

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Саратовский государственный технический университет имени
Гагарина Ю.А.»

Филиал федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
«Саратовский государственный технический университет имени
Гагарина Ю.А.» в г.Петровске

УТВЕРЖДАЮ
Директор филиала СГТУ
имени Гагарина Ю.А. в г.Петровске
Е.А.Бесшапошникова
«05» июня 2024 г.



МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по дисциплине
ЕН.01 «Элементы высшей математики»

специальности
09.02.07 «Информационные системы и программирование»

Методические указания рассмотрены
на заседании предметной (цикловой) комиссии
общеобразовательных, ОГСЭ и ЕН дисциплин,
профессиональных модулей специальностей
социально-экономического профиля
«14» июня 2024 года, протокол № 12
Председатель ПЦК Мед /Медведева О.В./

Петровск 2024

Пояснительная записка

Методические указания по выполнению практических работ подготовлены на основе рабочей программы учебной дисциплины «Элементы высшей математики», разработанной на основе ФГОС СПО по специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование» и соответствующих общих (ОК) компетенций:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста.

При выполнении практических работ студент должен знать:

- основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии;
- основы дифференциального и интегрального исчисления;
- основы теории комплексных чисел.

При выполнении практических работ студент должен уметь:

- выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;
- решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости;
- применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- решать дифференциальные уравнения;
- пользоваться понятиями теории комплексных чисел.

Содержание практических занятий определено рабочей программой и тематическим планированием, соответствует теоретическому материалу изучаемых разделов учебной дисциплины.

Объём практических занятий по дисциплине определяется учебным планом по данной специальности.

Продолжительность практического занятия - 2 академических часа. Перед проведением практического занятия преподавателем организуется инструктаж, а по ее окончании – обсуждение итогов.

Комплект методических указаний по выполнению практических работ дисциплины «Элементы высшей математики» содержит 15 практических занятий.

**Перечень практических работ
по дисциплине «Элементы высшей математики»**

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1.

Тема: «Теория пределов».

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2.

Тема: «Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной».

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3.

Тема: «Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной».

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4.

Тема: «Интегральное исчисление функции одной действительной переменной».

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5.

Тема: «Дифференциальное исчисление функции нескольких действительных переменных».

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6.

Тема: «Интегральное исчисление функции нескольких действительных переменных».

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 7.

Тема: «Теория рядов».

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8.

Тема: «Обыкновенные дифференциальные уравнения».

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 9.

Тема: «Матрицы и определители».

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 10.

Тема: «Матрицы и определители».

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 11.

Тема: «Системы линейных уравнений».

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 12.

Тема: «Векторы и действия с ними».

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 13. Тема: «Аналитическая геометрия на плоскости».

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 14. Тема: «Аналитическая геометрия на плоскости».

ИНСТРУКЦИИ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

Прежде чем приступить к выполнению заданий, внимательно прочитайте данные рекомендации. Практические работы включают в себя задания следующих видов:

Решение математических задач.

Одних вопросов и советов преподавателя студенту недостаточно для обучения решению задач. Нельзя забывать, что "умение решать задачи есть искусство, приобретаемое практикой".

Вопросы и советы студенту условно можно подразделить на четыре группы. Нужно помнить что вопросы, рекомендуемые для первого этапа, окажут помощь и на втором этапе, а рекомендуемые для второго этапа - на третьем и т. п. Дело в том, что этапы решения задачи не могут быть строго изолированы один от другого, между ними существует определенная связь, в их единстве заключается процесс решения задачи.

1. Вопросы и советы для усвоения содержания задачи (1-й этап). Нельзя приступать к решению задачи, не уяснив четко, в чем заключается задание, т. е. не установив, каковы данные и искомые или посылки и заключения. **Первый совет:** не спешить начинать решать задачу. Этот совет не означает, что задачу надо решать как можно медленней. Он означает, что решению задачи должна предшествовать подготовка, заключающаяся в следующем:

- а) сначала следует ознакомиться с задачей, внимательно прочитав ее содержание. При этом схватывается общая ситуация, описанная в задаче;
- б) ознакомившись с задачей, необходимо вникнуть в ее содержание. При этом нужно следовать такому совету: выделить в задаче данные и искомые, а в задаче на доказательство - посылки и заключения.
- в) Если задача геометрическая или связана с геометрическими фигурами, полезно сделать чертеж к задаче и обозначить на чертеже данные и искомые г)
- В том случае, когда данные (или искомые) в задаче не обозначены, надо ввести подходящие обозначения. При решении текстовых задач алгебры и начал анализа вводят обозначения искомого или других переменных, принятых за искомые.

- д) Уже на первой стадии решения задачи, стадии понимания задания, полезно попытаться ответить на вопрос: "Возможно ли удовлетворить условию?" Не всегда сразу удастся ответить на этот вопрос, но иногда это можно сделать.

Отвечая на вопрос: "Возможно ли удовлетворить условию?", полезно выяснить, однозначно ли сформулирована задача, не содержит ли она избыточных или противоречивых данных. Одновременно выясняется, достаточно ли данных для решения задачи.

2. Составление плана решения задачи (2-й этап). Составление плана решения задачи является главным шагом на пути ее решения. Правильно составленный план решения задачи почти гарантирует правильное ее решение.

Но составление плана может оказаться сложным и длительным процессом. Поэтому попробуйте ответить на вопросы которые помогут вам лучше и быстрее составить план решения задачи, "открыть" идею ее решения:

а) Известна ли вам какая-либо родственная задача? Аналогичная задача? Если такая или родственная задача известна, то составление плана решения задачи не будет затруднительным. Но далеко не всегда известна задача, родственная решаемой. В этом случае может помочь в составлении плана решения совет.

б) Подумайте, известна ли вам задача, к которой можно свести решаемую. Если такая задача известна вам, то путь составления плана решения данной задачи очевиден: свести решаемую задачу к решенной ранее. Может оказаться, что родственная задача неизвестна вам и вы не можете свести данную задачу к какой-либо известной. План же сразу составить не удастся.

Стоит воспользоваться советом: "Попробуйте сформулировать задачу иначе". Иными словами, попробуйте перефразировать задачу, не меняя ее математического содержания.

При переформулировании задачи пользуйтесь либо определениями данных в ней математических понятий (заменяют термины их определениями), либо их признаками (точнее сказать, достаточными условиями). Надо отметить, что способность учащегося переформулировать текст задачи является показателем понимания математического содержания задачи.

Переформулировка задачи это перевод ее на язык математики, т. е. язык алгебры, геометрии или анализа. Это, скорее, формализация задачи, "математизация" ее. К такому приему и приходится часто прибегать при решении многих текстовых задач.

г) Составляя план решения задачи, всегда следует задавать себе вопрос: "Все ли данные задачи использованы?" Выявление неучтенных данных задачи облегчает составление плана ее решения.

д) При составлении плана задачи иногда бывает полезно следовать совету: "Попробуйте преобразовать искомые или данные". Часто преобразование искомого или данных способствует более быстрому составлению плана решения. При этом искомые преобразуют так, чтобы они приблизились к данным, а данные - так, чтобы они приблизились к искомым. Так, при каждом случае тождественных преобразований данные преобразуются, постепенно приближаясь к результату (искомому). Аналогично уравнение, систему уравнений, неравенство или систему неравенств преобразуют в равносильные, чтобы найти их корни или множество решений.

е) Нередко случается так, что, вы все же не можете составить план ее решения. Тогда может помочь еще один совет: "Попробуйте решить лишь часть задачи", т. е. попробуйте сначала удовлетворить лишь части условий, с тем чтобы далее искать способ удовлетворить оставшимся условиям задачи.

ж) Нередко в составлении плана решения задачи помогает ответ на вопрос: "Для какого частного случая возможно достаточно быстро решить эту задачу?" Обнаружив такой частный случай, вы ставите перед собой новую цель - воспользоваться решением задачи в найденном частном случае для более общего (но, может быть, не самого общего) случая. Так можно поступить,

постепенно обобщая задачу до исходной, решаемой задачи. Предполагаемый вариант рассуждений - явное применение полной индукции. Итак, совет: "Рассмотрите частные случаи задачной ситуации, решите задачу для какого-нибудь частного случая, примените индуктивные рассуждения".

3. Реализация плана решения задачи (3-й этап). План указывает лишь общий контур решения задачи. При реализации плана решающий задачи рассматриваются все детали, которые вписываются в этот контур. Эти детали надо рассматривать тщательно и терпеливо. Но при этом (решающему задачу) полезно следовать некоторым советам:

а) Проверяйте каждый свой шаг, убеждайтесь, что он совершен правильно. Иными словами, нужно доказывать правильность каждого шага ссылками на соответствующие, известные ранее математические факты, предложения.

б) При реализации плана поможет и совет: "Замените термины и символы их определениями". Так, термин "параллелограмм" заменяется его определением: "Четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны", термин "предел числовой последовательности" для доказательства, например, того предложения, что предел суммы двух последовательностей, имеющих пределы, равен сумме пределов этих последовательностей, можно заменить, и вполне успешно, его определением.

в) При решении некоторых задач помогает совет: "Воспользуйтесь свойствами данных в условии объектов".

4. Анализ и проверка правильности решения задачи (4-й этап). Даже очень хорошие студенты, получив ответ и тщательно изложив ход решения, считают задачу решенной. А ведь получение результата не означает еще, что задача решена правильно. Тем более не означает, что для решения выбран лучший, наиболее удачный, изящный, если можно так выразиться, вариант. По В. М. Брадису, задачу можно считать решенной, если найденное решение:

- безошибочно,
- обоснованно,
- имеет исчерпывающий характер.

Поэтому анализ решения задачи, проверка решения и достоверности результата должны быть этапом решения задачи. Итак, два совета: "Проверьте результат", "Проверьте ход решения". Проверка результата может производиться различными способами. Проверая правильность хода решения, мы тем самым убеждаемся и в правильности результата. Значит, надо выполнить совет: "Проверьте все узловые пункты решения", еще раз убедитесь в истинности проведенных рассуждений.

Второй способ проверки результата заключается в получении того же результата применением другого метода решения задачи, поэтому полезно всегда задавать решающему вопрос: "Нельзя ли тот же результат получить иначе?" Иными словами, стоит последовать совету: "Решите задачу другим способом". Если при решении задачи другим способом получен тот же результат, что и в первом случае, задачу можно считать решенной правильно. К тому же получение различных вариантов решения одной и той же задачи имеет важное обучающее значение.

Выполнение контрольных работ.

1. При подготовке к любой контрольной работе рекомендуется сначала внимательно разобраться с теоретическим материалом по учебнику, затем закрепить свои знания, решая задачи.
2. Подготовиться к работе означает: вы внимательно просматриваете тексты задач и прикидываете, какие из предложенных задач вам по силам и выполняете их в первую очередь.
3. Если вы переоценили свои силы — взяли трудную задачу — и не решили, то не отчаивайтесь. Дома в спокойной обстановке разберитесь, в чем причина вашей неудачи, и решите эту же задачу.
4. Если у вас пока нет большой любви к определенной дисциплине, и вас нервируют трудные задачи, то не расстраивайтесь: для начала выберите задачи начального уровня. Решая самые простые задачи, вы постепенно приобретаете уверенность в своих силах.
5. Если вы успешно решили легкую задачу на уроке, то попросите у преподавателя более трудную задачу. Если на уроке не успели, то обратитесь к преподавателю с просьбой дать вам возможность решить более трудную задачу во внеурочное время.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1

Тема: «Теория пределов»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться вычислять пределы функций.

ОБОРУДОВАНИЕ: справочные пособия.

Справочный материал

Значение теории пределов для математики трудно переоценить — это центральное понятие математического анализа, на основе которого формируются понятия производной, дифференциала и интеграла. Но предел нашел применение не только в математике. Предельный анализ в экономике исследует изменяющиеся величины затрат или результатов при изменении объемов производства или потребления на основе анализа их предельных значений. Задачи на темы: рост вклада, рост населения страны, распад радиоактивного вещества, размножение бактерий решаются с помощью второго замечательного предела.

Но такое признание теория пределов имела не всегда. В 17 веке известный математик Мишель Ролль писал, что эта наука есть коллекция гениальных ошибок. А великий французский мыслитель - Вольтер заметил, что исчисление пределов представляет собой искусство вычислять и точно измерять вещи, существование которых не может быть доказано. Начальный период развития новых ветвей математики, связанных с понятиями функции,

бесконечно малых величин, пределов и производных, был охарактеризован Марксом как «мистический».

Многие десятилетия величайшие математики, в том числе Ньютон и Лейбниц, предпринимали попытки дать строгое определение предела. Но лишь в 19 веке великому французскому математику Огюстену Луи Коши удалась это сделать.

ТОЧКИ РАЗРЫВА И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

1) Какие точки называются точками разрыва функции?

Точки, в которых нарушается непрерывность функции называются точками разрыва.

Если $x = x_0$ – точка разрыва функции, то в этой точке не выполняется хотя бы одно условие непрерывности:

- 1) Функция определена в окрестности x_0 , но не определена в самой точке x_0 .
- 2) Функция определена в точке x_0 и в ее окрестности, но не существует предела функции в этой точке.
- 3) Функция определена в точке x_0 и в ее окрестности, существует предел функции в точке x_0 , но этот предел не равен значению функции в этой точке.

2) В каком случае мы говорим о точке разрыва первого рода?

В точке x_0 функция имеет **устранимый разрыв первого рода**, если односторонние пределы равны, но они не равны значению функции в точке, то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$$

В точке x_0 функция имеет **неустранимый разрыв первого рода**, если односторонние пределы НЕ равны, то есть $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$. Точку x_0 в этом случае называют точкой скачка функции. Скачок равен модулю разности значений односторонних пределов.

3) Какая точка называется точкой разрыва второго рода или точкой бесконечного разрыва?

В точке x_0 функция имеет **разрыв второго рода**, если по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

Таким образом, при исследовании функции на непрерывность следует:

- 1) найти область определения функции;
- 2) установить точки, в которых функция терпит разрыв;
- 3) вычислить односторонние пределы в точках разрыва;
- 4) указать характер разрыва функции в точке.

ПРИМЕРЫ

1. Вычислить пределы

1. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 7}{9x^2 + 2x - 5}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^4 + 1}}{x - 2}$.
2. а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\operatorname{tg} 4x}$.
3. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 5x})$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x + 5}\right)^{2x}$.
4. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \sin^2 x}{\sin 2x - x^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg}(x - 2)}{x^2 - 4}$.

2. Исследовать функцию на непрерывность, определить характер разрыва:

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x \leq 4, \\ 4x, & x > 4. \end{cases}$$

3. Решить неравенство $\frac{\log_2(x-3) \cdot \log_3(x-8)}{x-12} \geq 0$.

4. Найти корни уравнения $x^3 + x^2 - 1 = 0$ на отрезке $[0; 1]$ с точностью до 0,1.

РЕШЕНИЕ

1. Вычислить пределы:

$$1. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 7}{9x^2 + 2x - 5} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(5 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2})}{x^2(9 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2})} = \frac{5}{9};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^4 + 1}}{x - 2} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}{x^2(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2})} = \infty.$$

$$2. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)(x-2)}{x(x-2)} = -\frac{1}{2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\operatorname{tg} 4x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 8x \cdot 8x \cdot 4x}{\operatorname{tg} 4x \cdot 8x \cdot 4x} = 2.$$

$$3. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 5x}) = \{\infty - \infty\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 - 5x}{x + \sqrt{x^2 + 5x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x}{x + \sqrt{x^2 + 5x}} = -\frac{5}{2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x+5} \right)^{2x} = \{1^\infty\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x+5}{3}} \right)^{\frac{x+5}{3} \cdot \frac{3}{x+5} \cdot 2x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{x+5}} = e^6.$$

$$4. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \sin^2 x}{\sin 2x - x^2} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x + x^2}{2x - x^2} = \frac{3}{2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg}(x-2)}{x^2 - 4} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4}.$$

2. Исследовать функцию на непрерывность, определить характер разрыва,

изобразить схематично график функции $f(x) = \begin{cases} x+3, & x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x \leq 4, \\ 4x, & x > 4. \end{cases}$

1) $D(f) = \mathbb{R}$.

2) Разрывы могут быть лишь в точках $x_0 = 0$ или $x_0 = 4$.

3) Найдем односторонние пределы слева и справа от этих точек, а также значения исходной функции в этих точках.

$x_0 = 0$:

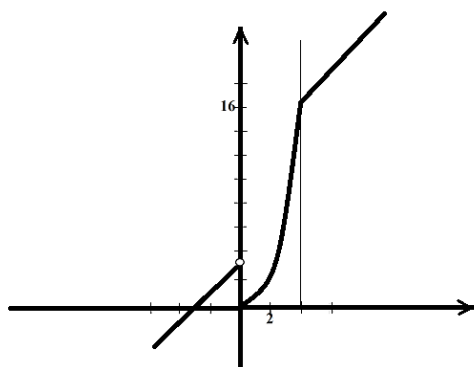
$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} (x+3) = 3; \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} x^2 = 0.$$

Так как $\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x)$, то в точке $x_0 = 0$ функция имеет неустранимый разрыв 1 рода. Скачок равен 3.

$x_0 = 4$:

$$\lim_{x \rightarrow 4-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4-0} x^2 = 16; \quad \lim_{x \rightarrow 4+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4+0} 4x = 16. \text{ Кроме того } f(4) = 16, \text{ значит в точке}$$

$x_0 = 4$ функция непрерывна.



3. Решить неравенство $\frac{\log_2(x-3) \cdot \log_3(x-8)}{x-12} \geq 0$.

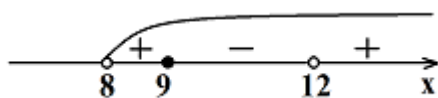
Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\log_2(x-3) \cdot \log_3(x-8)}{x-12}$. Эта функция представляет собой произведение и частное непрерывных функций на их области определения, а значит, также непрерывна при $x \neq 12$.

2) $D(f) = (8; 12); (12; \infty)$

3) Нули функции:

$x = 4$ (не входит в область определения функции); $x = 9$.

Нули функции и точки разрыва функции разбивают область определения функции на промежутки, на каждом из которых функция непрерывна, не обращается в нуль, а значит знакопостоянна.



$(8; 9]; (12; \infty)$

Ответ: $(8; 9]; (12; \infty)$

4. Найти корни уравнения $x^3 + x^2 - 1 = 0$ на отрезке $[0; 1]$ с точностью до 0,1.

1) Проверим принимает ли функция на этом отрезке разные по знаку значения:

$$y(0) = -1 < 0, \quad y(1) = 1 > 0.$$

2) Разобьем отрезок $[0; 1]$ на более мелкие отрезки и составим таблицу:

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$f(x)$	-1	-0,952	-0,776	-0,424	0,152	1

Вывод: так как функция меняет знак на отрезке $[0,6; 0,8]$, то корень уравнения с точностью до 0,1 будет равен $x = 0,7$.

Ответ: $x = 0,7$

5. Найти асимптоты графика функции $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 5}{x - 6}$.

1) $D(f) = (-\infty; 6); (6; +\infty)$.

2) $x = -6$ – вертикальная асимптота.

3) $y = x + 9$ – наклонная асимптота.

Содержание работы

1. Вычислить пределы: а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 1}{3x^2 - x + 1} \right)^{3x+4}$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x-3} - 3}{x^2 - 9}$.

2. Исследовать функцию на непрерывность, установить характер разрыва,

изобразить схематично график функции $f(x) = \begin{cases} x + 4, & x < -1, \\ x^2, & -1 \leq x < 1, \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$

3. Решить неравенство $(x^2 - 4x)(\log_{\frac{1}{2}}(3 - x) + 1) \leq 0$.

4. Доказать, что уравнение $x^3 - 3x + 1 = 0$ имеет корень на отрезке $[0; 1]$ и найти его с точностью до 0,1.

5. Найти асимптоты графика функции $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2

Тема: «Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться вычислять производные высших порядков.

ОБОРУДОВАНИЕ: таблицы производных некоторых функций.

Справочный материал

Производная сложной функции.

Теорема. Пусть $y = f(x)$; $u = g(x)$, причем область значений функции u входит в область определения функции f .

Тогда $y' = f'(u) \cdot u'$

Доказательство.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

(с учетом того, что если $\Delta x \rightarrow 0$, то $\Delta u \rightarrow 0$, т.к. $u = g(x)$ – непрерывная функция)

$$\text{Тогда } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Теорема доказана.

Логарифмическое дифференцирование.

Рассмотрим функцию $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{при } x > 0 \\ \ln(-x), & \text{при } x < 0 \end{cases}$.

Тогда $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, т.к. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(\ln(-x))' = \frac{(-x)'}{x} = \frac{1}{x}$.

Учитывая полученный результат, можно записать $(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Отношение $\frac{f'(x)}{f(x)}$ называется **логарифмической производной** функции $f(x)$.

Способ **логарифмического дифференцирования** состоит в том, что сначала находят логарифмическую производную функции, а затем производную самой функции по формуле

$$f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x)$$

Способ логарифмического дифференцирования удобно применять для нахождения производных сложных, особенно показательных функций, для которых непосредственное вычисление производной с использованием правил дифференцирования представляется трудоемким.

Производная показательно-степенной функции.

Функция называется показательной, если независимая переменная входит в показатель степени, и степенной, если переменная является основанием. Если же и основание и показатель степени зависят от переменной, то такая функция будет показательно – степенной.

Пусть $u = f(x)$ и $v = g(x)$ – функции, имеющие производные в точке x , $f(x) > 0$.

Найдем производную функции $y = u^v$. Логарифмируя, получим:

$$\begin{aligned} \ln y &= v \ln u \\ \frac{y'}{y} &= v' \ln u + v \frac{u'}{u} \\ y' &= u^v \left(v \frac{u'}{u} + v' \ln u \right) \end{aligned}$$

$$(u^v)' = v u^{v-1} u' + u^v v' \ln u$$

Пример. Найти производную функции $f(x) = (x^2 + 3x)^{x \cos x}$

По полученной выше формуле получаем: $u = x^2 + 3x$; $v = x \cos x$,

Производные этих функций: $u' = 2x + 3$; $v' = \cos x - x \sin x$,

Окончательно:

$$f'(x) = x \cos x \cdot (x^2 + 3x)^{x \cos x - 1} \cdot (2x + 3) + (x^2 + 3x)^{x \cos x} (\cos x - x \sin x) \ln(x^2 + 3x)$$

Производная обратных функций.

Пусть требуется найти производную функции $y = f(x)$ при условии, что обратная ей функция $x = g(y)$ имеет производную, отличную от нуля в соответствующей точке.

Для решения этой задачи дифференцируем функцию $x = g(y)$ по x :

$$1 = g'(y) y'$$

т.к. $g'(y) \neq 0$

$$y' = \frac{1}{g'(y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

т.е. производная обратной функции обратна по величине производной данной функции.

Пример. Найти формулу для производной функции \arctg .

Функция \arctg является функцией, обратной функции tg , т.е. ее производная может быть найдена следующим образом:

$$y = \operatorname{tg} x, \quad x = \arctg y,$$

$$\text{Известно, что } y' = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

По приведенной выше формуле получаем:

$$y' = \frac{1}{d(\arctg y) / dx}; \quad \frac{d(\arctg y)}{dy} = \frac{1}{1 / \cos^2 x}$$

Т.к. $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + y^2$; то можно записать окончательную формулу для производной арктангенса:

$$(\arctg y)' = \frac{1}{1 + y^2};$$

Таким образом получены все формулы для производных арксинуса, арккосинуса и других обратных функций, приведенных в таблице производных.

Дифференциал функции.

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Тогда можно записать: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \rightarrow 0$, при $\Delta x \rightarrow 0$.

Следовательно: $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Величина $\alpha \Delta x$ - бесконечно малая более высокого порядка, чем $f'(x) \Delta x$, т.е. $f'(x) \Delta x$ - главная часть приращения Δy .

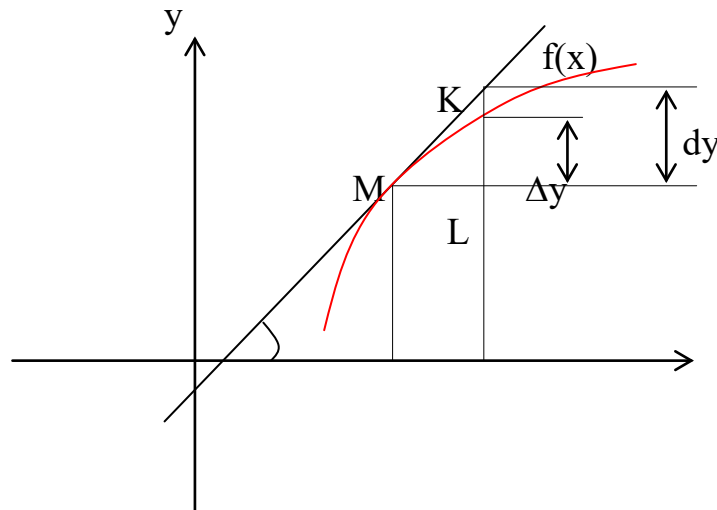
Определение. Дифференциалом функции $f(x)$ в точке x называется главная линейная часть приращения функции.

Обозначается dy или $df(x)$.

Из определения следует, что $dy = f'(x)\Delta x$ или
$$dy = f'(x)dx.$$

Можно также записать: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$

Геометрический смысл дифференциала.



Из треугольника ΔMKL : $KL = dy = \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta x = y' \cdot \Delta x$

Таким образом, дифференциал функции $f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в рассматриваемой точке.

Свойства дифференциала.

Если $u = f(x)$ и $v = g(x)$ - функции, дифференцируемые в точке x , то непосредственно из определения дифференциала следуют следующие свойства:

- 1) $d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$
- 2) $d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = vdu + u dv$
- 3) $d(Cu) = Cdu$
- 4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$

Дифференциал сложной функции.

Инвариантная форма записи дифференциала.

Пусть $y = f(x)$, $x = g(t)$, т.е y - сложная функция.

Тогда

$$dy = f'(x)g'(t)dt = f'(x)dx.$$

Видно, что форма записи дифференциала dy не зависит от того, будет ли x независимой переменной или функцией какой- то другой переменной, в связи

с чем эта форма записи называется **инвариантной формой записи дифференциала**.

Однако, если x - независимая переменная, то

$$dx = \Delta x, \text{ но}$$

если x зависит от t , то $\Delta x \neq dx$.

Таким образом форма записи $dy = f'(x)\Delta x$ не является инвариантной.

Пример. Найти производную функции $y = x \cos x \sin x + \frac{1}{2} \cos^2 x$.

Сначала преобразуем данную функцию: $y = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos^2 x$

$$y' = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} x 2 \cos 2x + \frac{1}{2} 2 \cos x (-\sin x) = \frac{1}{2} \sin 2x + x \cos 2x - \sin x \cos x = x \cos 2x$$

Пример. Найти производную функции $y = \frac{x^2 e^{x^2}}{x^2 + 1}$.

$$y' = \frac{(2x e^{x^2} + x^2 2x e^{x^2})(x^2 + 1) - (2x) x^2 e^{x^2}}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 e^{x^2} + 2x^5 e^{x^2} + 2x e^{x^2} + 2x^3 e^{x^2} - 2x^3 e^{x^2}}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{2x e^{x^2} (x^4 + 1 + x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

Пример. Найти производную функции $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{x}{\sin x}$

$$y' = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} - \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - \sin x + x \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{x \cos x}{\sin^2 x}$$

Пример. Найти производную функции $y = \operatorname{arctg} \frac{2x^4}{1 - x^8}$

$$y' = \frac{1}{\left(1 + \frac{4x^8}{(1 - x^8)^2}\right)} \cdot \frac{8x^3(1 - x^8) - (-8x^7)2x^4}{(1 - x^8)^2} = \frac{(1 - x^8)^2(8x^3 - 8x^{11} + 16x^{11})}{(1 + x^8)^2(1 - x^8)^2} = \frac{8x^3 + 8x^{11}}{(1 + x^8)^2} =$$

$$= \frac{8x^3(1 + x^8)}{(1 + x^8)^2} = \frac{8x^3}{1 + x^8}$$

Пример. Найти производную функции $y = x^2 e^{x^2} \ln x$

$$y' = (x^2 e^{x^2})' \ln x + x^2 e^{x^2} \frac{1}{x} = (2x e^{x^2} + x^2 e^{x^2} 2x) \ln x + x e^{x^2} = 2x e^{x^2} (1 + x^2) \ln x + x e^{x^2} =$$

$$= x e^{x^2} (1 + 2 \ln x + 2x^2 \ln x)$$

Содержание работы

Задание. Найти производные функций:

- 1) $y = \cos x \cdot 5^x$; 2) $y = \frac{x^2+x+1}{2x^3+1}$;
 3) $y = (e^{\arctg x} + \cos^4 x)^3$; 4) $y = \ln[\sin(x^5 + 2x + 1)]$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3

Тема: «Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться вычислять производные высших порядков.

ОБОРУДОВАНИЕ: таблицы производных некоторых функций.

Содержание работы

Задание.

1. Найдите производную функции: $f(x) = \frac{x^3}{6} - 0,5x^2 - 3x + 2$, вычислите ее значение при $x = -1$.
2. Найдите $f'(x)$, если $f(x) = x\sqrt{x}$.
3. Найдите производную функции $g(x) = \frac{3}{5-4x}$.
4. Найдите значение $f'(0,5)$, если $f(x) = \frac{3}{5-4x}$.
5. Решите уравнение: $f'(x) = 0$, если $f(x) = 4x + \frac{8}{x}$.
6. Решите неравенство: $g'(x) < 0$, если $g(x) = (x - 3)(x + 2)^2$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4

Тема: «Интегральное исчисление функции одной действительной переменной»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться вычислять определенный интеграл.

ОБОРУДОВАНИЕ: таблицы первообразных некоторых функций.

Справочный материал

ПРИМЕР 1. Вычислите интеграл $\int_{-2}^2 (-4x + 4 + x^2) dx$.

РЕШЕНИЕ. Найдем множество всех первообразных для функции $-4x + 4 + x^2$:

$$F(x) = -4 \cdot \frac{x^2}{2} + 4 \cdot x + \frac{x^3}{3} + C = -2x^2 + 4x + \frac{x^3}{3} + C.$$

Пользуясь формулой Ньютона-Лейбница, получаем:

$$\int_{-2}^2 (-4x + 4 + x^2) dx = \left(-2x^2 + 4x + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^2 = \left(-2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + \frac{2^3}{3} \right) - \left(-2 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + \frac{(-2)^3}{3} \right) =$$

$$= \left(-8 + 8 + \frac{8}{3}\right) - \left(-8 - 8 - \frac{8}{3}\right) = 21\frac{1}{3}.$$

О т в е т: $21\frac{1}{3}$.

ПРИМЕР 2. Выясните, при каком отрицательном значении переменной a верно равенство

$$\int_{-2a}^a 2x^3 dx = -7,5?$$

РЕШЕНИЕ. Поскольку для $2x^3$ одной из первообразных является $\frac{x^4}{2}$,

$$\int_{-2a}^a 2x^3 dx = \left(\frac{x^4}{2}\right) \Big|_{-2a}^a = \frac{a^4}{2} - \frac{(-2a)^4}{2} = -\frac{15a^4}{2}.$$

Следовательно, нужно решить уравнение:

$$-\frac{15a^4}{2} = -7,5,$$

$$-\frac{15a^4}{2} = -\frac{15}{2},$$

$$a^4 = 1,$$

$$a = \pm 1.$$

Отрицательный корень этого уравнения – это число -1 .

О т в е т: -1 .

Содержание работы

Вариант 1

- Вычислите интегралы: а) $\int_{-1}^2 x^2 dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{12}} (1 + \cos 2x) dx$.
- Докажите справедливость равенства: $\int_0^1 (2x+1) dx = \int_0^2 (x^3 - 1) dx$.

Вариант 2

- Вычислите интегралы: а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} -2 \sin x dx$; б) $\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$.
- Докажите справедливость равенства: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \int_0^{\sqrt[3]{3}} x^2 dx$.

Вариант 3

1. Вычислите интегралы: а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$; б) $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)^2}$.
2. Докажите справедливость равенства: $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = \int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Вариант 4

1. Вычислите интегралы: а) $\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{2x}{9}\right)}$.
2. Докажите справедливость равенства: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_0^1 dx$.

Вариант 5

1. Вычислите интегралы: а) $\int_{-1}^2 -x^3 dx$; б) $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) dx$
2. Верно ли неравенство: $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x} < \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^2}$?

Вариант 6

1. Вычислите интегралы: а) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} -\frac{dx}{\sin^2 x}$; б) $\int_0^2 (1+3x)^4 dx$.
3. Верно ли неравенство: $\int_{-1}^1 x^4 dx < \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$?

Вариант 7

1. Вычислите интегралы: а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos x dx$; б) $\int_2^7 \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$.
2. Верно ли неравенство: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} > \int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$?

Вариант 8

1. Вычислите интегралы: а) $\int_1^5 x^4 dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$.
- Верно ли неравенство: $\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx > \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{x^2}$?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5

Тема: «Дифференциальное исчисление функции нескольких действительных переменных»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться вычислять частные производные первого порядка.

ОБОРУДОВАНИЕ: таблицы первообразных некоторых функций.

Справочный материал

Частные производные первого порядка

Пусть задана функция $z = f(x, y)$. Так как x и y – независимые переменные, то одна из них может изменяться, а другая сохранять свое значение.

Если переменной x дать некоторое приращение Δx , а y оставить постоянной, то функция $z = f(x, y)$ получит приращение $\Delta_x z$, называемое *частным приращением функции z по переменной x* :

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Аналогично, если переменная y получает приращение Δy , а x остается постоянной, то частное приращение функции z по переменной y :

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Если существуют пределы:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = f'_x(x, y),$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = f'_y(x, y),$$

они называются *частными производными функции $z = f(x, y)$ по переменным x и y* соответственно.

Аналогично определяются частные производные функций любого числа независимых переменных.

Так как частная производная по любой переменной является производной по этой переменной, найденной при условии, что остальные переменные – постоянны, то все правила и формулы дифференцирования функций одной переменной применимы для нахождения частных производных функций любого числа переменных.

Пример. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

$$1) z = x^2 + 3xy + 4y^2 \quad ; \quad 2) u = \sin(3x + 5y - 4z) \quad ; \quad 3) z = \cos y + (y - x)\sin y.$$

Решение.

1) Функция $z = f(x, y)$ – функция двух независимых переменных x и y . Определяя частную производную данной функции по переменной x , вторую независимую переменную y будем рассматривать как величину постоянную.

Дифференцируя, получаем $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y$. Аналогично, отыскивая $\frac{\partial z}{\partial y}$, получим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 8y.$$

2) Функция $u(x, y, z)$ – функция трех независимых переменных x, y и z . При определении частной производной по каждой из этих переменных две другие считаем величинами постоянными. Получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3 \cos(3x + 5y - 4z) ; \frac{\partial u}{\partial y} = 5 \cos(3x + 5y - 4z) ; \frac{\partial u}{\partial z} = -4 \cos(3x + 5y - 4z)$$

3) Функция $z = f(x, y)$ есть функция двух независимых переменных x, y .

При дифференцировании по каждой из них вторую переменную рассматриваем как величину постоянную. Поэтому $\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin y ; \frac{\partial z}{\partial y} = -\sin y + \sin y + (y - x) \cos y$.

Содержание работы

1. Найти частные производные первого порядка функций:

а) $f(x, y) = x^2 \sin y$;

б) $f(x, y) = e^{xy}$;

в) $f(x, y) = \ln \cos(xy)$.

2. Найти полный дифференциал первого порядка функций:

а) $f(x, y) = \sin(xy)$;

б) $f(x, y, z) = x^{yz}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6

Тема: «Интегральное исчисление функции нескольких действительных переменных»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться вычислять двойные интегралы.

ОБОРУДОВАНИЕ: справочные пособия.

Справочный материал

Определение двойного интеграла. Пусть в замкнутой ограниченной области D плоскости xOy определена непрерывная функция $z = f(x, y)$. Разобьем области D произвольным образом на n частичных областей с площадями $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$. В каждой i -й элементарной области ΔS_i выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i)$, умножим значение функции в этой точке $f(x_i, y_i)$ на площадь ΔS_i соответствующей области и составим сумму этих произведений, т.е.

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i,$$

которая называется *интегральной суммой* функции $f(x, y)$ в области D. *Двойным интегралом* функции $f(x, y)$ по области D называется предел этой суммы:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i = \iint_D f(x, y) dS,$$

где λ - наибольший из диаметров элементарных областей ΔS_i . Функция $z = f(x, y)$, для которой предел существует и конеч, называется *интегрируемой* в этой области. В прямоугольных координатах дифференциал площади $dS = dx dy$, тогда двойной интеграл примет вид:
 $I = \iint_D f(x, y) dx dy.$

Если $f(x, y) > 0$, то двойной интеграл функции $z = f(x, y)$ по области D равен объёму тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, сбоку цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz, а направляющей служит контур фигуры D, и снизу плоскостью $z=0$.

Основные случаи вычисления двойного интеграла в прямоугольных координатах.

1) Если область D, в которой рассматривается двойной интеграл (8), есть прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям и заданными уравнениям $x = a, x = b (a \leq x \leq b), y = c, y = d (c \leq y \leq d)$, то двойной интеграл вычисляется по одной из формул (9) или (10)

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

Интегралы в правых частях формул и $\int_c^d f(x, y) dy$ называется *повторными* (или *двукратными*), а интегралы $\int_a^b f(x, y) dx$ и $\int_c^d f(x, y) dy$ называются *внутренними*.

Под символом $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$ в формуле подразумевается дважды произведённое интегрирование. Первое интегрирование (внутреннее) по переменной y совершается в пределах от c до d в предположении, что x остаётся постоянным; результат интегрируется по переменной x в пределах от a до b.

Если вычисление двойного интеграла выполняется по формуле, то порядок интегрирования меняется внутренний интеграл вычисляется по переменной x, причём y сохраняет постоянное значение, а внешние (повторное) интегрирование производится по переменной y.

2) Если область D такова, что любая прямая, проходящая внутри этой области и параллельная оси Oy, пересекает её границу в двух точках, то эта область называется *простой относительно оси Ox* и определяется системой

неравенства вида: $a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$. В этом случае двойной интеграл выражается через повторный интеграл по формуле:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

3) Если граница области пересекается в двух точках всякой прямой, проходящей внутри этой области и параллельной оси Ох, то эта область называется простой относительно оси Оу и определяется системой неравенства вида: $c \leq y \leq d, \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)$.

В этом случае двойной интеграл выражается формулой

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx,$$

где интегрирование сначала выполняется по переменной x , а затем по переменной y .

4) Если нижняя или верхняя линии границы состоят из нескольких участков, имеющих различные уравнения, то область D , необходимо разбить прямыми, параллельными оси Оу, на такие части, чтобы каждый из участков выражался одним уравнением. В этом случае вычислении двойного интеграла сводится к вычислению двух (и более) повторных интегралов.

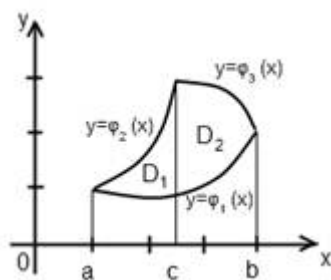
В случае, изображенном на рисунке 5, область D_1 определяется системой неравенств $a \leq x \leq c, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$, а область D_2 - системой неравенств $c \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_3(x)$ и, значит,

$$\begin{aligned} \iint_D f dx dy &= \iint_{D_1} f dx dy + \iint_{D_2} f dx dy = \\ &= \int_a^c dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f dy + \int_c^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} f dy \end{aligned}$$

Пример 1. Вычислить повторный интеграл $\int_1^3 dx \int_2^{x^2+4} \frac{1}{x^2} dy$.

Решение. Согласно формуле $\int_1^3 dx \int_2^{x^2+4} \frac{1}{x^2} dy = \int_1^3 \left[\int_2^{x^2+4} \frac{1}{x^2} dy \right] dx$.

Вычислим сначала внутренний интеграл по переменной y , считая x постоянным:



$$\int_2^{x^2+4} \frac{1}{x^2} dy = \frac{1}{x^2} \int_2^{x^2+4} dy = \frac{1}{x^2} [y]_2^{x^2+4} = \frac{1}{x^2} (x^2 + 4 - 2) = 1 + 2x^{-2}.$$

Теперь вычислим внешний интеграл по переменной x , подставив в него

полученное выражение:
$$\int_1^3 (1 + 2x^{-2}) dx = \left[x - \frac{2}{x} \right]_1^3 = \left(3 - \frac{2}{3} \right) - (1 - 2) = 3\frac{1}{3}.$$

Пример 2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x + y) dx dy$ по области D , ограниченной прямыми $x=2$, $x=6$, $y=1$, $y=4$.

Решение. Область D , изображенная на рисунке, является простой относительно осей Ox и Oy .

Сначала вычислим двойной интеграл по формуле:

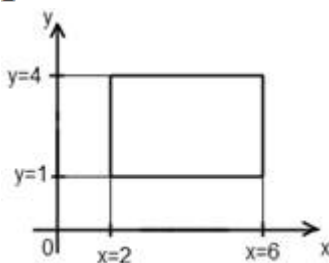
$$\iint_D (x + y) dx dy = \int_2^6 dx \int_1^4 (x + y) dy$$

Вычислив внутренний интеграл по переменной y при постоянном x , находим:

$$\int_1^4 (x + y) dy = \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_1^4 = (4x + 8) - \left(2x + \frac{1}{2} \right) = 3x + \frac{15}{2}.$$

Подставив это выражение во внешний интеграл, получим

$$\int_2^6 \left(3x + \frac{15}{2} \right) dx = \left[\frac{3x^2}{2} + \frac{15}{2}x \right]_2^6 = 78.$$



Теперь вычислим двойной интеграл по формуле $\iint_D (x + y) dx dy =$

$$= \int_1^4 dy \int_2^6 (x + y) dx.$$

Найдём

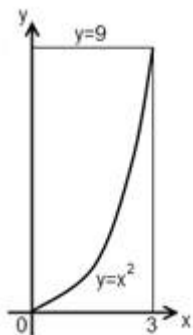
внутренний

интеграл:
$$\int_2^6 (x + y) dx = \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_2^6 = (18 + 6y) - (2 + 2y) = 4y + 16.$$

Далее найдём внешний интеграл: $\int_1^4 (4y + 16) dy = [2y^2 + 16y]_1^4 = 78$, т.е. получим тот же ответ.

Содержание работы

1. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x^2 - y) dx dy$ по области D, заданной системой неравенств $0 \leq x \leq 3; x^2 \leq y \leq 9$.



2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D \frac{y}{x} dx dy$ по области D, заданной линиями $x=1, x=4, y=x$ и $y=\sqrt{x}$.

3. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x + 2y) dx dy$ по области D, ограниченной линиями $y=x, y=4x$ и $y=\frac{4}{x}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 7

Тема: «Теория рядов»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться записывать числовой ряд по его заданному общему члену; исследовать ряд на сходимость.

ОБОРУДОВАНИЕ: справочные пособия.

Справочный материал

Решение задачи, представленной в математических терминах, например, в виде комбинации различных функций, их производных и интегралов, нужно уметь “довести до числа”, которое чаще всего и служит окончательным ответом. Для этого в различных разделах математики выработаны различные методы.

Раздел математики, позволяющий решить любую корректно поставленную задачу с достаточной для практического использования точностью, называется теорией рядов.

Даже если некоторые тонкие понятия математического анализа появились вне связи с теорией рядов, они немедленно применялись к рядам, которые служили как бы инструментом для испытания значимости этих понятий. Такое положение сохраняется и сейчас.

Выражение вида

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} u_i,$$

где $u_1; u_2; u_3; \dots; u_n; \dots$ - члены ряда; u_n - n -ый или общий член ряда, называется бесконечным рядом (рядом).

Если члены ряда :

- числа, то ряд называется числовым;
- числа одного знака, то ряд называется знакопостоянным;
- числа разных знаков, то ряд называется знакопеременным;
- положительные числа, то ряд называется знакоположительным;
- числа, знаки которых строго чередуются, то ряд называется знакочередующимся;
- функции, то ряд называется функциональным;
- степени x , то ряд называется степенным;
- тригонометрические функции, то ряд называется тригонометрическим.

1.1. Основные понятия числового ряда.

Числовым рядом называется сумма вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots, \quad (1.1)$$

где $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$, называемые членами ряда, образуют бесконечную последовательность; член u_n называется общим членом ряда.

Суммы

$$S_1 = u_1,$$

$$S_2 = u_1 + u_2,$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3,$$

.....

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n,$$

составленные из первых членов ряда (1.1), называются частичными суммами этого ряда.

Каждому ряду можно сопоставить последовательность частичных сумм $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$.

Если при бесконечном возрастании номера n частичная сумма ряда S_n стремится к пределу S , то ряд называется сходящимся, а число S - суммой сходящегося ряда, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad \text{или} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n) = S.$$

Эта запись равносильна записи

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = S.$$

Если частичная сумма S_n ряда (1.1) при неограниченном возрастании n не имеет конечного предела (стремится к $+\infty$ или $-\infty$), то такой ряд называется **расходящимся**.

Если ряд *сходящийся*, то значение S_n при достаточно большом n является приближенным выражением суммы ряда S .

Разность $r_n = S - S_n$ называется остатком ряда. Если ряд сходится, то его остаток стремится к нулю, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$, и наоборот, если остаток стремится к нулю, то ряд сходится.

1.2. Примеры числовых рядов.

Пример 1. Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots \quad (1.2)$$

называется *геометрическим* ($a \neq 0$).

Геометрический ряд образован из членов геометрической прогрессии.

Известно, что сумма её первых n членов $S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}$. Очевидно: это n -ая частичная сумма ряда (1.2).

Возможны случаи:

$$|q| = 1.$$

$$q = 1.$$

Ряд (1.2) принимает вид:

$$a + a + a + \dots + a = a \cdot n = S_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot n = \infty, \text{ ряд расходится;}$$

$$q = -1$$

Ряд (1.2) принимает вид:

$$a - a + a - a + \dots,$$

$$S_n = \begin{cases} a & \text{при } n \text{ нечетном } (n = 2k + 1), \\ 0 & \text{при } n \text{ четном } (n = 2k). \end{cases}$$

S_n не имеет предела, ряд расходится.

$$|q| < 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \text{конечное число, ряд сходится.}$$

$$|q| > 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - aq^n}{1 - q} = \infty - \text{ряд расходится.}$$

Итак, данный ряд сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$.

Пример 2. Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (1.3)$$

называется *гармоническим*.

Запишем частичную сумму этого ряда:

$$S_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

Сумма S_n больше суммы, представленной следующим образом:

$$S_n > \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

$$S_n > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

или $S_n > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \rightarrow \infty$, или $S_n = 1 + \frac{1}{2}(n-1) \rightarrow \infty$.

Следовательно, если $n \rightarrow \infty$, то $S_n \rightarrow \infty$, т.е. гармонический ряд расходится.

Пример 3. Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots \quad (1.4)$$

называется **обобщенным гармоническим**.

Если $p = 1$, то данный ряд обращается в гармонический ряд, который является расходящимся.

Если $p < 1$, то члены данного ряда больше соответствующих членов гармонического ряда и, значит, он расходится. При $p > 1$ имеем геометрический ряд, в котором $|q| < 1$; он является сходящимся.

Итак, обобщенный гармонический ряд сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

1.3. Необходимый и достаточные признаки сходимости.

Необходимый признак сходимости ряда.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ может сходить только при условии, что его общий член u_n при неограниченном увеличении номера n стремится к нулю: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится – это достаточный признак расходимости ряда.

Достаточные признаки сходимости ряда с положительными членами.

Признак сравнения рядов с положительными членами.

Исследуемый ряд сходится, если его члены не превосходят соответствующих членов другого, заведомо сходящегося ряда; исследуемый ряд расходится, если его члены превосходят соответствующие члены другого, заведомо расходящегося ряда.

Содержание работы

1. Записать ряд по его заданному общему члену:

$$u_n = \frac{n+1}{2^n};$$

$$u_n = \frac{n+2}{2n-1};$$

$$u_n = \frac{x^n}{n!}.$$

2. Найти n -ый член ряда по его данным первым членам:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots;$$

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{3}{5} - \dots.$$

3. Исследовать сходимость ряда, применяя необходимый признак сходимости и

признак сравнения: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n}{n+1} + \dots$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8

Тема: «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться решать дифференциальные уравнения первого и второго порядков.

ОБОРУДОВАНИЕ: справочные пособия.

Справочный материал

Теория дифференциальных уравнений является заключительной темой после изучения дифференциально–интегрального исчисления. Тема эта очень сложная. Она является важной для получения фундаментального естественно-научного образования, для формирования представлений о математике, как о необходимой для каждого человека составляющей общих знаний о мире и понимания значимости этой науки для общественного прогресса.

Определение 1:

Дифференциальные уравнения – это уравнения, содержащие искомые функции, их производные различных порядков и независимые переменные.

$$f(x, y, y', y'', y''' \dots) = 0$$

Определение 2:

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок, входящих в него производных.

Примеры:

$xu + y = 0$ – дифференциальное уравнение первого прядка.

$$\frac{d^2 y}{d^2 x} - 4xy \frac{dy}{dx} = x^2$$

- дифференциальное уравнение 2-го порядка.

$y''' - 2y = x$ – дифференциальное уравнение третьего порядка.

Определение 3:

Решить дифференциальное уравнение – это значит, найти множество функций $y = f(x) + C$, которые удовлетворяют данному уравнению.

Такое множество функций называется общим решением дифференциального уравнения.

Определение 4:

Дифференциальным уравнением 1-го порядка с одной неизвестной функцией называется соотношение $F(x, y, y') = 0$ между независимым переменным x , искомой функцией y и её производной

Дифференциальное уравнение первого порядка в общем случае **содержит:**

- 1) независимую переменную x ;
- 2) зависимую переменную y (функцию);
- 3) первую производную функции: y' .

В некоторых уравнениях 1-го порядка может отсутствовать «икс» или (и) «игрек», но это не существенно – **важно** чтобы в ДУ **была** первая производная y' , и **не было** производных высших порядков – y'' , y''' и т.д.

Определение 5:

Частное решение дифференциального уравнения — это решение, не содержащее произвольных постоянных.

Определение 6: Частным решением ДУ называется решение, полученное из общего при различных числовых значениях произвольных постоянных.

Значения произвольных постоянных находятся при определенных начальных значениях аргумента и функции.

Определение 7: Задача, в которой требуется найти частное решение ДУ, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, называется задачей Коши.

(Огюстен Луи Коши (1789-1857) – французский математик).

Пример 1: $y' = 2x$. С чего начать *решение*?

$$\frac{dy}{dx} = 2x,$$

На втором шаге смотрим, нельзя ли *разделить переменные*?

Разделим переменные

$$dy = 2x dx$$

$$\int dy = \int 2x dx,$$

$$y = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C$$

$$y = x^2 + C \text{ - общее решение}$$

2) При $x = 2$, $y = 5$, тогда

$$5 = 2^2 + C, 5 = 4 + c, \text{ получим}$$

$$c = 1, \text{ следовательно,}$$

$$y = x^2 + 1 \text{ - частное решение.}$$

Мы сначала рассмотрим самые простые ДУ – это ДУ с **разделяющимися переменными**.

Определение 8: Дифференциальные уравнения $f(y) dy = g(x) dx$ называют уравнениями с разделенными переменными

Определение 9: Если $q(x) = 0$, то уравнение называется однородным, если $q(x) \neq 0$, то уравнение неоднородное

Для решения этого уравнения **необходимо:**

1. **Переписать производную**

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

2. **разделить переменные;**

3. **проинтегрировать обе части полученного равенства.**

Пример 2: Решить дифференциальное уравнение $xy' = y$

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + C$$

Единственное, у нас «игрек» не выражен через «икс», то есть решение представлено в *неявном* виде.

Определение 10:

Решение дифференциального уравнения в неявном виде называется **общим интегралом дифференциального уравнения**.

Давайте попытаемся получить **общее решение**.

Запомним первый технический приём, он очень распространен и часто применяется в практических заданиях: *если в правой части после интегрирования появляется логарифм, то константу во многих случаях (но далеко не всегда!) тоже целесообразно записать под логарифмом.*

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C| \quad \text{Используем свойство логарифмов} \quad \ln a + \ln b = \ln(ab)$$

$$\ln|y| = \ln|Cx|$$

$y = Cx$ - представлена в явном виде.

Пример 3:

1)

$$x dy = 2y dx$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x},$$

$$\int \frac{dy}{y} = 2 \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln y = 2 \ln x + \ln C, \ln y = \ln(x^2 C) \Rightarrow y = x^2 C -$$

Общее решение.

$$2) (xy^2 + x) = (y - x^2 y) y',$$

$$x(y^2 + 1)dx = y(1 - x^2)dy$$

$$\frac{ydy}{(y^2 + 1)} = \frac{xdx}{1 - x^2},$$

$$\int \frac{ydy}{(y^2 + 1)} = \int \frac{xdx}{1 - x^2},$$

$$\ln \sqrt{y^2 + 1} = \ln \frac{C}{\sqrt{1 - x^2}} \Rightarrow y^2 + 1 = \frac{C^2}{1 - x^2} \Rightarrow y = \frac{C^2}{1 - x^2} - 1 \text{ -общее решение}$$

Найдем частное решение при начальных условиях: при $x=2$, $y=-4$.

Получим: $-4+1=C^2/(-3)$, тогда $C^2=9$.

Частное решение имеет вид: $y = \frac{9}{1 - x^2} - 1, y = \frac{8 + x^2}{1 - x^2}$.

$$3) \quad y' = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, y = 1, x = 0$$

Содержание работы

1. Решить уравнения:

1. $xy' = 2y$

2. $\sqrt{y}dx - \sqrt{x}dy = 0, x = 1, y = 4$

3. $\sin^2 x dy = y dx, x = \frac{\pi}{2}, y = e^2$

2. Определить вид уравнения, решить его, сформулировать алгоритм решения такого типа уравнения.

$$y' = \frac{y}{x} - \operatorname{tg} \frac{y}{x} \frac{d^2 y}{dx^2} = \cos 2x$$

3. Составить характеристическое уравнение:

а) $y'' - 2y' = 0$

б) $y'' + y' + y = 0$

в) $y'' + 13y = 0$

г) $y'' - 12y' + 36y = 0$

4. Тест по теме «Дифференциальные уравнения»

1) Примеры дифференциальных уравнений:

а) $2y - x = 1$

б) $y' = 3x$

в) $3dy = 2xdx$

г) $3y'' = 5x^2$

2) Вид дифференциального уравнения $y' = x + 1$:

а) линейное 1-го порядка;

б) однородное;

- в) 2-го порядка с постоянными коэффициентами;
- г) с разделяющимися переменными.

3) Решить задачу Коши – это найти

- а) общее решение дифференциального уравнения;
- б) начальные условия;
- в) произвольную постоянную C;
- г) частное решение дифференциального уравнения.

4) Решением дифференциального уравнения $y'' - 9y = 0$ является функция...

- а) $y = e^{3x}$
- б) $y = x^9$
- в) $y = 9x$
- г) $y = \cos x$

5) Разделение переменных в дифференциальном уравнении $e^x \ln y dx + xy dy = 0$ приведет его к виду...

- а) $\frac{e^x dx}{x} = - \frac{\ln y dy}{y}$
- б) $\frac{e^x dx}{x} = - \frac{y dy}{\ln y}$
- в) $\frac{e^x dx}{x} = \frac{y dy}{\ln y}$
- г) $\frac{e^x \ln y dx}{xy} = - dy$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 9

Тема: «Матрицы и определители»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться вычислять матрицы, действия над матрицами.

ОБОРУДОВАНИЕ: справочные пособия, микрокалькуляторы.

Справочный материал

1. Умножение матрицы на число.

Пример:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 12 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 7 & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & -3 \\ 21 & 0 \end{pmatrix}$$

Для того чтобы умножить матрицу на число, нужно **каждый** элемент матрицы умножить на это число.

2. Сумма (разность) матриц.

Для выполнения сложения (вычитания) матриц, необходимо, чтобы они были одинаковыми по размеру.

Для того чтобы сложить матрицы, необходимо сложить их соответствующие элементы:

$$F + G = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 + (-4) & -1 + (-3) \\ -5 + 15 & 0 + 7 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 12 - 4 & -1 - 3 \\ -5 + 15 & 0 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$$

Для разности матриц правило аналогичное, необходимо найти разность соответствующих элементов.

Пример:

Найти разность матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -15 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix}$,

$$A - H = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 3 & -15 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - (-4) & 5 - 3 & -17 - (-15) \\ -1 - (-5) & 0 - (-7) & 10 - 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 3 + 4 & 5 - 3 & -17 + 15 \\ -1 + 5 & 0 + 7 & 10 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

3. Умножение матриц.

Чтобы матрицу K можно было умножить на матрицу L нужно, чтобы число столбцов матрицы K равнялось числу строк матрицы L .

Пример 1:

Умножить матрицу $K = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ на матрицу $L = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Формула умножения для конкретного случая:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 c_1 + b_1 c_2 \\ a_2 c_1 + b_2 c_2 \end{pmatrix}$$

$$KL = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \\ 5 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Пример 2:

Умножить матрицу $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ на матрицу $N = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

Формула: $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 c_1 + b_1 c_2 & a_1 d_1 + b_1 d_2 \\ a_2 c_1 + b_2 c_2 & a_2 d_1 + b_2 d_2 \end{pmatrix}$

$$MN = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 9 - 3 \cdot 6 & 2 \cdot (-6) - 3 \cdot (-4) \\ 4 \cdot 9 - 6 \cdot 6 & 4 \cdot (-6) - 6 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В результате получена так называемая нулевая матрица.

Пример 3:

Умножить матрицу $P = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$ на матрицу $R = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Формула:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 d_1 + b_1 d_2 + c_1 d_3 \\ a_2 d_1 + b_2 d_2 + c_2 d_3 \\ a_3 d_1 + b_3 d_2 + c_3 d_3 \end{pmatrix}$$

$$PR = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 + 8 \cdot (-3) - 4 \cdot 1 \\ 6 \cdot 2 + 9 \cdot (-3) - 5 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 + 7 \cdot (-3) - 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -20 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Содержание работы

Вариант № 1

1. Найти матрицу $3A-B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Вычислить произведение матриц:

$$1) \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 12 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант № 2

1. Найти матрицу $A+2B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Вычислить произведение матриц:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 10

Тема: «Матрицы и определители»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться вычислять определители второго и третьего порядка.

ОБОРУДОВАНИЕ: справочные пособия, микрокалькуляторы.

Справочный материал

1. **Определитель второго порядка** можно раскрыть с помощью формулы:

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 11 & -3 \\ -15 & -2 \end{vmatrix} = 11 \cdot (-2) - (-15) \cdot (-3) = -22 - 45 = -67$$

2. **Определитель третьего порядка** можно раскрыть с помощью формулы (способ 1):

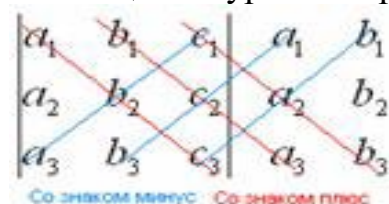
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 9 + (-7) \cdot (-2) \cdot 6 + 4 \cdot 8 \cdot 3 - (-7) \cdot 0 \cdot 3 - 1 \cdot 8 \cdot 6 - 4 \cdot (-2) \cdot 9 =$$
$$= 0 + 84 + 96 - 0 - 48 + 72 = 204$$

(способ 2):

Способ Саррюса или способом «параллельных полосок». Суть состоит в том, что справа от определителя приписывают первый и второй столбец и аккуратно карандашом проводят линии:



Со знаком минус Со знаком плюс

Множители, находящиеся на «красных» диагоналях входят в формулу со знаком «плюс».

Множители, находящиеся на «синих» диагоналях входят в формулу со знаком минус:

Пример:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \\ -7 & 8 \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 9 + (-2) \cdot 6 \cdot (-7) + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 0 \cdot (-7) - 1 \cdot 6 \cdot 8 - (-2) \cdot 4 \cdot 9 =$$
$$= 0 + 84 + 96 - 0 - 48 + 72 = 204$$

Содержание работы

Вычислить определители:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}$$

$$2) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & -6 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -4 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

$$4) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$5) \begin{vmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$6) \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 11

Тема: «Системы линейных уравнений»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться решать системы линейных уравнений методом Гаусса.

ОБОРУДОВАНИЕ: справочные пособия, микрокалькуляторы.

Справочный материал

Система линейных уравнений может:

- 1) Иметь единственное решение.
- 2) Иметь бесконечно много решений.
- 3) Не иметь решений (быть *несовместной*).

Метод Гаусса – наиболее мощный и универсальный инструмент для нахождения решения **любой** системы линейных уравнений. Правило Крамера и матричный метод непригодны в тех случаях, когда система имеет бесконечно много решений или несовместна.

Пусть дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + y = -7 \end{cases} \text{ решим ее методом Гаусса.}$$

На первом этапе нужно записать *расширенную матрицу системы*:

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right)$. По какому принципу записаны коэффициенты, думаю, всем видно. Вертикальная черта внутри матрицы не несёт никакого математического смысла – это просто отчеркивание для удобства оформления.

Справка: рекомендую запомнить термины линейной алгебры. **Матрица системы** – это матрица, составленная только из коэффициентов при

неизвестных, в данном примере матрица системы: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. **Расширенная матрица системы** – это та же матрица системы плюс столбец свободных

членов, в данном случае: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right)$. Любую из матриц можно для краткости называть просто матрицей.

После того, как расширенная матрица системы записана, с ней необходимо выполнить некоторые действия, которые также называются *элементарными преобразованиями*.

Существуют следующие элементарные преобразования:

1) **Строки** матрицы можно **переставлять** местами. Например, в рассматриваемой матрице можно безболезненно переставить первую и вторую

строки: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & -5 \end{array}\right)$

2) Если в матрице есть (или появились) пропорциональные (как частный случай – одинаковые) строки, то следует **удалить** из матрицы все эти строки кроме

одной. Рассмотрим, например матрицу $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 6 \end{array}\right)$. В данной матрице последние три строки пропорциональны, поэтому достаточно оставить только

одну из них: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right)$.

3) Если в матрице в ходе преобразований появилась нулевая строка, то ее также следует **удалить**. Рисовать не буду, понятно, нулевая строка – это строка, в которой *одни нули*.

4) Строку матрицы можно **умножить (разделить)** на любое число, отличное от

нуля. Рассмотрим, например, матрицу $\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 9 & 15 \\ 0,5 & 0 & 2,5 \end{array}\right)$. Здесь целесообразно первую строку разделить на -3 , а вторую строку – умножить на

2: $\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 9 & 15 \\ 0,5 & 0 & 2,5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -5 \\ 1 & 0 & 5 \end{array}\right)$. Данное действие очень полезно, поскольку упрощает дальнейшие преобразования матрицы.

5) Это преобразование вызывает наибольшие затруднения, но на самом деле ничего сложного тоже нет. К строке матрицы можно **прибавить другую строку, умноженную на число**, отличное от нуля. Рассмотрим нашу матрицу

из практического примера: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right)$. Сначала я распишу преобразование

очень подробно. Умножаем первую строку на -2 : $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right)$, и **ко второй строке прибавляем первую строку умноженную на -2**

2: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$. Теперь первую строку можно разделить

«обратно» на -2 : $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$ Как видите, строка, которую **ПРИБАВЛЯЛИ** – не изменилась. **Всегда** меняется строка, К КОТОРОЙ ПРИБАВЛЯЮТ.

На практике так подробно, конечно, не расписывают, а пишут короче:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Еще раз: ко второй строке **прибавили первую строку, умноженную на -2** . Умножают строку обычно устно или на черновике, при этом мысленный ход расчётов примерно такой:

«Переписываю матрицу и переписываю первую строку: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ * & * & * \end{array}\right)$ »

«Сначала первый столбец. Внизу мне нужно получить ноль. Поэтому единицу вверху умножаю на -2 : $1 \cdot (-2) = -2$, и ко второй строке прибавляю первую: $2 + (-$

$2) = 0$. Записываю результат во вторую строку: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & * & * \end{array}\right)$ »

«Теперь второй столбец. Вверху -1 умножаю на -2 : $-1 \cdot (-2) = 2$. Ко второй строке прибавляю первую: $1 + 2 = 3$. Записываю результат во вторую

строку: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$ »

«И третий столбец. Вверху -5 умножаю на -2 : $-5 \cdot (-2) = 10$. Ко второй строке прибавляю первую: $-7 + 10 = 3$. Записываю результат во вторую

строку: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$ »

Пожалуйста, тщательно осмыслите этот пример и разберитесь в последовательном алгоритме вычислений, если вы это поняли, то метод Гаусса практически «в кармане». Но, конечно, над этим преобразованием мы еще поработаем.

Элементарные преобразования не меняют решение системы уравнений.

Вернемся к нашей системе $\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + y = -7 \end{cases}$. Она практически разобрана по косточкам.

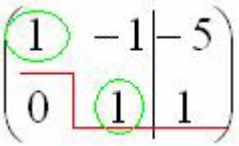
Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к *ступенчатому виду*:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

(1) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на -2 . И снова: почему первую строку умножаем именно на -2 ? Для того чтобы внизу получить ноль, а значит, избавиться от одной переменной во второй строке.

(2) Делим вторую строку на 3.

Цель элементарных преобразований – привести матрицу к ступенчатому

виду: . В оформлении задания прямо так и отчеркивают простым карандашом «лестницу», а также обводят кружочками числа, которые располагаются на «ступеньках». Сам термин «ступенчатый вид» не вполне теоретический, в научной и учебной литературе он часто называется *трапецевидный вид* или *треугольный вид*.

В результате элементарных преобразований получена *эквивалентная* исходной система уравнений:

$$\begin{cases} x - y = -5 \\ y = 1 \end{cases}$$

Теперь систему нужно «раскрутить» в обратном направлении – снизу вверх, этот процесс называется *обратным ходом метода Гаусса*.

В нижнем уравнении у нас уже готовый результат: $y = 1$.

Рассмотрим первое уравнение системы $x - y = -5$ и подставим в него уже известное значение «игрек»:

$$x - 1 = -5$$

$$x = -4$$

Ответ: $x = -4, y = 1$

Рассмотрим наиболее распространенную ситуацию, когда методом Гаусса требуется решить систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными.

Пример 1

Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = -1 \\ 2x - y + 3z = 13 \\ x + 2y - z = 9 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array} \right)$$

Сейчас я сразу нарисую результат, к которому мы придём в ходе решения:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 2 & -1 & 9 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 4 \end{array} \right)$$

И повторюсь, наша цель – с помощью элементарных преобразований привести матрицу к ступенчатому виду. С чего начать действия?

Сначала смотрим на левое верхнее число:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{3} & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array} \right)$$

Почти всегда здесь должна находиться **единица**. Вообще говоря, устроит и -1 (а иногда и другие числа), но как-то так традиционно сложилось, что туда обычно помещают единицу. Как организовать единицу? Смотрим на первый столбец – готовая единица у нас есть! Преобразование первое: меняем местами первую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array} \right)$$

Теперь первая строка у нас останется неизменной до конца решения. Уже легче.

Единица в левом верхнем углу организована. Теперь нужно получить нули вот на этих местах:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ \textcircled{2} & -1 & 3 & 13 \\ \textcircled{3} & 2 & -5 & -1 \end{array} \right)$$

Нули получаем как раз с помощью «трудного» преобразования. Сначала разбираемся со второй строкой $(2, -1, 3, 13)$. Что нужно сделать, чтобы на первой позиции получить ноль? Нужно **ко второй строке прибавить первую**

строку, умноженную на -2. Мысленно или на черновике умножаем первую строку на -2: (-2, -4, 2, -18). И последовательно проводим (опять же мысленно или на черновике) сложение, **ко второй строке прибавляем первую строку, уже умноженную на -2:**

$$\begin{array}{rrrr}
 0 & -5 & 5 & -5 \\
 \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\
 -2 & -4 & 2 & -18 \\
 + & + & + & + \\
 2 & -1 & 3 & 13
 \end{array}$$

Результат записываем во вторую строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array} \right)$$

Аналогично разбираемся с третьей строкой (3, 2, -5, -1). Чтобы получить на первой позиции ноль, нужно **к третьей строке прибавить первую строку, умноженную на -3.** Мысленно или на черновике умножаем первую строку на -3: (-3, -6, 3, -27). И **к третьей строке прибавляем первую строку, умноженную на -3:**

$$\begin{array}{rrrr}
 0 & -4 & -2 & -28 \\
 \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\
 -3 & -6 & 3 & -27 \\
 + & + & + & + \\
 3 & 2 & -5 & -1
 \end{array}$$

Результат записываем в третью строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array} \right)$$

На практике эти действия обычно выполняются устно и записываются в один шаг:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array} \right)$$

Не нужно считать всё сразу и одновременно. Порядок вычислений и «вписывания» результатов **последователен** и обычно такой: сначала переписываем первую строку, и пыхтим себе потихонечку — **ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО** и **ВНИМАТЕЛЬНО**:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 9 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \\
 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & * & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{pmatrix}$$

А мысленный ход самих расчётов я уже рассмотрел выше.

Далее нужно получить единицу на следующей «ступеньке»:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{pmatrix}$$

В данном примере это сделать легко, вторую строку делим на -5 (поскольку там все числа делятся на 5 без остатка). Заодно делим третью строку на -2 , ведь чем меньше числа, тем проще решение:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{pmatrix}$$

На заключительном этапе элементарных преобразований нужно получить еще один ноль здесь:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{pmatrix}$$

Для этого к третьей строке прибавляем вторую строку, умноженную на -2 :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow \\
 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Попробуйте разобрать это действие самостоятельно – мысленно умножьте вторую строку на -2 и проведите сложение.

Последнее выполненное действие – причёска результата, делим третью строку на 3. В результате элементарных преобразований получена эквивалентная

исходной система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 9 \\ y - z = 1 \\ z = 4 \end{cases}$$

Теперь в действие вступает обратный ход метода Гаусса. Уравнения «раскручиваются» снизу вверх.

В третьем уравнении у нас уже готовый результат: $z = 4$

Смотрим на второе уравнение: $y - z = 1$. Значение «зет» уже известно, таким образом:

$$y - 4 = 1$$

$$y = 5$$

И, наконец, первое уравнение: $x + 2y - z = 9$. «Игрек» и «зет» известны, дело за малым:

$$x + 2 \cdot 5 - 4 = 9$$

$$x + 6 = 9$$

$$x = 3$$

Ответ: $x = 3, y = 5, z = 4$

Как уже неоднократно отмечалось, для любой системы уравнений можно и нужно сделать проверку найденного решения, благо, это несложно и быстро.

Пример 2

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - y + 2z = 6 \\ x + y + 5z = -1 \end{cases}$$

Это пример для самостоятельного решения, образец чистового оформления и ответ в конце урока.

Следует отметить, что ваш **ход решения** может не совпасть с моим ходом решения, и это – **особенность метода Гаусса**. Но вот ответы обязательно должны получиться одинаковыми!

Пример 3

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

Смотрим на левую верхнюю «ступеньку». Там у нас должна быть единица. Проблема состоит в том, что в первом столбце единиц нет вообще, поэтому перестановкой строк ничего не решить. В таких случаях единицу нужно

организовать с помощью элементарного преобразования. Обычно это можно сделать несколькими способами. Я поступил так:

(1) К первой строке прибавляем вторую строку, умноженную на -1 . То есть, мысленно умножили вторую строку на -1 и выполнили сложение первой и второй строки, при этом вторая строка у нас не изменилась.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Теперь слева сверху «минус один», что нас вполне устроит. Кто хочет получить $+1$, может выполнить дополнительное телодвижение: умножить первую строку на -1 (сменить у неё знак).

Дальше алгоритм работает уже по накатанной колее:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)} \\ \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

(2) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на 5. К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на 3.

(3) Первую строку умножили на -1 , в принципе, это для красоты. У третьей строки также сменили знак и переставили её на второе место, таким образом, на второй «ступеньке у нас появилась нужная единица.

(4) К третьей строке прибавили вторую строку, умноженную на 2.

(5) Третью строку разделили на 3.

Скверным признаком, который свидетельствует об ошибке в вычислениях (реже – об опечатке), является «плохая» нижняя строка. То есть, если бы у нас

внизу получилось что-нибудь вроде $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 11 & 23 \end{array}\right)$, и,

соответственно, $11x_3 = 23 \Rightarrow x_3 = \frac{23}{11}$, то с большой долей вероятности можно утверждать, что допущена ошибка в ходе элементарных преобразований.

Заряжаем обратный ход, в оформлении примеров часто не переписывают саму систему, а уравнения «берут прямо из приведенной матрицы». Обратный ход, напоминаю, работает, снизу вверх. Да тут подарок получился:

$$x_3 = 1$$

$$x_2 = 3$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + 3 - 1 = 1 \Rightarrow x_1 = -1$$

Ответ: $x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = 1$.

Пример 4

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 8x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 18 \\ -7x_1 - 4x_2 - 4x_3 = -11 \\ -6x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -15 \end{cases}$$

Это пример для самостоятельного решения, он несколько сложнее. Ничего страшного, если кто-нибудь запутается. Полное решение и образец оформления в конце урока. Ваше решение может отличаться от моего решения.

В последней части рассмотрим некоторые особенности алгоритма Гаусса. Первая особенность состоит в том, что иногда в уравнениях системы отсутствуют некоторые переменные, например:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 + 4x_3 + 6 = 0 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Как правильно записать расширенную матрицу системы? В расширенной матрице системы на месте отсутствующих переменных ставим нули:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Кстати, это довольно легкий пример, поскольку в первом столбце уже есть один ноль, и предстоит выполнить меньше элементарных преобразований.

Вторая особенность состоит вот в чём. Во всех рассмотренных примерах на «ступеньки» мы помещали либо -1 , либо $+1$. Могут ли там быть другие числа?

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ 2x + y - 4z = 9 \\ 6x - 5y + 2z = 17 \end{cases}$$

В ряде случаев могут. Рассмотрим систему:

Здесь на левой верхней «ступеньке» у нас двойка. Но замечаем тот факт, что все числа в первом столбце делятся на 2 без остатка – и другая двойка и шестерка. И двойка слева вверху нас устроит! На первом шаге нужно выполнить следующие преобразования: ко второй строке прибавить первую строку, умноженную на -1 ; к третьей строке прибавить первую строку, умноженную на -3 . Таким образом, мы получим нужные нули в первом столбце.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 17 \\ 0 & 12 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Или еще такой условный пример: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 17 \\ 0 & 12 & 2 & 1 \end{array} \right)$. Здесь тройка на второй «ступеньке» тоже нас устраивает, поскольку 12 (место, где нам нужно получить ноль) делится на 3 без остатка. Необходимо провести следующее преобразование: к третьей строке прибавить вторую строку, умноженную на -4 , в результате чего и будет получен нужный нам ноль.

Метод Гаусса универсален, но есть одно своеобразие. Уверенно научиться решать системы другими методами (методом Крамера, матричным методом) можно буквально с первого раза – там очень жесткий алгоритм. Но вот чтобы

уверенно себя чувствовать в методе Гаусса, следует «набить руку», и прорешать хотя бы 5-10 десятков систем. Поэтому поначалу возможны путаница, ошибки в вычислениях, и в этом нет ничего необычного или трагического. Дождливая осенняя погода за окном.... Поэтому для всех желающих более сложный пример для самостоятельного решения:

Решения и ответы:

Пример 2: Решение: Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 2 & -1 & 2 & | & 6 \\ 1 & 1 & 5 & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & -5 & -4 & | & 4 \\ 0 & -1 & 2 & | & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & -1 & 2 & | & -2 \\ 0 & 5 & 4 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & -1 & 2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 14 & | & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

Выполненные элементарные преобразования:

(1) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на -2 . К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на -1 . **Внимание!** Здесь может возникнуть соблазн из третьей строки вычесть первую, крайне не рекомендую вычитать – сильно повышается риск ошибки. Только складываем!

(2) У второй строки сменили знак (умножили на -1). Вторую и третью строки поменяли местами. **Обратите внимание**, что на «ступеньках» нас устраивает не только единица, но еще и -1 , что даже удобнее.

(3) К третьей строке прибавили вторую строку, умноженную на 5 .

(4) У второй строки сменили знак (умножили на -1). Третью строку разделили на 14 .

Обратный

ход: $z = -1$

$$y - 2z = 2 \Rightarrow y + 2 = 2 \Rightarrow y = 0$$

$$x + 2y + 3z = 1 \Rightarrow x + 0 - 3 = 1 \Rightarrow x = 4$$

Ответ: $x = 4, y = 0, z = -1$.

Пример 4: Решение: Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 8 & 7 & 3 & | & 18 \\ -7 & -4 & -4 & | & -11 \\ -6 & 5 & -4 & | & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 7 \\ -7 & -4 & -4 & | & -11 \\ -6 & 5 & -4 & | & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 7 \\ 0 & 17 & -11 & | & 38 \\ 0 & 23 & -10 & | & 27 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 7 \\ 0 & 17 & -11 & | & 38 \\ 0 & 6 & 1 & | & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 7 \\ 0 & -1 & -14 & | & 71 \\ 0 & 6 & 1 & | & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 7 \\ 0 & -1 & -14 & | & 71 \\ 0 & 0 & -83 & | & 415 \end{pmatrix} \xrightarrow{(6)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 7 \\ 0 & 1 & 14 & | & -71 \\ 0 & 0 & 1 & | & -5 \end{pmatrix}$$

Выполненные

преобразования:

(1) К первой строке прибавили вторую. Таким образом, организована нужная единица на левой верхней «ступеньке».

(2) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на 7. К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на 6.

Со второй «ступенькой» всё хуже, «кандидаты» на неё – числа 17 и 23, а нам нужна либо единичка, либо -1 . Преобразования (3) и (4) будут направлены на получение

нужной единицы

(3) К третьей строке прибавили вторую, умноженную на -1 .

(4) Ко второй строке прибавили третью, умноженную на -3 .

Нужная вещь на второй ступеньке получена.

(5) К третьей строке прибавили вторую, умноженную на 6.

(6) Вторую строку умножили на -1 , третью строку разделили на -83 .

Обратный

ход: $x_3 = -5$

$$x_2 + 14x_3 = -71 \Rightarrow x_2 - 70 = -71 \Rightarrow x_2 = -1$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \Rightarrow x_1 - 3 + 5 = 7 \Rightarrow x_1 = 5$$

Ответ: $x_1 = 5, x_2 = -1, x_3 = -5$

Содержание работы

Вариант № 1

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$1. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases} \quad \text{Ответ: } 1.(1,3,2); 2.(1,0,3) \ 3.(0,0,0).$$

$$2. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$$

Ответ: 1.(1,3,2); 2.(1,0,3) 3.(1,0,0).

$$3. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Ответ: 1.(3,4,8) 2.(1,2,3) 3.(5,8,2).

Вариант № 2

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$1. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 10 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

Ответ: 1.(-1,3,2); 2.(0,0,3) 3.(0,0,0).

$$2. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Ответ: 1.(3,4,8); 2.(1,2,3); 3.(5,8,2).

$$3. \begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Ответ: 1.(-1,3,2); 2.(0,0,3); 3.(0,0,0).

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 12

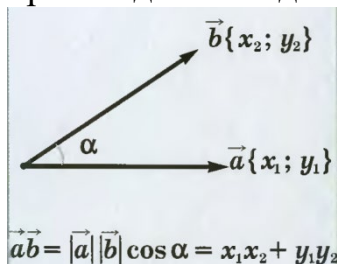
Тема: «Векторы и действия с ними»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться вычислять скалярное, векторное и смешанное произведения векторов.

ОБОРУДОВАНИЕ: справочные пособия.

Справочный материал

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.



Произведение вектора на число – это вектор.

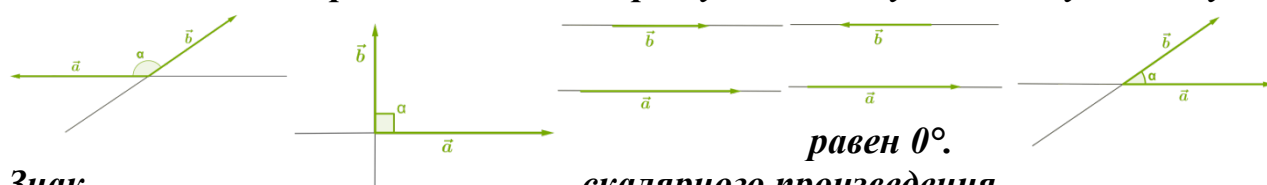
Произведение двух векторов, - это число (числа часто называют скалярными).

Угол между векторами – прямой (векторы перпендикулярны).

Угол между векторами равен 0° – векторы сонаправлены.

Угол между векторами равен 180° – векторы противоположно направлены.

Если один из векторов или оба вектора нулевые, то угол между ними будет



Знак

1. Если угол между векторами острый, то скалярное произведение будет положительным числом (так как косинус острого угла — положительное число).

Если векторы сонаправлены, то угол между ними будет равен 0° , а косинус равен 1, скалярное произведение также будет положительным.

2. Если угол между векторами тупой, то скалярное произведение будет отрицательным (так как косинус тупого угла — отрицательное число).

Если векторы направлены противоположно, то угол между ними будет равен 180° . Скалярное произведение также отрицательно, так как косинус этого угла равен -1 .

Справедливы и обратные утверждения:

1. Если скалярное произведение векторов — положительное число, то угол между данными векторами острый.
2. Если скалярное произведение векторов — отрицательное число, то угол между данными векторами тупой.

Особенный третий случай

3. Если угол между векторами прямой, то скалярное произведение векторов равно нулю, так как косинус прямого угла равен 0.

Обратное суждение: если скалярное произведение векторов равно нулю, то эти векторы перпендикулярны.

Квадрат вектора

Вектор, умноженный на самого себя будет числом, которое называется скалярным квадратом вектора.

Скалярный квадрат вектора равен квадрату длины данного вектора и обозначается как \vec{a}^2 .

Векторы называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Упорядоченная тройка некопланарных векторов называется правой, если после приведения их к общему началу из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму виден совершающимся против часовой стрелки. В противном случае тройка называется левой.

Декартовы координаты в трехмерном пространстве (*левая* (на рисунке слева) и *правая* (справа) декартовы системы координат (левый и правый базисы). Принято по умолчанию использовать правые базисы (это общепринятое соглашение, если только какие-то особые причины не заставляют от него отойти — и тогда это оговаривается явно).

Векторным произведением вектора на вектор называется вектор \times , который определяется тремя условиями:

1. длина вектора \times равна $|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$, где φ — угол между векторами \vec{a} и \vec{b} ;
2. вектор \times перпендикулярен каждому из векторов \vec{a} и \vec{b} ;
3. векторы \vec{a} , \vec{b} , \times образуют правую тройку векторов.

Свойства векторного произведения:

1. $\times = 0$, если \vec{a} и \vec{b} — коллинеарные векторы.
2. Длина векторного произведения неколлинеарных векторов \vec{a} и \vec{b} равна площади S параллелограмма, построенного на этих векторах.

3. $\times = - \times$.

4. $(\lambda) \times = \lambda(\times)$.

5. $(+) \times = \times + \times$.

Если $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то $\times =$.

Смешанным произведением трех векторов называется число, равное скалярному произведению вектора на векторное произведение векторов.

Если $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, $\vec{c} = (x_3; y_3; z_3)$, то $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

Смешанное произведение $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ равно объему V параллелепипеда, построенного на векторах \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , взятому со знаком «+», если тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая, со знаком «-», если тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - левая. Если же $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны, то $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Содержание работы

Задание 1.

а. **(Эталон решения задания)** Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = \{1; 2\}$ и $\vec{b} = \{4; 8\}$.

Решение: Если даны координаты векторов, то число, которое является скалярным произведением векторов, определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \{x_a; y_a; z_a\} \quad \vec{b} = \{x_b; y_b; z_b\} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b = \\ &= \{1; 2\} \cdot \{4; 8\} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 8 = 4 + 16 = 20 \end{aligned}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 8 = 4 + 16 = 20$$

Ответ: 20

Решить задание

б. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = \{4; -6; 4\}$ и $\vec{b} = \{7; 2; -8\}$.

Ответ: -16

Задание 2.

а) **(Эталон решения задания)** Найти скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} , если их длины $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 6$, а угол между векторами равен 60° .

Решение: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha = 3 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 9$.

Ответ: 9

Решить задание

б) Найти скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} , если их длины $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 8$, а угол между векторами равен 150° .

Ответ: -40

Задание 3.

а. **(Эталон решения задания)** Найти скалярное произведение векторов $\vec{p} = \vec{a} + 3\vec{b}$ и $\vec{q} = 5\vec{a} - 3\vec{b}$, если их длины $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, а угол между векторами \vec{a} и \vec{b} равен 60° .

Решение:

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{q} &= (\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 3\vec{b}) = 5\vec{a} \cdot \vec{a} - 3\vec{a} \cdot \vec{b} + 15\vec{b} \cdot \vec{a} - 9\vec{b} \cdot \vec{b} = 5|\vec{a}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} - 9|\vec{b}|^2 \\ &= 5 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ - 9 \cdot 2^2 = 45 + 36 - 36 = 45. \end{aligned}$$

Ответ: 45

Решить задание

б. Найти скалярное произведение векторов $p = 2a + b$ и $q = 3a - b$, если их длины $|a| = 2$, $|b| = 3$, а угол между векторами a и b равен 30° .

Задание 4. Найти скалярное произведение векторов $a = \{1; 2; -5\}$ и $b = \{4; 8; 1\}$.

Задание 5.

а. **(Эталон решения задания)** Даны векторы $a \rightarrow (-8; 8; -4)$ и $b \rightarrow (1; x; -2)$.
Найди значение x , если $a \rightarrow b \rightarrow = 8$.

Решение

$$\cdot = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$$

$$\text{Т.к } a \rightarrow b \rightarrow = 8. \text{ То } 8 = (-8) \cdot 1 + 8x + (-4) \cdot (-2)$$

$$8 = -8 + 8x + 8$$

$$8x = 8$$

$$x = 1$$

Ответ: 1

Решить задание

б. Даны векторы $a \rightarrow (-8; 4; -5)$ и $b \rightarrow (3; x; -4)$.

Найди значение x , если $a \rightarrow b \rightarrow = 0$.

Ответ: 1

Задание 6. Даны векторы $a = (2; 5; 7)$ и $b = (1; 2; 4)$. Найти координаты векторного произведения $a \times b$.

Задание 7. Вершины треугольника находятся в точках $A(-1; 2; -1)$, $B(-3; 1; 1)$ и $C(0; 4; -3)$. Найдите площадь этого треугольника.

Задание 8. Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань BCD , если вершины имеют координаты $A(0; 0; 1)$, $B(2; 3; 5)$, $C(6; 2; 3)$, $D(3; 7; 2)$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 13

Тема: «Аналитическая геометрия на плоскости»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: овладеть навыками использования правил действий над векторами в векторной и координатной формах.

ОБОРУДОВАНИЕ: справочные пособия.

Справочный материал

Аналитическая геометрия — раздел математики, изучающий геометрические образы алгебраическими методами.

Прямая, служащая для изображения действительных чисел, в которой выбрана начальная точка O , единица измерения и положительное направление,

называется числовой прямой, или числовой осью. Точка М этой прямой характеризуется определенным числом – координатой x , т.е. $M(x)$.

Две взаимно перпендикулярные оси Ox и Oy , имеющие общее начало O и одинаковую единицу масштаба, образуют начало O и одинаковую единицу масштаба, образуют прямоугольную (или декартову) систему координат на плоскости.

Ось Ox называется осью абсцисс, ось Oy – осью ординат, точка O – началом координат, а плоскость Oxy – координатной плоскостью. Каждой точке M этой плоскости соответствует пара чисел (x, y) , называемых ее координатами, т.е. $M(x, y)$, (x – абсцисса, y – ордината точки M).

Полярная система координат состоит из некоторой точки O , называемой полюсом, и исходящего из нее луча Op , называемого полярной осью.

Прямые на плоскости

1. Общее уравнение прямой. Всякое уравнение первой степени с двумя неизвестными x и y , т.е. уравнение вида

$$Ax + By + C = 0 \quad (1)$$

(где A, B, C – постоянные коэффициенты, причем $A^2 + B^2 \neq 0$) определяет на плоскости прямую. Это уравнение называется общим уравнением прямой.

Частные случаи общего уравнения прямой:

1) если $A = 0$, то уравнение приводится к виду $y = b$, где $b = -\frac{C}{B}$ (это есть уравнение прямой, параллельной оси Ox);

2) если $B = 0$, то уравнение прямой приводится к виду $x = a$, где $a = -\frac{C}{A}$ (прямая параллельна оси Oy);

3) если $C = 0$, то уравнение приводится к виду $Ax + By = 0$ (прямая проходит через начало координат).

2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Если в общем уравнении прямой $B \neq 0$, то, разрешив его относительно y , получим уравнение вида

$$y = kx + b, \quad (2)$$

где $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$. Его называют уравнением прямой с угловым коэффициентом.

3. Уравнение прямой в отрезках. Если в общем уравнении прямой $C \neq 0$, то, разделив все его части на $(-C)$, получим уравнение вида

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (3)$$

где $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$.

4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении. Если прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ и ее направление характеризуется угловым коэффициентом k , то уравнение прямой имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad (4)$$

5. Данное уравнение (4) с различными значениями коэффициента k называют также уравнениями пучка прямых с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$.

6. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Если прямая проходит через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, то уравнение прямой имеет вид

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad (5)$$

где $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$.

7. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору. Если прямая проходит через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно данному ненулевому вектору $\vec{n}(A, B)$, то уравнение прямой имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (6)$$

Вектор $\vec{n}(A, B)$, перпендикулярный прямой, называется нормальным вектором этой прямой.

8. Полярное уравнение прямой. Положение прямой в полярных координатах определено, если указано расстояние p . от полюса O до данной прямой и угол α между полярной осью OP и осью l , проходящей через полюс O перпендикулярно данной прямой (рис.1).

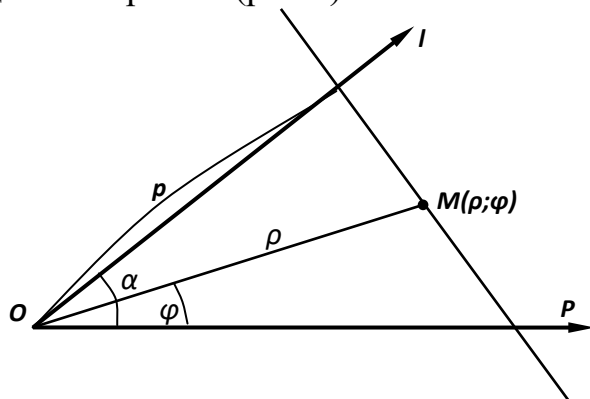


Рис.1

Для любой точки $M(\rho, \varphi)$ на данной прямой имеем

$$\rho \cos(\varphi - \alpha) = p. \quad (7)$$

Прямоугольные координаты $(x; y)$ точки M и ее полярные координаты $(\rho; \varphi)$ связаны соотношениями:

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi \quad (*) \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \quad (**)$$

где ρ - полярный радиус, φ - полярный угол точки M (рис. 2).

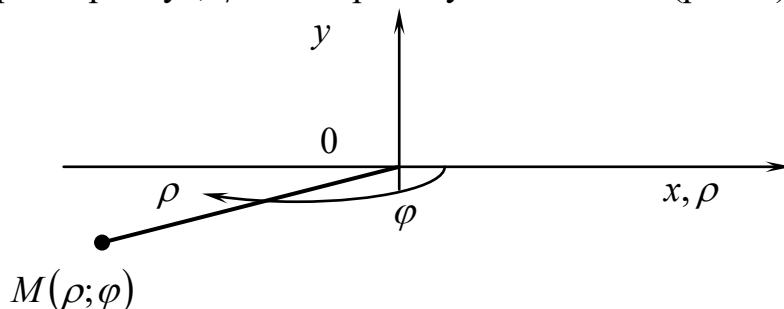


Рис.2

9. Нормальное уравнение прямой. Если прямая определяется заданием p и α (рис. 3), то уравнение (7) прямой в прямоугольной системе координат имеет вид

$$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha - p = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) можно получить из общего уравнения прямой (1), умножив обе части данного уравнения на нормирующий множитель

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad (9)$$

учитывая, что знак нормирующего множителя противоположен знаку свободного члена C общего уравнения прямой.

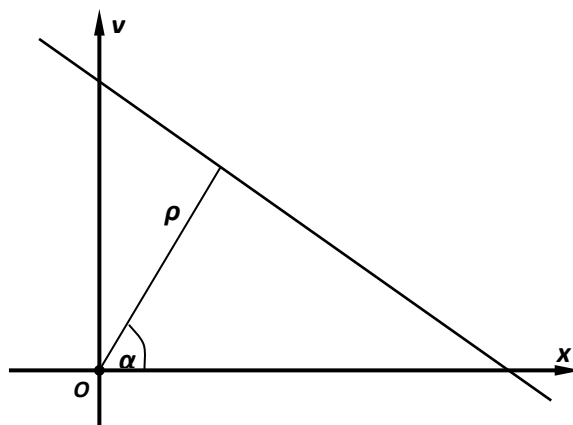


Рис.3

10. Угол между прямыми. Если прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ соответственно, то тангенс угла между этими прямыми можно вычислить по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|. \quad (10)$$

11. Условие параллельности двух прямых. Для того чтобы прямые L_1 и L_2 , заданные уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ соответственно, были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы $k_1 = k_2$.

Для того чтобы прямые L_1 и L_2 , заданные уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ соответственно, были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$.

12. Условие перпендикулярности двух прямых. Для того чтобы прямые L_1 и L_2 , заданные уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ соответственно, были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Для того чтобы прямые L_1 и L_2 , заданные уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ соответственно, были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$.

13. Расстояние от точки до прямой. Если прямая L задана уравнением $Ax + By + C = 0$ и точка $M_0(x_0, y_0)$ не принадлежит данной прямой, то расстояние от точки до прямой находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (11)$$

Прямые в пространстве

1. Уравнения прямой в пространстве, проходящей через две заданные точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M_1(x_1; y_1; z_1)$, имеют вид

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \quad (1)$$

2. Прямая может быть задана уравнениями двух плоскостей

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

пересекающихся по этой прямой.

3. Канонические уравнения прямой

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

определяют прямую, проходящую через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $s = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$.

4. Параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x = lt + x_0, \\ y = mt + y_0, \\ z = nt + z_0. \end{cases}$$

5. Угол между двумя прямыми, заданными их каноническими уравнениями $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$ и $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$, определяется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

6. Необходимое и достаточное условие нахождения двух прямых, заданных их каноническими уравнениями, в одной плоскости (условие компланарности двух прямых):

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Если величины l_1, m_1, n_1 не пропорциональны величинам l_2, m_2, n_2 , то указанное соотношение является необходимым и достаточным условием пересечения двух прямых в пространстве.

7. Угол между прямой $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ определяется по формуле

$$\sin \varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}};$$

условие параллельности прямой и плоскости:

$$Al + Bm + Cn = 0;$$

условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$A/l = B/m = C/n.$$

Плоскости в пространстве

1. Общее уравнение плоскости Р имеет вид

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (1)$$

где $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ – нормальный вектор плоскости (рис. 1).

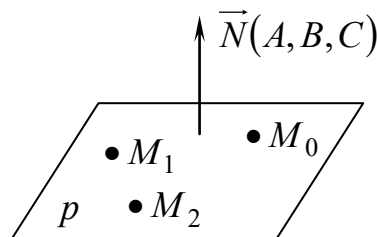


Рис.1

Частные случаи общего уравнения плоскости:

1. Если $D = 0$, то оно принимает вид $Ax + By + Cz = 0$. Этому уравнению удовлетворяет точка $O(0;0;0)$. Следовательно, в этом случае плоскость проходит через начало координат.

2. Если $C = 0$, то имеем уравнение $Ax + By + D = 0$. Нормальный вектор $\vec{N} = (A; B; 0)$ перпендикулярен оси Oz . Следовательно, плоскость параллельна Oz ; если $B = 0$ – параллельна оси Oy , если $A = 0$ – параллельна оси Ox .

3. Если $C = D = 0$, то плоскость проходит через $O(0;0;0)$ параллельно оси Oz , т.е. плоскость $Ax + By = 0$ проходит через ось Oz . Аналогично, уравнениям $By + Cz = 0$ и $Ax + Cz = 0$ отвечают плоскости, проходящие соответственно через оси Ox и Oy .

4. Если $A = B = 0$, то уравнение принимает вид $Cz + D = 0$, т.е. $z = -\frac{D}{C}$.

Плоскость параллельна плоскости Oxy . Аналогично, уравнениям $Ax + D = 0$ и $By + D = 0$ отвечают плоскости, соответственно параллельные плоскостям Oyz и Oxz .

5. Если $A = B = D = 0$, то уравнение примет вид $Cz = 0$, т.е. $z = 0$. Это уравнение плоскости Oxy . Аналогично: $y = 0$ – уравнение плоскости Oxz ; $x = 0$ – уравнение плоскости Oyz .

2. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

3. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно данному вектору. Если в пространстве $Oxyz$ плоскость Р

задана точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и вектором $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$, перпендикулярным этой плоскости (рис. 2), то уравнение плоскости имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (3)$$

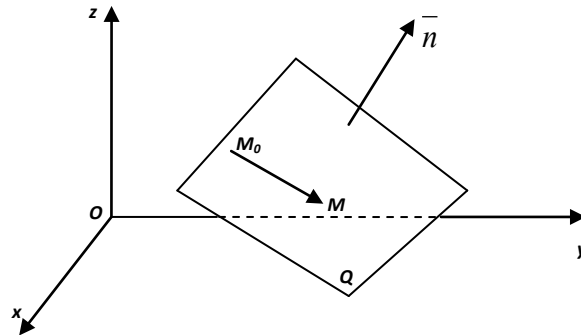


Рис. 2

4. Уравнение плоскости в отрезках. Если плоскость отсекает на осях Ох, Оу, Oz соответственно отрезки а, b, с (рис. 3), т.е. проходит через точки $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ и $C(0; 0; c)$, то уравнение плоскости имеет вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (4)$$

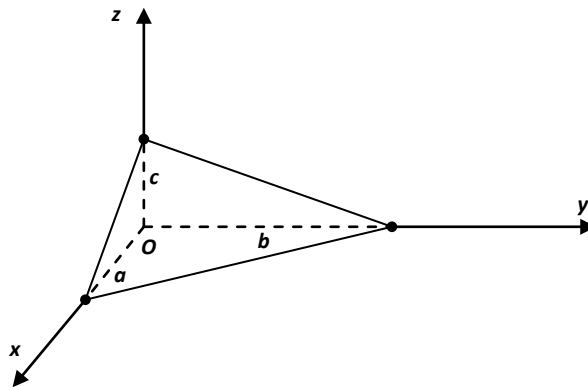


Рис. 3

Замечание. Уравнением (4) удобно пользоваться при построении плоскостей.

5. Нормальное уравнение плоскости. Положение плоскости Р определяется заданием единичного вектора \vec{e} , имеющего направление перпендикуляра ОК, проведенного на плоскость из начала координат, и длиной р этого перпендикуляра (рис. 4).

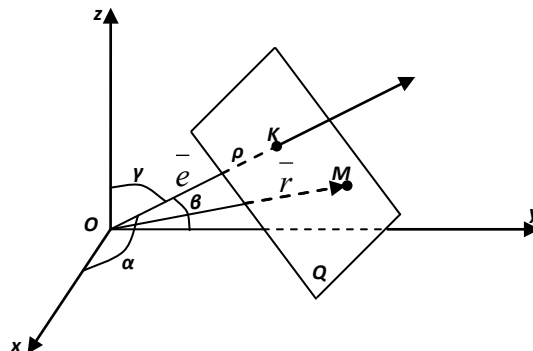


Рис. 4

Если α, β, γ – это углы, образованные единичным вектором \vec{e} с осями Ох, Оу, Oz соответственно, то уравнение плоскости имеет вид

$$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0. \quad (5)$$

Замечание. Общее уравнение плоскости (1) можно привести к нормальному уравнению (5), умножив обе части уравнения (1) на нормирующий множитель $\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, учитывая, что знак нормирующего множителя противоположен знаку свободного члена D общего уравнения плоскости.

6. Угол между двумя плоскостями, имеющими нормальные векторы $\vec{N}_1 = A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k}$ и $\vec{N}_2 = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}$ (рис. 5), определяется как угол между \vec{N}_1 и \vec{N}_2 ; косинус этого угла находится по формуле

$$\cos \varphi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|}$$

или

$$\cos \varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (6)$$

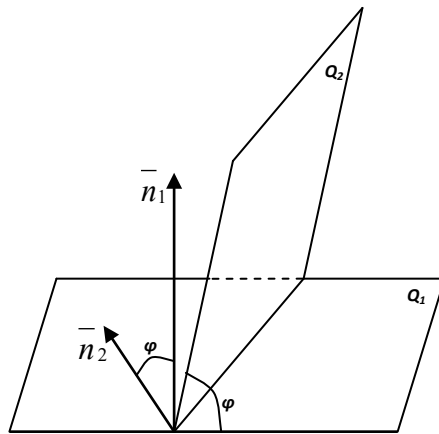


Рис. 5

7. Пусть заданы две плоскости P_1 и P_2 в виде общих уравнений плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ соответственно.

Условие параллельности плоскостей. Для того чтобы плоскости P_1 и P_2 были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

8. Условие перпендикулярности плоскостей. Для того чтобы плоскости P_1 и P_2 были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$.

9. Расстояние от точки до прямой. Если прямая L задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ не принадлежит данной прямой, то расстояние от точки до прямой находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (7)$$

Содержание работы

1. Привести уравнение $-3x + 4y + 15 = 0$ к нормальному виду.
2. Найти расстояние от точки $M_0(2; -1)$ до прямой $-3x + 4y + 15 = 0$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 14

Тема: «Аналитическая геометрия на плоскости»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: овладеть навыками использования правил действий над векторами в векторной и координатной формах.

ОБОРУДОВАНИЕ: справочные пособия.

Содержание работы

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A_1(4; -3; 1)$, $A_2(5; -3; 0)$.
2. Найти угол между плоскостью P_1 , проходящей через точки $A_1(2; -4; 1)$, $A_2(-1; 2; 0)$, $A_3(0; -2; 3)$, и плоскостью P_2 , заданной уравнением.

Информационное обеспечение обучения

Печатные и электронные издания

Основные учебные издания:

1. Гулиян, Б.Ш. Элементы высшей математики: учебное пособие / Гулиян Б.Ш., Гулиян Г.Б. — Москва: КноРус, 2021. — 436 с. — ISBN 978-5-406-06303-3. — URL: <https://book.ru/book/939826>

Электронно-библиотечная система:

2. ЭБС «IPRbooks», ООО «Ай Пи Ар Медиа»
3. ЭБС «Znanium»
4. ЭБС «PROFобразование»
5. ЭБС «Book.ru»