству  $B$ :

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\} \quad (3)$$

3. **Разностью** множества  $A$  и  $B$  называется множество всех тех элементов, которые принадлежат множеству  $A$  и не принадлежат множеству  $B$ :

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\} \quad (4)$$

4. **Симметричной разностью** множеств  $A$  и  $B$  называется множество, состоящее из элементов множества  $A$ , не принадлежащих множеству  $B$ , и элементов множества  $B$ , не принадлежащих множеству  $A$ :

$$A \Delta B = \{x \mid (x \in A \text{ и } x \notin B) \text{ и } (x \in B \text{ и } x \notin A)\} \quad (5)$$

5. **Дополнением** множества  $A$  называется множество всех тех элементов, которые не принадлежат множеству  $A$ :

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\} \quad (6)$$

### Прямое (декартовое) произведение множества.

**Прямым (декартовым) произведением** множества  $A$  и множества  $B$  называется множество пар таких, что:

$$A \times B = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A, y \in B \},$$

ПРИМЕР.

Пусть заданы  $X$  и  $Y$ :  $X = \{x \mid x \leq 2\}$ ,  $Y = \{y \mid y \leq 2\}$ . Тогда прямое (декартовое) произведение этих множеств может быть представлено графически:  $X \times Y = \{x \mid x \leq 2\}$

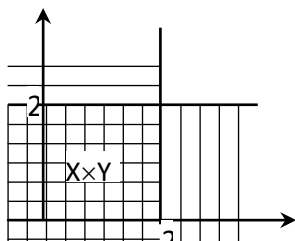




Рис. 1. График прямого произведения множеств  $X$  и  $Y$ :

Пусть заданы  $X$  и  $Y$ :  $X = \{a; b; c; d; e; f; g; h\}$ ,  $Y = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ . Тогда прямое (декартовое) произведение этих множеств представляет шахматную доску.

### Алгебра теории множеств.

Для любых множеств  $A$ ,  $B$  и  $C$  выполнимы следующие тождества:

1. Коммутативный закон

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A \qquad (7)$$

2. Ассоциативный закон

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \qquad (8)$$

3. Дистрибутивный закон

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (9)$$

4. Закон поглощения

$$A \cup (A \cap B) = A \qquad A \cap (A \cup B) = A \qquad (10)$$

5. Закон идемпотентности

$$A \cup A = A \qquad A \cap A = A \qquad (11)$$

6. Закон де Моргана

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad (12)$$

7. Закон исключенного третьего

$$A \cup \overline{A} = U \qquad (13)$$

8. Закон противоречия

$$A \cap \overline{A} = \emptyset \qquad (14)$$

9. Операции с универсумом:

$$A \cup U = U \qquad A \cap U = A \qquad (15)$$

10. Операции с пустым множеством:

$$A \cup \emptyset = A \qquad A \cap \emptyset = \emptyset \qquad (16)$$

11.  $\overline{\overline{U}} = \emptyset$

$$\overline{\emptyset} = U \qquad (17)$$

12. Закон двойного дополнения

$$\overline{\overline{A}} = A \qquad (18)$$

13.  $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

$$(19)$$

14.  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$

$$(20)$$

При преобразованиях выражений над множествами по законам алгебры логики существуют следующие приоритеты: самой приоритетной операцией является дополнение, затем пересечение и в последнюю очередь объединение.

### Содержание работы

#### Вариант 1

1. Выполнить над множествами  $A$  и  $B$  операции:  $|A|$ ,  $|B|$ ,  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$ ,  
 $A \oplus B$ ,  $A \times B$ :  
 а)  $A = \{a, 1, b, 2, c\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ;  
 б)  $A = \{a, b, c, y, z\}$ ,  $B = \{a, b, c, d\}$ .
2. В олимпиаде по математике для абитуриентов приняло участие 50 учащихся. Им было предложено решить одну задачу по алгебре, одну по геометрии и одну по тригонометрии. По алгебре решили задачу 25 человек, по геометрии – 20 человек, по тригонометрии – 19 человек. По алгебре и геометрии решили 9 человек, по алгебре и тригонометрии – 10 человек, по геометрии и тригонометрии – 3 человека. Все три задачи решили 2 человека. Сколько учащихся не решили ни одной задачи?

## Вариант 2

1. Выполнить над множествами  $A$  и  $B$  операции:  $|A|$ ,  $|B|$ ,  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$ ,  
 $A \oplus B$ ,  $A \times B$ :  
 а)  $A = \{a, b, 1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 2, c, d\}$ ;  
 б)  $A = \{x, y, z, t\}$ ,  $B = \{x, y, 1, 2\}$ .
2. В группе 25 учащихся. Каждый из них пользуется хотя бы одним из видов городского транспорта: трамваем, автобусом или троллейбусом. Трамваем пользуются 16 человек, автобусом – 13 человек, троллейбусом – 10 человек. Всеми тремя видами транспорта пользуются 5 человек, трамваем и автобусом – 10 человек, трамваем и троллейбусом – 8 человек, троллейбусом и автобусом – 9 человек. Сколько учащихся не пользуются ни одним видом транспорта?

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4

Тема: «Графическое изображение множеств на диаграммах Эйлера-Венна»

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** научиться изображать множества с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** справочные пособия.

### Справочный материал

Для наглядного представления операций над множествами используют *диаграммы Эйлера-Венна*.

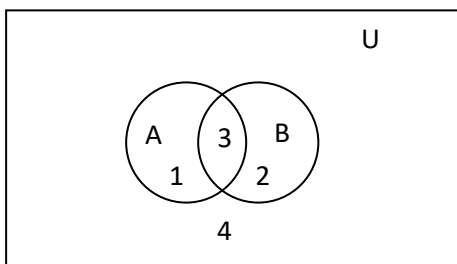


Рис. 1. Диаграмма Эйлера-Венна

где  $A \cup B$  - это области 1,2,3

$A \cap B$  - это область 3;

$A \setminus B$  - это область 1;

$A \Delta B$  - это область 1,3

$\overline{A}$  - это области 2,4.

### Решение уравнений алгебры множеств.

Пусть дано уравнение вида:

$$A(X) = B(X)$$

где  $X$  - неизвестное множество. Необходимо определить это неизвестное множество.

Алгоритм решения уравнений алгебры множеств имеет следующий алгоритм:

1. Представляем данное уравнение в следующем виде:

$$A(X) \Delta B(X) = \emptyset$$

2. Используя алгебру множеств, преобразуем данное уравнение к виду:

$$C \cap X \cup D \cap \overline{X} = \emptyset$$

где  $C$  и  $D$  - некоторые множества, не содержащие множество  $X$  и его дополнение.

3. Решением уравнения является следующее выражение:

$$D \subseteq X \subseteq \overline{C}$$

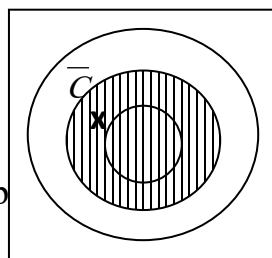


Рис. 2. Диаграмма Эйлера-Венна решения уравнения алгебры

### Содержание работы

**Задание.** Необходимо решить уравнение:

$$X \cup A = B$$

1. Преобразуем данное уравнение:

$$(X \cup A) \Delta B = \emptyset$$

2. С помощью алгебры множеств преобразуем данное выражение следующим образом:

$$(X \cup A) \cap \overline{B} \cup \overline{(X \cup A)} \cap B = X \cap \overline{B} \cup A \cap \overline{B} \cup \overline{X} \cap \overline{A} \cap B = \emptyset$$

В данном выражении присутствует множество  $A \cap \bar{B}$ , в котором не содержится ни множество  $X$ , ни его дополнение, поэтому к этому множеству применяем следующие преобразования:

$$A \cap \bar{B} = A \cap \bar{B} \cap U = A \cap \bar{B} \cap (X \cup \bar{X}) = A \cap \bar{B} \cap X \cup A \cap \bar{B} \cap \bar{X}$$

С учетом данных преобразований имеем:

$$\begin{aligned} X \cap \bar{B} \cup A \cap \bar{B} \cap X \cup A \cap \bar{B} \cap \bar{X} \cup \bar{X} \cap A \cap B &= \\ = X \cap (\bar{B} \cup A \cap \bar{B}) \cup \bar{X} \cap (A \cap \bar{B} \cup A \cap B) &= \\ = X \cap \bar{B} \cup \bar{X} \cap (A \Delta B). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем множества  $C$  и  $D$  в следующем виде:

$$C = \bar{B}$$

$$D = A \Delta B.$$

Решением уравнения будет множество:

$$A \Delta B \subseteq X \subseteq B.$$

Решение уравнения (один из вариантов) может быть представлено на диаграмме Эйлера-Венна

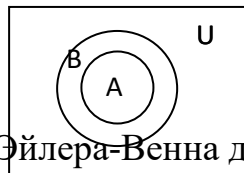


Рис. 3. Диаграмма Эйлера-Венна для решения уравнения алгебры множеств

При изображении решения уравнения алгебры множеств следует иметь в виду, что два множества могут иметь следующие диаграммы Эйлера-Венна

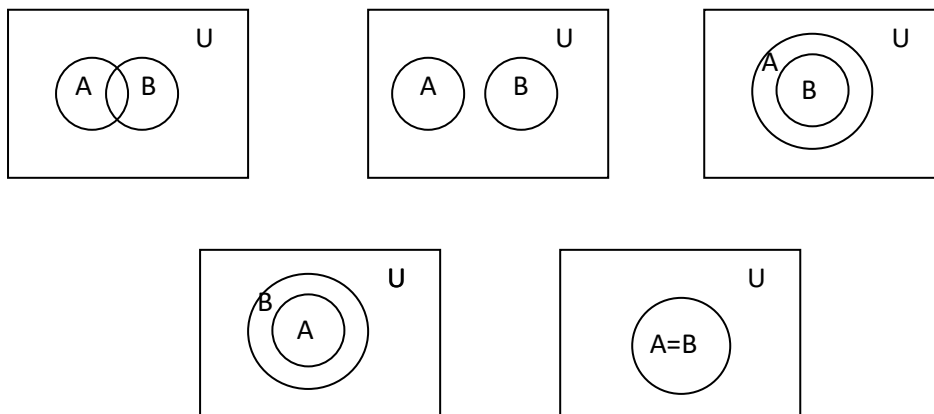


Рис. 4. Диаграмма Эйлера-Венна для решения уравнения алгебры множеств

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5

Тема: «Нахождение области определения и истинности предиката»

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** научиться определять истинность и ложность предикатов, составлять таблицы истинности.

## ОБОРУДОВАНИЕ: справочные пособия.

### Справочный материал

#### Логические операции над предикатами.

Для предикатов выполнимы следующие операции:

**Конъюнкция**  $P(x) \cdot Q(x)$  - это новый предикат, который принимает значение истинно при тех и только тех значениях  $x$  из вещественной области  $D$ , при которых оба предиката  $P(x)$  и  $Q(x)$  истинны одновременно, и ложно во всех других случаях.

**Дизъюнкция**  $P(x) \vee Q(x)$  - это новый предикат, который принимает значение ложно при тех и только тех значениях  $x$  из вещественной области  $D$ , при которых оба предиката  $P(x)$  и  $Q(x)$  ложны одновременно, и истинно во всех других случаях.

**Отрицание предиката**  $\overline{P(x)}$  - это новый предикат, который принимает значение истинно при всех  $x$  из вещественной области  $D$ , при которых предикат  $P(x)$  принимает значение ложно и наоборот.

#### Квантовые операции.

Для предикатов кроме логических операций применимы **кванторные операции: всеобщности и существования.**

Пусть  $P(x)$  - предикат, определенный на множестве  $D$ . Тогда  $\forall x P(x)$  - означает «для всякого (любого)  $x$  истинно  $P(x)$ ». Символ  $\forall$  называется **квантором всеобщности.**

Переменную  $x$  в предикате  $P(x)$  называют **свободной** (ей можно придавать различные значения из  $M$ ), в высказывании  $\forall x P(x)$  переменную  $x$  называют **связанной** квантором всеобщности.

Пусть  $P(x)$  - предикат, определенный на множестве  $D$ . Тогда  $\exists x P(x)$  - означает «существует  $x$ , для которого истинно  $P(x)$ ». Символ  $\exists$  называется **квантором существования.**

#### ПРИМЕР

Пусть на множестве натуральных чисел задан предикат  $P(x)$  - «число  $x$  кратно 3». Используя кванторы, из данного предиката можно получить высказывания:

$\forall x P(x)$  - «все натуральные числа кратны 3»;

$\exists x P(x)$  - «существуют натуральные числа, кратные 3».

Очевидно, что первое из данных высказываний ложно, а второе – истинно.

Кванторные операции применяются и к **многоместным предикатам**. Пусть на множестве  $D$  задан двухместный предикат  $P(x, y)$ . К данному предикату могут применяться кванторные операции как по одной, так и по двум переменным.

### ПРИМЕР

Пусть предикат  $P(x, y)$  означает  $x$  делится на  $y$  без остатка., причем обе переменные определены на множестве натуральных чисел. Тогда применение кванторных операций приводит к следующим высказываниям:

1.  $\forall x \forall y P(x, y)$  - «для любого  $x$  и для любого  $y$  справедливо, что  $x$  делится на  $y$  без остатка.
2.  $\forall x \exists y P(x, y)$  - «для любого  $x$  существует  $y$ , который является делителем  $x$  без остатка.

Нетрудно заметить, что первое высказывание является ложным, а второе – истинным.

Для  $m$ -местных предикатов, связанных по одной переменной справедливы следующие формулы:

$$\forall x_1 P(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\alpha_1, x_2, \dots, x_n) \cdot P(\alpha_2, x_2, \dots, x_n) \cdot \dots \cdot P(\alpha_m, x_2, \dots, x_n),$$

где  $x_1 \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$

$$\exists x_1 P(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\alpha_1, x_2, \dots, x_n) \vee P(\alpha_2, x_2, \dots, x_n) \vee \dots \vee P(\alpha_m, x_2, \dots, x_n),$$

где  $x_1 \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$

### Содержание работы

1. Записать следующие предикаты в виде истинных или ложных высказываний:
  - а)  $D_n(x)$ : « $x$  делится на  $n$ »;
  - б)  $D_{m, n}(x)$ : « $x$  делится на  $m$  и на  $n$ »;
  - в)  $L(x, y)$ : « $x \leq y$ »;
  - г)  $I(x, y)$ : « $x = y$ »;
  - е)  $E(x)$ : « $x$  четно».
2. Составить таблицы истинности для следующих характеристических функций предикатов  $p$  и  $q$ :
  - а)  $\chi(p, q) = (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (q \wedge \bar{p})$
  - б)  $\chi(p, q) = (\bar{p} \vee \bar{q}) \rightarrow (q \wedge \bar{p})$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6

Тема: «Графы»

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** научиться работать с графами, определять тип графов, составлять матрицу смежности.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** справочные пособия.

### Справочный материал

#### Основные понятия теории графов

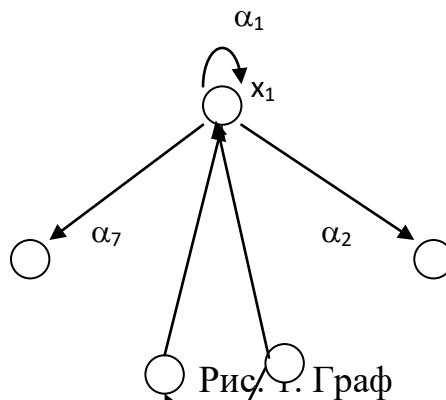
**Графом** называется пара следующего вида:

$$G = \langle \Gamma, X \rangle,$$

где  $\Gamma$  - график  $\Gamma \subseteq X \times X$ ;

$X$  - множество вершин.

Иными словами, **граф** представляет совокупность множества вершин и дуг.



Граф, представленный на рис. 1, состоит из множества вершин  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$  и множество дуг  $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$

Графическое изображение графа является самым наглядным, но не единственным способом задания графа. Кроме того граф может быть задан:

**1. перечислением:**

$$\{ \langle x_1, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \langle x_1, x_6 \rangle, \langle x_3, x_1 \rangle, \langle x_3, x_4 \rangle, \langle x_4, x_5 \rangle, \langle x_5, x_1 \rangle \}$$

**2. множеством образов:**

$$\Gamma_{x_1} = \{x_1, x_2, x_6\}$$

$$\Gamma_{x_2} = \emptyset$$

$$\Gamma_{x_3} = \{x_1, x_4\}$$

$$\Gamma_{x_4} = \{x_5\},$$

$$\Gamma_{x_5} = \{x_1\}$$

$$\Gamma_{x_6} = \emptyset$$

где  $\Gamma_{x_i}$  - **образ вершины**  $x_i$  - множество вершин, в которые исходят дуги из

данной вершины.

### 3. матрицей инцидентности

**Матрица инцидентности** - это матрица вершин и инцидентных им дуг.

Дуга **инцидентна** вершине, если эта дуга исходит или заходит в данную вершину.

Вершина **инцидентна** дуге, если в эту вершину заходит или исходит данная дуга.

В матрице инцидентности в первом столбце расположены вершины, в первой строке – дуги. Остальные ячейки матрицы инцидентности заполняются по следующему правилу:

- $\gamma_{ij} = -1$ , если из  $i$ -той вершины исходит  $j$ -тая дуга;
- $\gamma_{ij} = +1$ , если в  $i$ -той вершину заходит  $j$ -тая дуга;
- $\gamma_{ij} = 0$ , если  $i$ -тая вершина не инцидента  $j$ -той дуге;
- $\gamma_{ij} = 2$ , если из  $i$ -той вершины исходит  $j$ -тая дуга и в нее же заходит, т.е.

в  $i$ -той вершине  $j$ -тая дуга образует **петлю**.

Для графа, представленного на рис. 1 матрица инцидентности имеет вид:

|       | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | $\alpha_4$ | $\alpha_5$ | $\alpha_6$ | $\alpha_7$ |
|-------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $x_1$ | 2          | -1         | +1         | 0          | 0          | +1         | -1         |
| $x_2$ | 0          | +1         | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| $x_3$ | 0          | 0          | -1         | -1         | 0          | 0          | 0          |
| $x_4$ | 0          | 0          | 0          | +1         | -1         | 0          | 0          |
| $x_5$ | 0          | 0          | 0          | 0          | +1         | -1         | 0          |
| $x_6$ | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | +1         |



На практике в матрице инцидентности иногда нули не проставляются для наглядности.

|       | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | $\alpha_4$ | $\alpha_5$ | $\alpha_6$ | $\alpha_7$ |
|-------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $x_1$ | 2          | -1         | +1         |            |            | +1         | -1         |
| $x_2$ |            | +1         |            |            |            |            |            |
| $x_3$ |            |            | -1         | -1         |            |            |            |
| $x_4$ |            |            |            | +1         | -1         |            |            |
| $x_5$ |            |            |            |            | +1         | -1         |            |
| $x_6$ |            |            |            |            |            |            | +1         |

Свойство матрицы инцидентности – сумма элементов по столбцам равна 0 или 2.

#### 4. матрицей смежности

**Смежные дуги** – это дуги инцидентные одной вершине.

**Смежные вершины** – вершины, инцидентные одной дуге.

**Матрица смежности** - это матрица смежных вершин.

Матрица смежности заполняется по следующему правилу:  $\gamma_{ij} = 1$ , если из  $i$ -той вершины исходит дуга в  $j$  – тую вершину; во всех остальных случаях  $\gamma_{ij} = 0$  (для удобства и наглядности на практике в матрице смежности нули не проставляются).

Для графа, представленного на рис. 1 матрица смежности имеет вид:

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | 1     | 1     |       |       |       | 1     |
| $x_2$ |       |       |       |       |       |       |
| $x_3$ | 1     |       |       | 1     |       |       |
| $x_4$ |       |       |       |       | 1     |       |
| $x_5$ | 1     |       |       |       |       |       |
| $x_6$ |       |       |       |       |       |       |

**Полустепенью захода**  $\rho^+(x_i)$   $i$ -той вершины называется число дуг, заходящих в данную вершину.

**Полустепенью исхода**  $\rho^-(x_i)$   $i$ -той вершины называется число дуг, исходящих из данной вершины.

**Степенью  $i$ -той вершины исхода**  $\rho(x_i)$  называется сумма полустепеней захода и исхода:

$$\rho(x_i) = \rho^-(x_i) + \rho^+(x_i)$$

**Свойства матрицы смежности:**

1. Сумма единиц по строке определяет полустепень исхода;
2. Сумма единиц по столбцу определяет полустепень захода;
3. Сумма единиц по строкам и по столбцам определяет степень вершин.

**Основное свойство графа:**

В любых графах число вершин с нечетной степенью четно.

**Путем** в графе называется последовательность дуг такая, что каждая следующая дуга исходит из вершины, в которую заходит предыдущая дуга.

**Длиной пути** называется количество пройденных дуг.

**Простой путь** – это такой путь, в котором дуга встречается не более одного раза.

**Элементарный путь** – это путь, в котором вершина встречается не более одного раза.

**Контур** – путь, начинающийся и заканчивающийся в одной точке.

**Петля** – контур длиной в одну единицу.

Графы бывают двух видов:

• **ориентированный граф (орграф)** – это граф, состоящий из вершин и дуг.

• **неориентированный граф** – это граф, состоящий из вершин и ребер.

**Ребро** – это дуга, не имеющая направление.

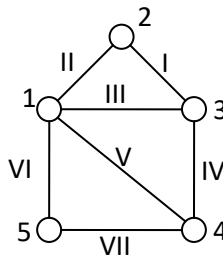


Рис. 2. Неориентированный граф

В неориентированном графе путь называется **цепью**; контур – **циклом**.

Неориентированный граф также может быть задан с помощью матриц инцидентности и смежности.

Матрица инцидентности для неориентированного графа составляется по правилу:

- $\gamma_{ij} = 1$ , если  $i$ -тая вершина инцидентна  $j$ -тому ребру;
- $\gamma_{ij} = 0$ , если  $i$ -тая вершина не инцидентна  $j$ -тому ребру;
- $\gamma_{ij} = 2$ , если. в  $i$ -той вершине  $j$ -тое ребро образует петлю.

Для графа, представленного на рис. 2, матрица инцидентности имеет вид:

|   | I | II | III | IV | V | VI | VII |
|---|---|----|-----|----|---|----|-----|
| 1 |   | 1  | 1   |    | 1 | 1  |     |
| 2 | 1 | 1  |     |    |   |    |     |
| 3 | 1 |    | 1   | 1  |   |    |     |
| 4 |   |    |     | 1  | 1 |    | 1   |
| 5 |   |    |     |    |   | 1  | 1   |

Матрица смежности для неориентированного графа составляется по правилу:  $\gamma_{ij} = 1$ , если из  $i$ -тая и  $j$ -тая вершины смежные.

Для графа, представленного на рис. 2, матрица смежности имеет вид:

|   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 |   |   |   |
| 3 | 1 | 1 |   | 1 |   |
| 4 | 1 |   | 1 |   | 1 |
| 5 | 1 |   |   | 1 |   |

Матрица смежности для неориентированного графа симметрична относительно главной диагонали. Степень  $i$ -той вершины равна сумме элементов по строке или по столбцу матрицы смежности.

Если в графе присутствуют как ребра, так и дуги, то он называется **смешанным**.

Если между двумя вершинами существует более чем 1 дуга или ребро, то такой граф называется **мультиграфом**.

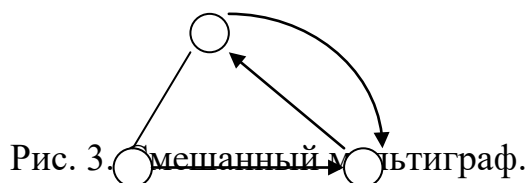
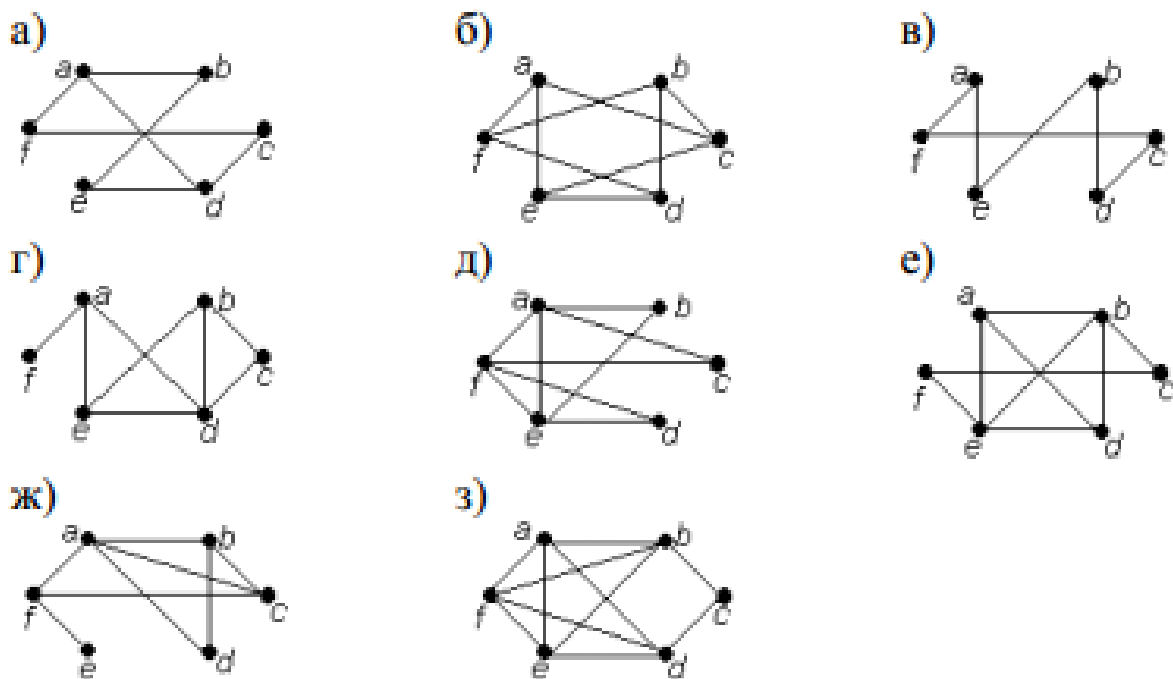


Рис. 3. Смешанный мультиграф.

Граф называется **связным**, если между любыми двумя вершинами которого существует путь (цепь).

## Содержание работы

**Задание.** Построить матрицу смежности для данного графа



## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7

Тема: «Работа машины Тьюринга»

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** научиться строить машину Тьюринга, составлять алгоритмы для нее.

**ОБОРУДОВАНИЕ:** справочные пособия.

### Справочный материал

Если для решения некоторой массовой проблемы известен алгоритм, то для его реализации необходимо лишь четкое выполнение предписаний этого алгоритма. Автоматизм, необходимый при реализации алгоритма, приводит к мысли о передаче функции человека, реализующий алгоритм, машине. Идею такой машины предложил в 1937 году английский математик А. Тьюринг.

Машина Тьюринга включает в себя:

1. **Внешний алфавит** - конечное множество символов  $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$

. В этом алфавите в виде слова кодируется та информация, которая подается в машину. Машина перерабатывает информацию, поданную в виде слова, в новое слово. Обычно символ **Внешний алфавит** - конечное множество символов  $a_0$  обозначает пробел.

2. **Внутренний алфавит** - конечное множество символов  $Q = \{q_0, q_1, q_2, \dots, q_m\}$ . Для любой машины число состояний фиксировано.

Два состояния имеют особое назначение  $q_1$  - начальное состояние машины,  $q_0$  - заключительное состояние (стоп-состояние).

3. **Операторы перемещения**  $T=\{Л, П, Н\}$ . Л, П, Н – это символы сдвига «влево», «вправо» и «на месте».
4. **Бесконечная лента** Бесконечная лента характеризует память машины. Она разбита на клеточки. В каждую клеточку может быть записан только один символ из внешнего алфавита.
5. **Управляющая головка**. Управляющая головка (УГ) передвигается вдоль ленты и может останавливаться напротив какой-либо клетки, т. е. считывать символ
6. **Управляющая головка**. Управляющая головка (УГ) передвигается вдоль ленты и может останавливаться напротив какой-либо клетки, т. е. считывать символ.

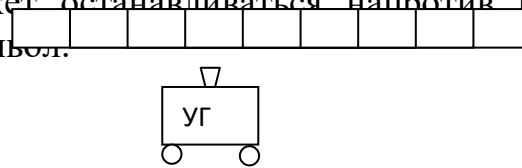


Рис. 1. Функциональная схема машины Тьюринга

7. **Программа машины Тьюринга (P)** - совокупность всех команд, Программа представляется в виде таблицы и называется **Тьюринговой функциональной схемой**.

|       | $a_0$       | $a_1$       | $a_2$       |
|-------|-------------|-------------|-------------|
| $q_1$ | $a_0 P q_1$ | $a_1 P q_1$ | $a_2 P q_2$ |
| $q_2$ | $a_1 P q_2$ | $a_2 H q_0$ | $a_0 H q_0$ |

Таким образом, машина Тьюринга может быть представлена в виде четверки:

$$MT = \langle A, Q, T, P \rangle$$

### Работа машины Тьюринга:

Информация, хранящаяся на ленте, является набором символов из внешнего алфавита. Начальное состояние управляющей головки характеризуется символом внутреннего алфавита  $q_1$ . Работа машины складывается из тактов. В течение любого такта машина Тьюринга осуществляет следующие действия: машина Тьюринга находится во внутреннем состоянии  $q_i$ , считывает входной символ  $a_j$  и по таблице работы совершает операцию сдвига  $t_l$ , переходя в состояние  $q_k$ , при этом входное слово  $a_j$  заменяется на  $a_m$ :

$$a_j q_i \rightarrow a_m t_l q_k$$

Если в результате операции машина перейдет в состояние  $q_0$ , то работа машины останавливается. Если состояние  $q_0$  недостижимо, то значит по данному входному слову машина Тьюринга не достигает конечного состояния и алгоритма для данного входного слова не существует.

### ПРИМЕР

Построить машину Тьюринга, которая будет стирать последнюю единицу в последовательности единиц.

Внешний алфавит -  $A = \{a_0, 1\}$ . Внутренний алфавит -  $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ , при этом состояние  $q_1$  сохраняется до тех пор, пока не будет найден конец последовательности единиц, состояние  $q_2$  - стирание последней единицы. При этом следует заметить, что ситуация  $a_0 q_2$  в работе машины Тьюринга невозможна, поэтому соответствующая клеточка доопределена произвольно, например  $a_0 \Pi q_2$ . Начальное состояние  $q_1$  на начале последовательности единиц. Рабочая программа машины Тьюринга имеет вид:

|       |             |               |
|-------|-------------|---------------|
|       | 1           | $a_0$         |
| $q_1$ | $1 \Pi q_1$ | $a_0 \Pi q_2$ |
| $q_2$ | $a_0 H q_0$ | $a_0 \Pi q_2$ |

Проверим работоспособность машины Тьюринга:

1.  $a_0 11 a_0$   
 $q_1$
2.  $a_0 11 a_0$   
 $q_1$
3.  $a_0 11 a_0$   
 $q_1$
4.  $a_0 11 a_0$   
 $q_2$
5.  $a_0 10 a_0$   
 $q_0$

### Содержание работы

#### Вариант 1

1. Что называют машиной Тьюринга?
2. Что называют словом в алфавите?

3. Используя прибавление единицы:  
 $001^n0 \rightarrow 01^{n+1}$   
 $q_10 \rightarrow q_20П, q_21 \rightarrow q_21П, q_20 \rightarrow q_31, q_31 \rightarrow q_31Л, q_30 \rightarrow q_00$ ,  
 определить в какое слово будет переработано машиной Тьюринга слово  $001^n0$  при  $n=2$ .
4. Используя левый сдвиг:  
 $01^x0 \rightarrow 01^x0$   
 $q_10 \rightarrow q_20Л, q_21 \rightarrow q_21Л, q_20 \rightarrow q_00$ ,  
 определить в какое слово будет переработано машиной Тьюринга слово  $01^x0$  при  $x=3$ .
5. По заданной машине Тьюринга и начальной конфигурации  $K_1$  найти заключительную конфигурацию.

|       | $\Lambda$       | 1               |
|-------|-----------------|-----------------|
| $q_1$ | $\Lambda Н q_0$ | $\Lambda П q_2$ |
| $q_2$ | $\Lambda П q_1$ | $1 Л q_2$       |

$K_1 = 1^2 q_1 1^3 01$ ,  $\Lambda$  – символ пустой ячейки.

## Вариант 2

1. Из чего состоит машина Тьюринга?
2. Что называют словом в алфавите?
3. Используя прибавление единицы:  
 $001^n0 \rightarrow 01^{n+1}$   
 $q_10 \rightarrow q_20П, q_21 \rightarrow q_21П, q_20 \rightarrow q_31, q_31 \rightarrow q_31Л, q_30 \rightarrow q_00$ ,  
 определить в какое слово будет переработано машиной Тьюринга слово  $001^n0$  при  $n=3$ .
4. Используя правый сдвиг:  
 $01^x0 \rightarrow 01^x0$   
 $q_10 \rightarrow q_20П, q_21 \rightarrow q_21П, q_20 \rightarrow q_00$ ,  
 определить в какое слово будет переработано машиной Тьюринга слово  $01^x0$  при  $x=2$ .
5. По заданной машине Тьюринга и начальной конфигурации  $K_1$  найти заключительную конфигурацию.

|       | $\Lambda$       | 1               |
|-------|-----------------|-----------------|
| $q_1$ | $\Lambda Н q_0$ | $\Lambda П q_2$ |
| $q_2$ | $\Lambda П q_1$ | $1 Л q_2$       |

$K_1 = 1 q_1 1^4$ ,  $\Lambda$  – символ пустой ячейки.

## **Информационное обеспечение обучения**

### **Печатные и электронные издания**

#### **Основные учебные издания:**

1. Седых И.Ю. Дискретная математика: учебное пособие / Седых И.Ю., Гребенщиков Ю.Б. — Москва: КноРус, 2021. — 329 с. — ISBN 978-5-406-05751-3. — URL: <https://book.ru/book/938234>
2. Щербина И.А. Дискретная математика: учеб. Пособие / И.А. Щербина. — Ростов н/Д: Феникс, 2020. — 125 с.: ил. — (Среднее профессиональное образование).

#### **Электронно-библиотечная система:**

3. ЭБС «IPRbooks», ООО «Ай Пи Ар Медиа»
4. ЭБС «Znanium»
5. ЭБС «PROFобразование»
6. ЭБС «Book.ru»