

На правах рукописи

Кондратов Дмитрий Вячеславович

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ПРОЦЕССОВ УПРУГОГИДРОДИНАМИКИ  
В МАШИНО- И ПРИБОРОСТРОЕНИИ**

Специальности 05.13.18 – Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ  
01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Саратов 2009

Работа выполнена в ГОУ ВПО «Саратовский государственный технический университет».

Научный консультант: доктор технических наук, профессор  
Могилевич Лев Ильич

Официальные оппоненты: доктор технических наук, профессор  
Крысько Вадим Анатольевич

доктор физико-математических наук,  
профессор  
Голованов Александр Иванович

доктор физико-математических наук, доцент  
Рабинский Лев Наумович

Ведущая организация: Нижегородский филиал Учреждения Российской Академии наук Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН

Защита состоится \_\_\_\_\_ 2009 г. в \_\_\_\_ часов на заседании диссертационного совета Д 212.242.08 при ГОУ ВПО «Саратовский государственный технический университет» по адресу: 410054, Саратов, ул. Политехническая, 77, Саратовский государственный технический университет, корп.1, ауд. 319.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ГОУ ВПО «Саратовский государственный технический университет».

Автореферат разослан « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2009 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета

Терентьев А.А.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

*Актуальность работы.* В современном железнодорожном, автомобильном и авиационном транспорте, а также ракетно-космических системах используются машины, агрегаты и приборы, являющиеся совокупностью абсолютно жестких, упругих и жидких тел со сложными динамическими взаимосвязями. При эксплуатации они подвергаются значительным вибрационным перегрузкам, которые обусловлены внутренними и внешними источниками вибрации, приводящими к нежелательным резонансным колебаниям.

В этой связи представляют несомненный научный и практический интерес постановка и решение задач упругогидродинамики в реальных конструкциях, исследование проблем их динамики и прочности в различных условиях на основе адекватных математических моделей.

В частности, вопросам исследования динамических процессов в поршневой группе двигателей внутреннего сгорания и изучению кавитационной коррозии гильз двигателей внутреннего сгорания посвящены работы: А.С. Орлина, М.Г. Круглова, М.М. Чурсина, С.Г. Роганова, Н.Н. Иванченко, А.А. Скуридина, М.Д. Никитина, А.А. Симдянкина, Д.А. Индейцева, И.С. Полипанова, С.К. Соколова, Р.М. Петриченко. Однако в них не рассматривались вопросы учета инерции движения вязкой жидкости, упругости внутренних и внешних оболочек с учетом реального типа закрепления.

Кроме того, в жидкостных ракетных двигателях и силовых цилиндрах используются цилиндрические трубы кольцевого профиля конечной длины, ламинарное движение жидкости в которой происходит под действием перепада давления на входе и выходе из трубы. Вопросами ламинарного движения жидкости под действием перепада давления занимались И.С. Громека, Л.Г. Лойцянский, Н.А. Слезкин, М.А. Ильгамов, J. R. Womersley и другие. Однако в их работах не производился одновременный учет упругости внутренней и внешней оболочек конечной длины и инерции движения жидкости.

В современных системах навигации и стабилизации широко используются поплавковые гироскопические приборы. Требования к точности, надежности, перегрузочной способности, ударной и вибрационной стойкости данных приборов на современном этапе значительно ужесточились. Достаточно отметить, что к современным поплавковым гироскопам предъявляются требования по скорости дрейфа (некомпенсируемая случайная составляющая) – менее  $10^{-3}$  °/ч, а в комфортных условиях – менее  $10^{-6}$  °/ч. Для поплавковых акселерометров погрешность должна быть менее  $10^{-6}g$ .

Проблемам построения и исследования математических моделей поплавковых и «сухих» приборов посвящено большое число работ.

Основополагающими из них являются работы К.П. Андрейченко, О.М. Городецкого, В.Э. Джашитова, Л.Г. Лойцянского, А.Ю. Ишлинского, Д.М. Климова, С.Ф. Коновалова, Я.Л. Лунца, Л.И. Могилевича, Е.А. Никитина, В.М. Панкратова, Д.С. Пельпора, В.С. Попова, А.А. Трунова, С. S. Draper, R. Kumar, R.A. Stein и ряда других. Однако в этих работах не рассматривалась задача одновременного учета упругости корпуса прибора, инерции движения жидкости и типа торцевого истечения жидкости при наличии внешнего источника вибрации. Таким образом, важнейшей проблемой является задача анализа вибрационных погрешностей поплавковых приборов навигации.

*Целью работы* является построение математических моделей для исследования динамики механических систем, состоящих из соосных цилиндрических оболочек конечной длины, жестко заземленных по торцам, взаимодействующих со слоем вязкой несжимаемой жидкости при воздействии вибрации и гармонического перепада давления на торцах, и механических систем, состоящих из упругой замкнутой цилиндрической оболочки, содержащей вязкую жидкость, в которой плавает в состоянии нейтрального равновесия абсолютно жесткое тело, в условиях вибрации применительно к современным механическим системам, применяемым в машино- и приборостроении.

*Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:*

1. Разработка и исследование математической модели для сложных механических систем, состоящих из двух соосных упругих замкнутых цилиндрических оболочек конечной длины, содержащих сдвливаемый слой вязкой несжимаемой жидкости между ними, в условиях воздействия внешнего источника вибрации и гармонического по времени перепада давления на торцах;
2. Определение на основе построенной математической модели амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик для внутренней и внешней оболочек в условиях гармонического перепада давления на торцах применительно к силовым цилиндрам;
3. Определение на основе построенной математической модели амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик для внутренней и внешней оболочек в условиях воздействия внешнего источника вибрации применительно к силовым цилиндрам и двигателям внутреннего сгорания;
4. Построение новой математической модели механической системы, состоящей из упругой замкнутой цилиндрической оболочки, содержащей вязкую несжимаемую жидкость, в которой плавает абсолютно жесткое тело;
5. Определение на основе математической модели вибрационной погрешности для поплавкового маятникового акселерометра и

поплавкового гироскопа при различных условиях истечения жидкости в торцы (свободное истечение, отсутствие истечения, несимметричное истечение), разгружающей опоры поплавка. Исследование влияния типоразмеров приборов, свойств поддерживающего слоя вязкой жидкости и материала оболочки на вибрационную погрешность.

*Научная новизна.* Основной отличительной особенностью предлагаемой работы являются построение и исследование математических моделей, учитывающих реальные физико-механические свойства исследуемых механических систем, содержащих соосные замкнутые оболочки, сдавливающие слой вязкой несжимаемой жидкости. В основу предложенных моделей положено представление их в виде связанной системы уравнений для каждой из составляющих и ее анализа, позволившего синтезировать амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики, силы и моменты, действующие на упругие оболочки и абсолютно жесткие тела.

1. Предложена общая математическая модель механической системы, состоящей из двух соосных упругих замкнутых цилиндрических оболочек конечной длины, содержащих слой вязкой несжимаемой жидкости между ними при воздействии внешней вибрации и гармонически по времени изменяющегося давления на торцах. Математическая модель представляет собой связанную систему уравнений в частных производных, описывающих динамику упругих замкнутых цилиндрических оболочек и жидкости с соответствующими граничными условиями.
2. На основе общей модели, введением ограничения на отсутствие вибрации, получена новая математическая модель кольцевой трубы с упругими внутренней и внешней оболочками при воздействии гармонически изменяющегося давления на входе и выходе из трубы, учитывающая упругую податливость внутренней и внешней оболочек и инерцию движения жидкости. Рассмотрены частные случаи кольцевой трубы с упругой только внутренней или только внешней оболочкой. В широком диапазоне параметров найдены резонансные частоты, оказывающие негативное влияние на конструкцию, и определено влияние типоразмеров и параметров жидкости на амплитудно-частотные характеристики оболочек кольцевой трубы.
3. Представлена новая математическая модель силового цилиндра трубы с упругими внутренней и внешней оболочками при воздействии внешнего источника вибрации, учитывающая упругость внутренней и внешней оболочек и инерцию движения жидкости, полученная из общей модели введением ограничения на отсутствие перепада давления на торцах. Математическая модель позволила в широком диапазоне параметров исследовать влияние типоразмеров и параметров жидкости

на амплитудно-частотные характеристики оболочек силового цилиндра. Выявлены резонансные частоты упругих оболочек, оказывающих негативное влияние на конструкцию.

4. Представлена новая математическая модель двигателя внутреннего сгорания с упругим корпусом (рубашкой) ДВС и абсолютно жесткой гильзой цилиндра при воздействии внешнего источника вибрации, учитывающая упругость корпуса ДВС и инерцию движения жидкости. Модель является предельным случаем модели силового цилиндра, в котором внутренняя оболочка является абсолютно жесткой. Выявлены оказывающие негативное влияние на конструкцию резонансные частоты упругой рубашки ДВС.
5. Представлена новая математическая модель поплавкового гироскопа, в которой корпус прибора представляется упругой замкнутой цилиндрической оболочкой, жестко заземленной по торцам, при различных условиях истечения жидкости в торцы (свободное истечение, отсутствие истечения, несимметричное истечение), содержащей слой вязкой несжимаемой жидкости и абсолютно жесткие тела (корпус поплавка и ротор гироскопа). Математическая модель поплавковых приборов навигации использует трехмерные уравнения динамики вязкой несжимаемой жидкости без ограничения на числа Рейнольдса, взаимодействующей с упругой замкнутой цилиндрической оболочкой и абсолютно жестким цилиндрическим поплавком. Математическая модель представляет собой связанную систему уравнений в частных производных, описывающих динамику жидкости и динамику упругой замкнутой цилиндрической оболочки, и обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих динамику абсолютно жестких тел (поплавка и ротора гироскопа) и соответствующих граничных условий.
6. На основе предложенной математической модели в широком диапазоне параметров (ширины цилиндрического зазора, толщины упругой замкнутой цилиндрической оболочки и вязкости жидкости) проанализирован динамический отклик – гидромеханические реакции, действующие на абсолютно жесткий поплавок. Найдена постоянная составляющая возмущающего момента, определяющего погрешность исследуемых механических систем в условиях гармонического закона вибрации основания, к которому крепится прибор.
7. Предложена математическая оценка вибрационной погрешности – дрейфа нуля и отклонения нуля – поплавковых интегрирующих гироскопов и маятниковых акселерометров соответственно, учитывающая упругую податливость корпуса прибора, инерцию движения вязкой несжимаемой жидкости и условия истечения

жидкости в торцы (свободное истечение, отсутствие истечения, несимметричное истечение).

8. Разработан программный комплекс, позволяющий производить оперативный расчет значений резонансных частот амплитудно-частотных характеристик, описанных математических моделей, а также значения постоянной составляющей гидродинамического возмущающего момента и инерционного момента применительно к поплавковым приборам навигации.

*Достоверность полученных результатов* обеспечивается корректной физической и математической постановкой задачи, применением классических математических методов и известных методов возмущений для расчета, использованием апробированных и основополагающих принципов и подходов теоретической механики, механики жидкости и механики деформируемого твердого тела. Полученные результаты при предельном переходе к абсолютно жестким элементам конструкции и малым числам Рейнольдса совпадают с уже известными результатами, полученными другими авторами, и не противоречат имеющимся физическим представлениям и известным экспериментальным данным.

*Практическая ценность и реализация результатов.* Результаты, полученные в диссертации, могут найти применение при моделировании динамики сложных механических систем, включающих в себя упругие замкнутые цилиндрические оболочки конечной длины, вязкую несжимаемую жидкость и абсолютно жесткие тела, таких как двигатели внутреннего сгорания, жидкостные ракетные двигатели, силовые цилиндры, системы подачи топлива и смазки. Предложенная математическая модель позволяет разработчику поплавковых приборов уже на этапе проектирования, исходя из известного частотного диапазона вибраций, выявить наиболее оптимальные параметры системы, обеспечивающие необходимую точность.

Полученное аналитическое решение позволяет при использовании ПЭВМ существенно увеличить скорость расчетов и строить высокоэффективные САПР сложных механических систем. Кроме того, становится возможным определение влияния различных факторов на динамику и точность поплавковых приборов. Математические модели и результаты их исследования, приведенные в работе, можно использовать при определении резонансных частот сосудов, полностью и не полностью заполненных жидкостью, и цилиндров двигателей внутреннего сгорания и, следовательно, при получении оценок кавитационного износа их внешней поверхности. Все вычисления, как аналитические, так и численные, выполнены в системе Waterloo Maple 12 (государственный контракт №71-190А/6 от 18.11.2008).

Результаты диссертации использованы:

1. в рамках бюджетной темы кафедры высшей и прикладной математики Российского государственного открытого технического университета путей сообщения «Вопросы исследования прикладных статических и динамических задач в механике сплошной среды на транспорте»;
2. в рамках комплексной внутривузовской научно-технической программы СГТУ 01В «Математическое моделирование в естественных науках» Саратовского государственного технического университета
3. в рамках бюджетной темы Саратовского государственного технического университета СГТУ–181;
4. в грантах РФФИ 03-01-10516-зм, 05-08-33329-а, 06-08-00043а, 08-01-12051-офи.

Имеется справка об использовании результатов (филиал ФГУП «НПЦАП»–«ПО «КОРПУС»).

*Апробация работы.* Основные результаты работы докладывались на XXXIV постоянно действующем научно–техническом семинаре в Саратовском филиале Военного артиллерийского университета (Саратов, 2001), на ежегодных научных конференциях профессорско-преподавательского состава Саратовского государственного университета «Актуальные проблемы математики и механики» (Саратов, 2001, 2002), на Международной конференции в ИПТМиУ РАН «Проблемы и перспективы прецизионной механики и управления в машиностроении» (Саратов, 2002, 2006, 2007), на IX–XV Международных симпозиумах в МАИ «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» (Москва–Ярополец, 2003–2009), на кафедре «Высшая математика» Российского государственного открытого технического университета путей сообщения (Москва, 2003, 2004), на Второй Всероссийской научной конференции по волновой динамике машин и конструкций (Нижний Новгород, 2007), на конференции молодых ученых Саратовского государственного технического университета «Молодые ученые – науке и производству» (Саратов, 2007); на научном семинаре кафедры «Теоретическая механика» Саратовского государственного технического университета (2006-2009).

*Публикации.* По теме диссертационной работы опубликовано 39 научных работ, из них 14 работ в профильных периодических научных изданиях, рекомендуемых ВАК РФ для публикации основных результатов докторских диссертаций, 1 монография.

*На защиту выносятся следующие положения:*

1. Сформулированы в безразмерном виде динамические задачи упругогидродинамики тонкостенных конструкций, включающих в себя упругие замкнутые цилиндрические оболочки конечной длины, абсолютно жесткие тела и вязкую несжимаемую жидкость, применительно к двигателям внутреннего сгорания с водяным



охлаждением, силовым цилиндрам, трубопроводам кольцевого профиля и поплавковым приборам навигации. Приведены результаты решений сформулированных в работе задач упругогидродинамики тонкостенных конструкций при воздействии на них гармонического по времени перепада давления и наличии переносного виброускорения.

2. Определены амплитудно-частотные, фазочастотные характеристики и коэффициенты динамичности колебательной системы оболочка-жидкость-оболочка, а также резонансные частоты при гармоническом законе изменения давления на входе и выходе из трубы, применительно трубопроводам кольцевого профиля.
3. Определены амплитудно-частотные, фазочастотные характеристики и коэффициенты динамичности колебательной системы оболочка-жидкость-оболочка, а также резонансные частоты, при наличии переносного виброускорения, применительно к силовым цилиндрам и двигателям внутреннего сгорания с водяным охлаждением.
4. Новая математическая модель поплавковых приборов навигации наиболее полно, среди известных моделей, учитывает упругую податливость корпуса, содержащего в рабочей камере вязкую несжимаемую жидкость и абсолютно жесткий поплавок. Наиболее полно, среди известных моделей, учитывает инерцию движения жидкости внутри оболочки без ограничений на числа Рейнольдса и влияние истечения жидкости в торцы, в том числе несимметричного.
5. Найденный и проанализированный с помощью исследования математической модели динамический отклик, в виде постоянных составляющих вибрационных возмущающих моментов, действующих на абсолютно жесткий поплавок со стороны поддерживающего и демпфирующего слоя жидкости под действием переносного ускорения, показал значительность влияния учтенных упругой податливости корпуса и инерции движения жидкости. Гидромеханический момент значительно больше при учете упругой податливости корпуса, чем без ее учета, и при этом является немонотонным.
6. Предложенная математическая оценка вибрационных возмущающих моментов дополнила модель погрешностей поплавковых маятниковых акселерометров и поплавковых гироскопов учетом упругой податливости корпуса прибора, инерции движения вязкой несжимаемой жидкости и типа истечения жидкости в торцы в условиях вибрации основания, к которому крепится прибор.

*Структура и объем работы.* Диссертационная работа состоит из введения, 6 глав, заключения, списка использованной литературы и приложений. Список использованной литературы включает 255 наименований.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приводится обзор литературных источников, посвященных исследованию гидроупругости тонкостенных конструкций, а также задач упругогидродинамики машино- и приборостроения.

В первой главе рассматривается общая постановка задачи и предлагается метод ее решения.

Рассматривается механическая система, состоящая из двух соосных упругих цилиндрических оболочек конечной длины с жестким защемлением по торцам, сдавливающий слой вязкой несжимаемой жидкости (рис. 1).

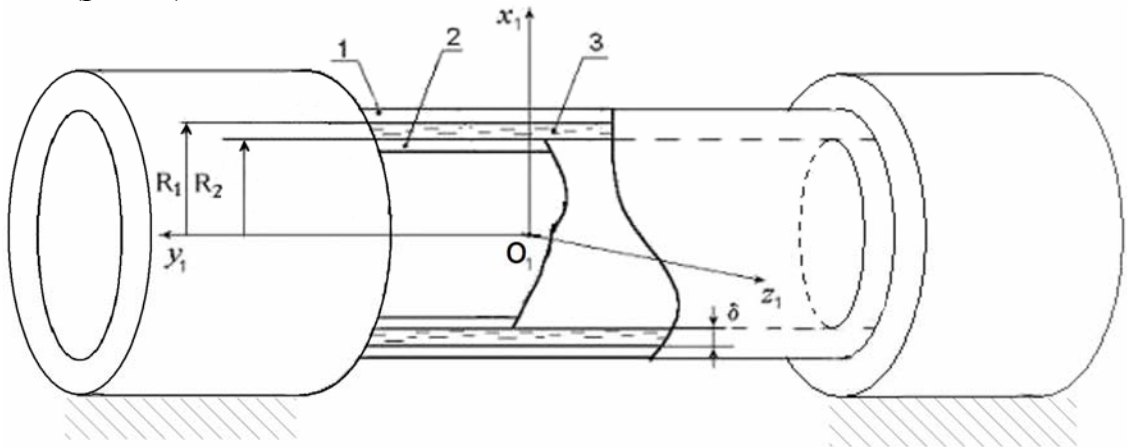


Рис. 1

Предполагается, что внешняя оболочка 1 – упругая замкнутая цилиндрическая оболочка с внутренним радиусом  $R_1$  и с жестким защемлением по торцам. Внутренняя оболочка 2, с внешним радиусом  $R_2$  – также упругая замкнутая цилиндрическая оболочка, жестко защемленная по торцам. Зазор между стенками оболочек 2 и 1 полностью заполнен жидкостью 3. Наружная поверхность внешней оболочки и поверхность внутренней оболочки образуют цилиндр в цилиндре длиной  $l_2$ . Радиальный зазор цилиндрической щели  $\delta = R_1 - R_2 \ll R_2$ . Торцевые зазоры рабочей камеры, с абсолютно жесткими стенками, имеют протяженность  $a$ , значительно большую радиального зазора ( $a \gg \delta$ ). На систему действуют гармонически меняющееся по времени на торцах давление и переносная сила инерции. Перемещение внутренней оболочки относительно внешней на защемленных торцах отсутствует. Механическая система считается термостабилизированной.

Систему координат  $O_1x_1y_1z_1$  свяжем с основанием, к которому крепится рассматриваемая механическая система. Ее центр  $O_1$  расположен в геометрическом центре соосных оболочек в невозмущенном состоянии. Положим, что перемещения вдоль оси  $O_1y_1$  отсутствуют. Обозначим виброускорение основания через  $\ddot{x}_0, \ddot{z}_0$ . Введем в рассмотрение

необходимую далее цилиндрическую систему координат  $r, \theta, y$  ( $\bar{n}_r, \bar{n}_\theta, \bar{j}$  – орты цилиндрической системы), полюс которой совпадает с началом координат  $O_1x_1y_1z_1$ , направления осей  $Oy, O_1y_1$  цилиндрической и декартовой систем координат совпадают (рис. 2).

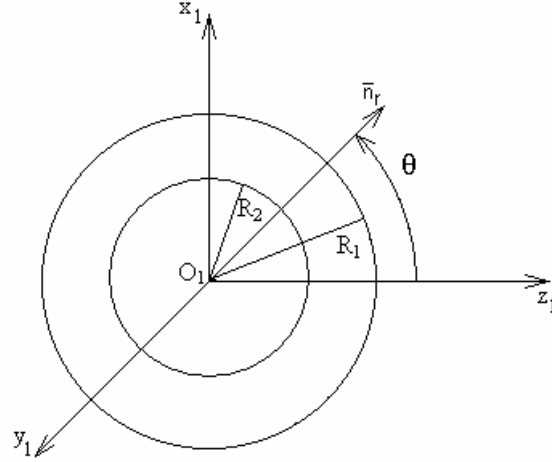


Рис. 2

Математическая модель рассматриваемой механической системы представляет собой связанную систему уравнений, включающую нелинейные уравнения в частных производных Навье–Стокса и уравнение неразрывности, уравнения в частных производных для описания динамики внутренней и внешней упругих цилиндрических оболочек, полученные исходя из гипотез Кирхгофа–Лява, и соответствующие граничные условия.

Для решения указанной системы уравнений сделан переход к безразмерным переменным и выделены малые параметры задачи:

$$\xi = (r - R_2)/\delta, \quad \theta = \theta, \quad \tau = \omega t, \quad \zeta = 2y/l_2, \quad V_r = w_m^{(1)}\omega u_\xi, \quad V_\theta = (w_m^{(1)}\omega/\psi)u_\theta, \\ V_y = (w_m^{(1)}\omega/\psi)(l_2/2R_2)u_\zeta; \quad u_1^{(i)} = u_m^{(i)}U_1^{(i)}, \quad u_2^{(i)} = v_m^{(i)}U_2^{(i)}, \quad u_3^{(i)} = w_m^{(i)}U_3^{(i)}, \\ \psi = \delta/R_2 \ll 1, \quad \lambda^{(i)} = w_m^{(i)}/\delta; \quad (c^{(i)})^2 = E^{(i)}/[\rho_0^{(i)}(1 - (\mu_0^{(i)})^2)], \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

$$p = p_0 + \rho R_2 \frac{w_m^{(1)}\omega^2}{\psi \text{Re}} \left\langle P - \text{Re} \left[ \frac{\psi E_z}{w_m^{(1)}} f_{z0}''(\tau) \cos \theta + \frac{\psi E_x}{w_m^{(1)}} f_{x0}''(\tau) \sin \theta \right] \right\rangle,$$

$$\ddot{x}_0 = \omega^2 E_x f_{x0}''(\tau), \quad \ddot{z}_0 = \omega^2 E_z f_{z0}''(\tau), \quad \lambda^{(2)} = (w_m^{(2)}/w_m^{(1)})\lambda^{(1)}, \quad \text{Re} = \delta^2\omega/v,$$

где верхний индекс  $i = 1$  относится к внешней оболочке, а индекс  $i = 2$  – к внутренней оболочке;  $E^{(i)}$  – модуль Юнга;  $\mu_0^{(i)}$  – коэффициент Пуассона;  $\rho_0^{(i)}$  – плотность материала;  $R^{(i)}$  – радиус срединной поверхности;  $h_0^{(i)}$  – толщина оболочки;  $u_3^{(i)}$  – прогибы оболочек, положительные в сторону

противоположную центру кривизны;  $u_1^{(i)}$  – продольные перемещения оболочек, положительные в сторону, противоположную оси  $Oy$ ;  $u_2^{(i)}$  – окружное упругое перемещение оболочки в окружном направлении срединной поверхности оболочки;  $\omega$  – частота (рад/с);  $w_m^{(i)}$  – характерный прогиб соответствующей оболочки;  $u_m^{(i)}$  – характерное продольное перемещение соответствующей оболочки;  $V_r, V_\theta, V_y$  – компоненты скорости жидкости;  $p_0$  – уровень отсчета давления. Параметры  $\psi$ ,  $\lambda^{(i)}$  малы по сравнению с единицей, что означает малую по сравнению с радиусами трубы ширину цилиндрической щели и малые по сравнению с шириной цилиндрической щели прогибы оболочек.

Следует отметить, что колебательное число Рейнольдса (Re), используемое в работе, является критерием подобия, введенным Л.Г. Лойцяным, и равно произведению классического числа Рейнольдса ( $R = \delta V/\nu$ ) на число Струхала ( $Sh = \delta\omega/V$ ).

Задача решается методом возмущений. За малый параметр принимается относительная ширина цилиндрической щели  $\psi \ll 1$ . Уравнения динамики жидкости и внутренней и внешней оболочек в нулевом приближении по  $\psi$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \xi} = 0, \quad \text{Re} \left[ \frac{\partial u_\theta}{\partial \tau} + \lambda^{(1)} \left( u_\xi \frac{\partial u_\theta}{\partial \xi} + u_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_\zeta \frac{\partial u_\theta}{\partial \zeta} \right) \right] &= -\frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \xi^2}, \quad (2) \\ \text{Re} \left[ \frac{\partial u_\zeta}{\partial \tau} + \lambda^{(1)} \left( u_\xi \frac{\partial u_\zeta}{\partial \xi} + u_\theta \frac{\partial u_\zeta}{\partial \theta} + u_\zeta \frac{\partial u_\zeta}{\partial \zeta} \right) \right] &= -\left( \frac{2R_2}{l_2} \right)^2 \frac{\partial P}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 u_\zeta}{\partial \xi^2}, \\ \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\zeta}{\partial \zeta} &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{(c^{(i)})^2 \rho_0^{(i)} h_0^{(i)}}{(R^{(i)})^2} \left\{ \left( \frac{2R^{(i)}}{l_2} \right) u_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_1^{(i)}}{\partial \zeta^2} + \frac{1-\mu_0^{(i)}}{2} u_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_1^{(i)}}{\partial \theta^2} - \right. \\ &-\frac{1+\mu_0^{(i)}}{2} \left( \frac{2R^{(i)}}{l_2} \right) v_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_2^{(i)}}{\partial \zeta \partial \theta} - \mu_0^{(i)} \left( \frac{2R^{(i)}}{l_2} \right) w_m^{(i)} \frac{\partial U_3^{(i)}}{\partial \zeta} \left. \right\} - \rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \omega^2 u_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_1^{(i)}}{\partial \tau^2} = 0; \\ &\frac{(c^{(i)})^2 \rho_0^{(i)} h_0^{(i)}}{(R^{(i)})^2} \left\{ -\frac{1+\mu_0^{(i)}}{2} \frac{2R^{(i)}}{l_2} u_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_1^{(i)}}{\partial \zeta \partial \theta} + \frac{1-\mu_0^{(i)}}{2} \left( \frac{2R^{(i)}}{l_2} \right)^2 v_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_2^{(i)}}{\partial \zeta^2} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + v_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_2^{(i)}}{\partial \theta^2} + w_m^{(i)} \frac{\partial U_3^{(i)}}{\partial \theta} + (a_0^{(i)})^2 v_m^{(i)} \left[ 2(1 - \mu_0^{(i)}) \left( \frac{2R^{(i)}}{l_2} \right)^2 \frac{\partial^2 U_2^{(i)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 U_2^{(i)}}{\partial \theta^2} \right] - \\
& - (a_0^{(i)})^2 w_m^{(i)} \left[ (2 - \mu_0^{(i)}) \left( \frac{2R^{(i)}}{l_2} \right)^2 \frac{\partial^3 U_3^{(i)}}{\partial \zeta^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 U_3^{(i)}}{\partial \theta^3} \right] \Big\} - \\
& - \rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \omega^2 \left( \frac{W_{1x1}}{\omega^2} \cos \theta - \frac{W_{1z1}}{\omega^2} \sin \theta + v_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_2^{(i)}}{\partial \tau^2} \right) = 0, \quad (3) \\
& \frac{(c^{(i)})^2 \rho_0^{(i)} h_0^{(i)}}{(R^{(i)})^2} \left\{ -\mu_0^{(i)} \frac{2R^{(i)}}{l_2} u_m^{(i)} \frac{\partial U_1^{(i)}}{\partial \zeta} + v_m^{(i)} \frac{\partial U_2^{(i)}}{\partial \theta} - \right. \\
& - (a_0^{(i)})^2 v_m^{(i)} \left[ (2 - \mu_0^{(i)}) \left( \frac{2R^{(i)}}{l_2} \right)^2 \frac{\partial^3 U_2^{(i)}}{\partial \zeta^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 U_2^{(i)}}{\partial \theta^3} \right] + w_m^{(i)} U_3^{(i)} + \\
& + (a_0^{(i)})^2 w_m^{(i)} \left[ \left( \frac{2R^{(i)}}{l_2} \right)^4 \frac{\partial^4 U_3^{(i)}}{\partial \zeta^4} + 2 \left( \frac{2R^{(i)}}{l_2} \right)^2 \frac{\partial^4 U_3^{(i)}}{\partial \zeta^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 U_3^{(i)}}{\partial \theta^4} \right] \Big\} - \\
& - \rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \omega^2 \left( \frac{W_{1x1}}{\omega^2} \sin \theta + \frac{W_{1z1}}{\omega^2} \cos \theta + w_m^{(i)} \frac{\partial^2 U_3^{(i)}}{\partial \tau^2} \right) = (-1)^i q_n^{(i)} \Big|_{\xi=\xi_*^{(i)}},
\end{aligned}$$

где  $\xi_*^{(1)} = 1 + \lambda^{(1)} U_3^{(1)}$ ,  $\xi_*^{(2)} = \lambda^{(2)} U_3^{(2)}$ .

Граничные условия на непроницаемых поверхностях и условия жесткого защемления по торцам в нулевом приближении по  $\psi$  запишутся в виде:

$$u_\xi = \frac{\partial U_3^{(1)}}{\partial \tau}; u_\theta = 0; u_\zeta = 0 \text{ при } \xi = \xi_*^{(1)}, \quad (4)$$

$$u_\xi = \frac{w_m^{(2)}}{w_m^{(1)}} \frac{\partial U_3^{(2)}}{\partial \tau}; u_\theta = 0; u_\zeta = 0 \text{ при } \xi = \xi_*^{(2)},$$

$$P = P^+ \text{ при } \zeta = 1, P = P^- \text{ при } \zeta = -1, \quad (5)$$

$$U_1^{(i)} = U_2^{(i)} = U_3^{(i)} = \frac{\partial U_3^{(i)}}{\partial \zeta} = 0 \text{ при } \zeta = \pm 1. \quad (6)$$

Таким образом, представленная система (2), (3) с учетом граничных условий (4)-(6) позволяет определить необходимые давление и скорости жидкости и упругие перемещения оболочек с заданными параметрами механической системы (радиус, длина, толщина, плотность и модуль Юнга оболочек, плотность и вязкость жидкости).

Для решения получившейся задачи упругогидродинамики применяется метод возмущений. За малый параметр принимается

относительный прогиб оболочек  $\lambda^{(i)}$ , который считается величиной, значительно меньше единицы, что применительно к реальным механическим системам действительно имеет место. Введенные в рассмотрение указанные малые параметры  $\lambda^{(i)}$  позволяют линеаризовать задачу.

Для решения получающейся линейной задачи определяется частное решение неоднородных линейных уравнений в виде гармонических функций по времени с коэффициентами, зависящими от координат. Общее решение соответствующего однородного уравнения не определяется и переходный процесс не исследуется, так как в колебательных системах присутствует демпфирующий слой жидкости, окружающий цилиндрическую оболочку. Наличие демпфирования приводит к тому, что переходный процесс со временем быстро затухает, влияние начальных условий перестает сказываться на колебаниях и возникают установившиеся (периодические или гармонические) вынужденные колебания. Следовательно, при процессах, более длительных, чем переходный, общее решение однородных уравнений и начальные условия можно отбросить с самого начала.

Решение представляется в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра  $\lambda^{(1)}$ :

$$P = P_0 + \lambda^{(1)}P_1 + \dots, \quad (7)$$

$$u_\theta = u_{\theta 0} + \lambda^{(1)}u_{\theta 1} + \dots, \quad u_\xi = u_{\xi 0} + \lambda^{(1)}u_{\xi 1} + \dots, \quad u_\zeta = u_{\zeta 0} + \lambda^{(1)}u_{\zeta 1} + \dots,$$

$$U_1^{(i)} = U_{10}^{(i)} + \lambda^{(i)}U_{11}^{(i)} + \dots, \quad U_2^{(i)} = U_{20}^{(i)} + \lambda^{(i)}U_{21}^{(i)} + \dots, \quad U_3^{(i)} = U_{30}^{(i)} + \lambda^{(i)}U_{31}^{(i)} + \dots$$

Разложения (6) подставляются в уравнения динамики жидкости (2) и оболочки (3), представляющие уравнения для первого члена разложения по  $\psi$ , а также в граничные условия (4), (6) со снесением их на невозмущенную поверхность (разложением в ряд Тейлора искомых величин на этой поверхности).

Таким образом, предложен метод решения нелинейной динамической задачи. Построенная математическая модель и метод ее решения являются общими для всех решаемых в работе задач.

*Во второй главе* рассматривается частный случай общей задачи, представленной в главе 1, применительно к цилиндрической трубе кольцевого профиля, под воздействием гармонически изменяющегося давления на входе и выходе из трубы. Найдены амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики внутренней и внешней оболочек. Кроме того, рассмотрены частные случаи механической системы: внешняя оболочка абсолютно жесткая, а внутренняя – упругая, и наоборот, внутренняя оболочка абсолютно жесткая, а внешняя – упругая.

Примерами использования такой модели можно считать системы охлаждения и подогрева топлива жидкостных ракетных двигателей, системы смазки силовых гидроцилиндров, где жидкость проходит по кольцевой трубе, а во внутренней трубе либо находится газ постоянного давления, либо внутренняя труба полая.

Рассматривается трубопроводная система кольцевого профиля с упругими внутренней и внешней оболочками конечной длины, взаимодействующими с пульсирующей вязкой несжимаемой жидкостью под действием гармонически изменяющегося давления на входе и выходе, с целью определения и регулирования колебаний системы «оболочка-жидкость». Давление в ламинарном потоке может иметь гармоническую составляющую (пульсировать) за счет работы насосов. Это приводит к возникновению существенных колебаний трубопроводных систем. На резонансных частотах скорости упругих перемещений стенок трубопровода будут максимальны, а это может приводить, как показали эксперименты Н.Н. Иванченко, А.А. Скуридина, А.А. Симдянкина и других, к появлению разрывов в жидкости и возникновению вибрационной кавитации в жидкости. Пузырьки газа, схлопываясь на стенках, приводят к повреждению стенок трубопровода. Возникает кавитационный износ.

Так как механическая модель симметрична относительно оси  $Oy$ , то можно упростить постановку задачи, рассмотрев осесимметричный случай. Применяя предложенное в первой главе упрощение и решая полученную в нулевом приближении по относительному прогибу внешней оболочки задачу, получим необходимые выражения для безразмерных давления и компонент скорости жидкости, с выражениями для неизвестных упругих перемещений оболочек. Подставляя выражения для давления и компонент скорости жидкости в уравнения динамики оболочек (3), получим систему интегродифференциальных уравнений.

Для решения задачи динамики упругой замкнутой цилиндрической оболочки применяется метод Бубнова-Галеркина в двух приближениях, из-за наличия несимметричности при перепаде давления, при этом форму упругих перемещений будем искать в виде:

$$\begin{aligned} u_1^{(i)} &= \zeta(1 - \zeta^2)(u_{110}^{(i)} + u_{11}^{(i)}) + (1 - \zeta^2)^2(u_{120}^{(i)} + u_{12}^{(i)}), \\ u_3^{(i)} &= (1 - \zeta^2)^2(u_{310}^{(i)} + u_{31}^{(i)}) + \zeta(1 - \zeta^2)^2(u_{320}^{(i)} + u_{32}^{(i)}). \end{aligned} \quad (8)$$

В рассматриваемой задаче нагрузка является распределенной, с гладким изменением по продольной и окружной координатам, без резких изменений и скачков. Сосредоточенная нагрузка отсутствует.

Вышеуказанное дает основание считать, что выбранная форма перемещений приводит к достаточно точным результатам уже в первых приближениях по методу Бубнова-Галеркина для искомых характеристик.

В результате решения находятся выражения для прогибов внутренней и внешней оболочек:

$$\begin{aligned}
u_3^{(2)} &= u_{310}^{(2)} + A_{31}^{(2)}(\omega) \left[ \cos \Psi (p^+ + p^-) + \sin \Psi \frac{d}{dt} (p^+ + p^-) \right] + \\
&+ u_{320}^{(2)} + A_{32}^{(2)}(\omega) \left[ \cos \Phi (p^+ - p^-) + \sin \Phi \frac{d}{dt} (p^+ - p^-) \right], \\
u_3^{(1)} &= u_{310}^{(1)} + A_{31}^{(1)}(\omega) \left[ \cos \Theta (p^+ + p^-) + \sin \Theta \frac{d}{dt} (p^+ + p^-) \right] + \\
&+ u_{320}^{(1)} + A_{32}^{(1)}(\omega) \left[ \cos H (p^+ - p^-) + \sin H \frac{d}{dt} (p^+ - p^-) \right],
\end{aligned}$$

где  $p^\pm = \rho R_2 \frac{w_m^{(1)} \omega^2}{\psi \text{Re}} P^\pm$ ,

а также их амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики, которые имеют вид:

$$A_{31}^{(2)}(\omega) = \frac{1}{2} B \sqrt{de^2 \frac{Det_1^2 + Det_2^2}{D^2}}, \quad A_{32}^{(2)}(\omega) = \frac{1}{2} C \sqrt{\det^2 \frac{Deter_1^2 + Deter_2^2}{F^2}}, \quad (9)$$

$$A_{31}^{(1)}(\omega) = \frac{1}{2} B \sqrt{de^2 \frac{\left( \frac{de_2}{de} Det_1 \right)^2 + \left( Det_2 - \frac{de_1}{de} Det_1 \right)^2}{D^2}},$$

$$A_{32}^{(1)}(\omega) = \frac{1}{2} C \sqrt{\det^2 \frac{\left( \frac{\det_2}{\det} Deter_1 \right)^2 + \left( Deter_2 - \frac{\det_1}{\det} Deter_1 \right)^2}{F^2}},$$

$$\Psi = \arctg \frac{Det_1}{Det_2}, \quad \Theta = \arctg \frac{de_2 \cdot Det_1}{de \cdot Det_2 - de_1 \cdot Det_1},$$

$$\Phi = \arctg \frac{Deter_1}{Deter_2}, \quad H = \arctg \frac{\det_2 \cdot Deter_1}{\det \cdot Deter_2 - \det_1 \cdot Deter_1}.$$

Кроме того, переходя к абсолютно жесткой внутренней или внешней оболочке, получим амплитудно-частотные характеристики для кольцевых труб с упругой внешней оболочкой, но абсолютно жесткой внутренней, и абсолютно жесткой внешней оболочкой, но упругой внутренней оболочкой:

$$tA_{31}^{(i)}(\omega) = \frac{1}{2} B \sqrt{\frac{(R^{(i)})^4 (a_{11}^{(i)})^2}{(c^{(i)} \rho_0^{(i)} h_0^{(i)})^2 Y_1^{(i)}}}, \quad tA_{32}^{(i)}(\omega) = \frac{1}{2} C \sqrt{\frac{(R^{(i)})^4 (c_{11}^{(i)})^2}{(c^{(i)} \rho_0^{(i)} h_0^{(i)})^2 Y_2^{(i)}}}. \quad (10)$$

Расчеты по формулам (9) и (10) в широком диапазоне параметров показали, что поведение трубы с двумя упругими оболочками не является линейной комбинацией влияния моделей только с внутренней или только с



внешней упругими оболочками. Большое количество частот с небольшим коэффициентом динамичности (отношением величины АЧХ на этой частоте к величине АЧХ на частоте равной нулю) можно объяснить учетом инерции движения жидкости.

В табл. 1 приведены резонансные частоты и соответствующие им амплитуды для кольцевой трубы с двумя упругими оболочками.

Таблица 1

Частота $\omega$ , рад/с	$A_{31}^{(1)}(\omega)$ , м/Па	$A_{31}^{(2)}(\omega)$ , м/Па	Частота $\omega$ , рад/с	$A_{32}^{(1)}(\omega)$ , м/Па	$A_{32}^{(2)}(\omega)$ , м/Па
4881	9,35E-09	1,58E-09	6682	1,86E-08	2,85E-09
34716	1,79E-08	1,85E-08	21092	9,01E-09	1,28E-08
39944	4,97E-08	4,93E-08	22517	5,39E-08	5,04E-08
45788	9,50E-09	9,88E-09	39051	2,18E-08	2,33E-08

В табл. 2 приведены резонансные частоты и соответствующие им амплитуды для кольцевой трубы с упругой только внешней оболочкой (I) и с упругой только внутренней оболочкой (II).

Таблица 2

I				II			
Частота $\omega$ , рад/с	$tA_{31}^{(1)}(\omega)$ , м/Па	Частота $\omega$ , рад/с	$tA_{32}^{(1)}(\omega)$ , м/Па	Частота $\omega$ , рад/с	$tA_{31}^{(2)}(\omega)$ , м/Па	Частота $\omega$ , рад/с	$tA_{32}^{(2)}(\omega)$ , м/Па
5259	9,77E-09	7125	1,95E-08	12300	2,73E-09	16252	5,66E-09
39806	4,69E-10	21355	3,76E-09	44804	3,93E-10	25054	2,96E-09

Из табл. 1 следует, что значения резонансных частот для внутренней и внешней оболочек совпадают для  $A_{31}^{(1)}(\omega)$  и  $A_{31}^{(2)}(\omega)$ , так же как и для  $A_{32}^{(1)}(\omega)$  и  $A_{32}^{(2)}(\omega)$ , а резонансные частоты для  $A_{31}^{(1)}(\omega)$  и  $A_{32}^{(1)}(\omega)$  не совпадают, так же как и для  $A_{31}^{(2)}(\omega)$  и  $A_{32}^{(2)}(\omega)$ . Значения резонансных частот для модели с двумя упругими оболочками нельзя получить суперпозицией резонансных частот частных случаев, имеющих только одну упругую оболочку (табл. 1, 2).

Знание амплитудно-частотных характеристик позволяет уже на этапе проектирования выбрать размеры и материалы кольцевой трубы таким образом, чтобы резонансные частоты сдвинулись из рабочей области частот или из области возможного возникновения кавитации. Рабочая область частот – это частоты вибрации, наблюдаемые в процессе функционирования прибора или агрегата. Изменением типоразмеров механической системы также можно увеличить или уменьшить количество значимых резонансных частот. Так, например, чтобы уменьшить амплитуду колебаний, необходимо увеличить вязкость жидкости или уменьшить цилиндрический зазор. Расчеты показали, что давление в слое жидкости может достигать значений ниже 0,2 атмосферы – пороговому значению давления для возникновения кавитации. Из литературы известны

экспериментальные данные по уменьшению массы упругой гильзы ДВС из-за воздействия кавитации, которые позволили выявить закон кавитационного износа оболочек и смоделировать процесс уменьшения массы упругих оболочек, применительно к трубе кольцевого профиля.

Приведены графики АЧХ  $A_{31}^{(1)}(\omega)$  (2) и  $A_{32}^{(2)}(\omega)$  (1) (рис. 3) и графики АЧХ  $A_{32}^{(1)}(\omega)$  (2) и  $A_{31}^{(2)}(\omega)$  (1) (рис. 4).

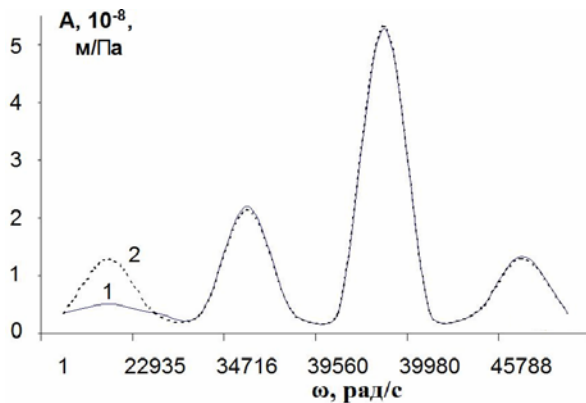


Рис. 3

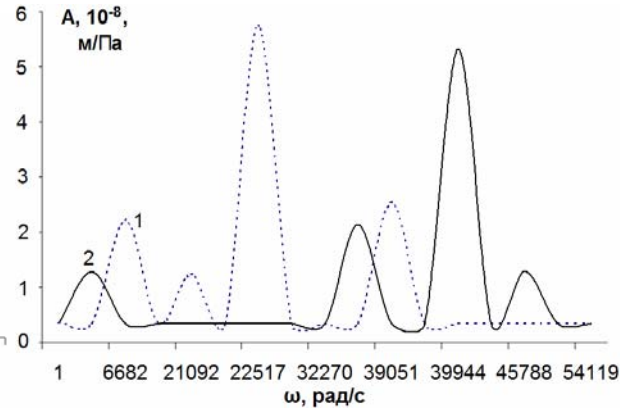


Рис. 4

В третьей главе рассматривается модель силового цилиндра с упругими внутренней и внешней оболочками под действием переносного виброускорения, при этом предполагается свободное истечение жидкости в торцы и отсутствие торцевого истечения. Найдены амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики внутренней и внешней оболочек.

Применяя метод, описанный в главе 1, и решая уравнения динамики жидкости, так же как и ранее, получим систему интегродифференциальных уравнений с неизвестными прогибами. Уравнения динамики оболочек решаются методом Бубнова-Галеркина в первом приближении, так как механическая система симметрична, в предположении гармонического закона движения основания, к которому крепится механическая система, при этом упругие перемещения оболочек представляются в виде:

$$\begin{aligned} u_{10}^{(i)} &= u_m^{(i)} U_{10}^{(i)} = u_m^{(i)} \zeta (1 - \zeta^2) \left\{ (a_{10C}^{(i)} \cos \theta + a_{10S}^{(i)} \sin \theta) \sin(\tau + \varphi_{u1}^{(i)}) + a_{10O}^{(i)} \right\}, \\ u_{20}^{(i)} &= v_m^{(i)} U_{20}^{(i)} = v_m^{(i)} (1 - \zeta^2) \left\{ a_{20S}^{(i)} \cos \theta + a_{20C}^{(i)} \sin \theta + a_{20O}^{(i)} \right\} \sin(\tau + \varphi_{u2}^{(i)}), \\ u_{30}^{(i)} &= w_m^{(i)} U_{30}^{(i)} = w_m^{(i)} (1 - \zeta^2)^2 \left\{ (a_{30C}^{(i)} \cos \theta + a_{30S}^{(i)} \sin \theta) \sin(\tau + \varphi_{u3}^{(i)}) + a_{30O}^{(i)} \right\}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (11)$$

Как и ранее,  $i = 1$  относится к внешней оболочке, а  $i = 2$  — к внутренней.

В результате находятся упругие перемещения оболочек

$$\begin{aligned} u_{30}^{(i)} &= -(1 - \zeta^2)^2 a_{30O}^{(i)} + A^{(i)}(\omega) (1 - \zeta^2)^2 \times \\ &\times \left[ E_z \omega^2 \cos \theta \sin(\omega t + \varphi_{z0} + \eta^{(i)}(\omega)) + E_x \omega^2 \sin \theta \sin(\omega t + \varphi_{x0} + \eta^{(i)}(\omega)) \right], \end{aligned}$$

а также их амплитудно-частотные характеристики:

$$A^{(i)}(\omega) = \sqrt{\frac{\text{num}^{(i)}}{\text{den}}}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{где } \text{num}^{(i)} = & \left(a_{11}^{(j)} a_{11}^{(i)} de_1^{(j)} g_1^{(i)} b_{33}^{(j)}\right)^2 + 2\left(a_{11}^{(j)} a_{11}^{(i)}\right)^2 de_1^{(j)} de_1^{(i)} g_1^{(j)} g_1^{(i)} b_{33}^{(j)} b_{33}^{(i)} + \\ & + \left(a_{11}^{(j)} a_{11}^{(i)} de_1^{(i)} g_1^{(j)} b_{33}^{(i)}\right)^2 + 4w\varepsilon^2 a_{11}^{(j)} \left(a_{11}^{(i)}\right)^2 de_1^{(i)} g_1^{(i)} g_1^{(j)} g_2^{(j)} B_0^{(i)} + \\ & + 4w^2 \varepsilon^4 \left(a_{11}^{(j)} a_{11}^{(i)} de_1^{(i)} g_1^{(j)} B_0^{(i)}\right)^2 + \left(a_{11}^{(i)} g_1^{(i)} g_1^{(j)}\right)^2, \quad i=1,2, \quad j=1,2, \quad i \neq j; \\ \text{den} = & \left(g_2^{(1)} g_2^{(2)}\right)^2 + \left(288v^2 - 8w^2 \varepsilon^4\right) a_{11}^{(1)} a_{11}^{(2)} de_1^{(1)} de_1^{(2)} g_2^{(1)} g_2^{(2)} B_0^{(1)} B_0^{(2)} + \\ & + \left(16w^2 \varepsilon^4 + 2304v^2\right) w^2 \varepsilon^4 \left(a_{11}^{(1)} a_{11}^{(2)} de_1^{(1)} de_1^{(2)} B_0^{(1)} B_0^{(2)}\right)^2 + 144v^2 \left(de_1^{(1)} a_{11}^{(1)} g_2^{(2)} B_0^{(1)}\right)^2 + \\ & + 144v^2 \left(de_1^{(2)} a_{11}^{(2)} g_2^{(1)} B_0^{(2)}\right)^2 - 1152v^2 w \varepsilon^2 \left(a_{11}^{(1)} de_1^{(1)} B_0^{(1)}\right)^2 a_{11}^{(2)} g_2^{(2)} de_1^{(2)} B_0^{(2)} - \\ & - 1152v^2 w \varepsilon^2 a_{11}^{(1)} g_2^{(1)} de_1^{(1)} B_0^{(1)} \left(a_{11}^{(2)} de_1^{(2)} B_0^{(2)}\right)^2. \end{aligned}$$

Расчеты показывают, что в данном случае механическая система имеет свои резонансные частоты, отличные от резонансных частот каждой из оболочек. Кроме того, так же как и для случая воздействия гармонического перепада давления при изменении размеров возможно изменение количества значимых резонансных частот.

В табл. 3 приведены резонансные частоты и соответствующие им амплитуды внутренней и внешней оболочек силового цилиндра.

Таблица 3

Закрытые торцы			Открытые торцы		
Частота $\omega$ , рад/с	$A^{(1)}(\omega)$ , $c^2$	$A^{(2)}(\omega)$ , $c^2$	Частота $\omega$ , рад/с	$A^{(1)}(\omega)$ , $c^2$	$A^{(2)}(\omega)$ , $c^2$
3076	1,84E-05	5,05E-06	3434	2,25E-05	4,73E-06
10409	2,78E-03	2,95E-03	11383	1,08E-03	1,19E-03
27228	8,68E-09	6,34E-09	27383	8,90E-07	5,97E-07
42833	4,15E-08	9,76E-07	42861	7,50E-07	3,17E-07
47256	3,71E-06	3,96E-06	47851	1,28E-06	1,39E-06
59083	1,17E-05	1,27E-05	60680	8,24E-06	9,15E-06

Из табл. 3 следует, что значения резонансных частот для внутренней и внешней оболочек совпадают для  $A^{(1)}(\omega)$  и  $A^{(2)}(\omega)$ , то есть механическая система начинает работать как единое целое.

Амплитудно-частотные характеристики позволяют уже на этапе проектирования выбрать размеры и материалы кольцевой трубы таким образом, чтобы резонансные частоты сдвинулись из рабочей области частот или области возможного возникновения кавитации. Так, например, увеличением толщины внутренней оболочки можно сдвинуть резонансные частоты в диапазон высоких частот. Давление в слое жидкости в этом случае также может достигать значений ниже 0,2 атмосферы, что соответствует пороговому значению давления для возникновения кавитации. Используя закон кавитационного износа упругих оболочек,

полученный ранее, смоделирован процесс уменьшения массы упругих оболочек, применительно к силовому цилиндру.

В четвертой главе рассматривается практически важный частный случай задачи, рассмотренной в главе 3, – двигатель внутреннего сгорания с водяным охлаждением и упругой рубашкой (внешняя оболочка упругая, а внутренняя абсолютно жесткая) при различных условиях истечения жидкости (свободное истечение и отсутствие истечения) при воздействии поступательной вибрации. Данная модель получается из модели силового цилиндра в предположении, что внутренняя оболочка абсолютно жесткая. Найдены амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики.

Для простоты записи верхний индекс (1) опускается. В результате получены амплитудно-частотные характеристики упругой рубашки:

$$A(\omega) = \frac{4 R^2}{3 c^2} \frac{\left( \frac{4}{5} \left( \frac{\rho R_2}{\rho_0 h_0} + 1 \right) de_1 - de_2 \right)}{\sqrt{de_8}}. \quad (13)$$

В табл. 4 приведены резонансные частоты и соответствующие им амплитуды.

Таблица 4

Свободное истечение		Отсутствие истечения	
Частота $\omega$ , рад/с	$A(\omega)$ , $c^2$	Частота $\omega$ , рад/с	$A(\omega)$ , $c^2$
3718	3,47E-05	3416	3,21E-05
26074	5,33E-06	25924	5,50E-06
42873	3,47E-06	42866	3,51E-06

Расчеты по формуле (13) показали, что обычно будут наблюдаться три резонансных частоты. Первая резонансная частота лежит в области низких частот, вторая резонансная частота находится в области средних частот, а третья – в области высоких частот колебаний. Увеличением ширины цилиндрического зазора можно сдвинуть резонансные частоты в область более высоких частот.

Кроме того, в зависимости от типоразмеров механической системы влияние истечения жидкости может сказываться в большей или меньшей степени, но не учитывать влияние истечения жидкости в торцы нельзя, так как наблюдается смещение резонансных частот в зависимости от типа истечения. В таблицах показаны частоты и значения наибольших прогибов внешней оболочки ДВС, на которых может возникать кавитационный эффект. Давление в слое жидкости ДВС может достигать значений ниже порогового значения.

В пятой главе рассматриваются поплавковые приборы навигации (поплавковый гироскоп и поплавковый маятниковый акселерометр) с упругим корпусом прибора со свободным истечением жидкости в торцы и при отсутствии истечения жидкости в торцы при наличии поступательного

виброускорения. Найдена постоянная составляющая гидродинамического возмущающего момента поплавкового гироскопа и поплавкового маятникового акселерометра при симметричном истечении жидкости в торцы, определяющего погрешность поплавковых приборов навигации.

Модель поплавковых приборов навигации получается из модели двигателя внутреннего сгорания с водяным охлаждением и упругой рубашкой снятием ограничения на перемещение абсолютно жесткой внутренней оболочки, которую можно записать в виде (2), (3), (6), а граничные условия на непроницаемых поверхностях запишутся в виде:

$$u_{\xi} = \frac{w_m}{e} \frac{\partial U_3}{\partial \tau}; \quad u_{\theta} = 0; \quad u_{\zeta} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 1 + \lambda \frac{w_m}{e} U_3; \quad (14)$$

$$u_{\xi} = \frac{z_{1m}}{e} f'_{z1}(\tau) \cos(\theta + \varphi) + \frac{x_{1m}}{e} f'_{x1}(\tau) \sin(\theta + \varphi);$$

$$u_{\theta} = 0; \quad u_{\zeta} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \lambda \cos \theta.$$

При этом величина  $\lambda$  определяется как отношение эксцентриситета  $e$  (расстояния между центрами масс корпуса и поплавок) к ширине цилиндрической щели  $\delta$  и называется относительным эксцентриситетом.

Кроме того, совместно с задачей (2), (3), (14), (6) необходимо рассматривать уравнения движения абсолютно жестких поплавка и ротора гироскопа:

$$m_2 [\ddot{x}_0 + \ddot{x}_1] = -n_0 x_1 + N_{2x1}; \quad m_2 [\ddot{z}_0 + \ddot{z}_1] = -n_0 z_1 + N_{2z1}; \quad (15)$$

$$m_3 (\ddot{x}_0 + \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k_{x2} \dot{x}_2 - n_{x2} x_2; \quad m_3 (\ddot{z}_0 + \ddot{z}_1 + \ddot{z}_2) = -k_{z2} \dot{z}_2 - n_{z2} z_2,$$

где  $m_2, m_3$  – массы поплавок и ротора, соответственно;  $k_{x2}, k_{z2}$  – удельные коэффициенты демпфирования колебания ротора в опорах;  $n_{x2}, n_{z2}$  – коэффициенты, характеризующие упругую жесткость опор ротора;  $x_1, z_1$  – перемещения поплавок;  $x_2, z_2$  – перемещения ротора, а силы и моменты, действующие на поплавок, имеют вид

$$N_{2x1} = N_{2x1}^1 - n_{x1} x_1 + n_{x2} x_2 + k_{x2} \dot{x}_2; \quad N_{2y1} = 0;$$

$$N_{2z1} = N_{2z1}^1 - n_{z1} z_1 + n_{z2} z_2 + k_{z2} \dot{z}_2; \quad (16)$$

$$L_{2x2} = L_{2x2}^1 + L_{2x2}^2 + L_{2x2}^3; \quad L_{2y2} = L_{2y2}^1 + L_{2y2}^2 + L_{2y2}^3 + L_{2y2}^4;$$

$$L_{2z2} = L_{2z2}^1 + L_{2z2}^2 + L_{2z2}^3.$$

Здесь  $N_{2x1}^1, N_{2z1}^1$  – компоненты гидромеханической силы поддерживающего слоя;  $L_{2x2}^1, L_{2y2}^1, L_{2z2}^1$  – гидромеханические реакции со стороны слоя жидкости;  $L_{2x2}^2, L_{2y2}^2, L_{2z2}^2$  – моменты со стороны опор поплавок (инерционный возмущающий момент);  $L_{2x2}^3, L_{2y2}^3, L_{2z2}^3$  – моменты

со стороны ротора гидромотора;  $L_{2y2}^4$  – корректирующий и управляющий момент от датчика моментов.

Далее рассматривается вынужденное движение системы, состоящей из упругой замкнутой цилиндрической оболочки, слоя вязкой несжимаемой жидкости и абсолютно жесткого поплавка методом возмущений. Так же как и ранее, решение задачи (2), (3), (14), (6) ищется в виде (7). Как и ранее, в нулевом приближении по  $\lambda$  находятся давление и компоненты скорости жидкости в режиме установившихся гармонических колебаний при вибрации основания, которые при подстановке в уравнения динамики оболочки (3) дают систему интегродифференциальных уравнений. Полученная система решается методом Бубнова-Галеркина в первом приближении, при этом упругие перемещения представляются в виде (11). Определен закон движения абсолютно жестких поплавка и ротора гидромотора с учетом свойств упругой замкнутой цилиндрической оболочки, исходя из второго закона Ньютона:

$$\begin{aligned} z_{1m} \sin(\tau + \varphi_{z1}) &= E_z (A_{01} \sin(\tau + \varphi_{z0}) + A_{02} \cos(\tau + \varphi_{z0})), \\ x_{1m} \sin(\tau + \varphi_{x1}) &= E_x (B_{01} \sin(\tau + \varphi_{x0}) + B_{02} \cos(\tau + \varphi_{x0})), \\ z_{2m} \sin(\tau + \varphi_{z2}) &= E_z (C_{01} \sin(\tau + \varphi_{z0}) + C_{02} \cos(\tau + \varphi_{z0})), \\ x_{2m} \sin(\tau + \varphi_{x2}) &= E_x (D_{01} \sin(\tau + \varphi_{x0}) + D_{02} \cos(\tau + \varphi_{x0})). \end{aligned} \quad (17)$$

Наибольший интерес, с точки зрения практики, представляют силовые динамические характеристики – векторы силы и момента, действующие на поплавок.

Далее определяется возмущающий момент, действующий со стороны слоя жидкости, окружающей поплавков, определяемый вторым членом разложения по степеням малого параметра  $\lambda$  компоненты  $L_{2y2}^1$ , с учетом решения в нулевом приближении по  $\lambda$ , и имеющий вид

$$\begin{aligned} L_{2y2} &= \frac{\rho R_2 e^2 \omega^2}{\psi \operatorname{Re}} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\partial u_{01}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \frac{l_2}{2} d\zeta R_2 d\theta - \\ &- \frac{mG}{\psi \operatorname{Re}} [12\nu\omega(\dot{z}_1 x_1 - \dot{x}_1 z_1) + \operatorname{Re} w(\ddot{z}_1 x_1 - \ddot{x}_1 z_1)] + \\ &+ \frac{m\omega^2}{\psi \operatorname{Re}} F \left[ \frac{8}{15} 12\nu [z_1 w_m a_{30s} \cos(\tau + \varphi_{u3}) - x_1 w_m a_{30c} \cos(\tau + \varphi_{u3})] + \right. \\ &\left. + \frac{4}{15} w \operatorname{Re} [x_1 w_m a_{30c} \sin(\tau + \varphi_{u3}) - z_1 w_m a_{30s} \sin(\tau + \varphi_{u3})] \right], \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\nu, w$  – частотозависимые коэффициенты;  $G, F$  – коэффициенты, зависящие от  $\sigma$ , характеризующие тип истечения жидкости.

При рассмотрении системы абсолютно жестких тел, упругой замкнутой цилиндрической оболочки и вязкой жидкости применительно к

поплавковым приборам, необходимы определение и исследование постоянной составляющей момента (10). Постоянная составляющая момента (10) – вибрационный возмущающий момент, действующий на поплавков:

$$\langle L_{2y2} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_{2y2} d\tau. \quad (19)$$

Для определения возмущающего момента (18) и его постоянной составляющей (19) решается задача упругогидродинамики в первом приближении по  $\lambda$ . При этом определена входящая в (18), (19) компонента скорости по  $\theta$ , не зависящая от  $\theta$ .

Введем обозначение

$$v_{\theta 1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_{\theta 1} d\theta. \quad (20)$$

При рассмотрении первого приближении по  $\lambda$  учтено, что выражение (20) отлично от нуля, когда  $u_{\theta 1}$  является непериодической функцией  $\theta$ . Так как  $\theta$  входит только под знаком синуса или косинуса в решение задачи в нулевом решении по  $\lambda$ , следовательно, необходимо рассматривать только величины, не зависящие от  $\theta$ . Для определения  $v_{\theta 1}$  решается соответствующее неоднородное уравнение динамики жидкости.

В диссертации получены окончательные выражения для вибрационных гидродинамических возмущающих моментов поплавкового гироскопа и поплавкового маятникового акселерометра, модель которого получается из модели для поплавкового гироскопа исключением ротора гиromотора и введением маятниковой массы.

В поплавковом гироскопе кроме гидродинамического момента на поплавок действует инерционный момент со стороны ротора, перемещающегося в опорах относительно поплавка:

$$L_{III} = m_3 [x_2 (\ddot{z}_2 + \ddot{z}_1 + \ddot{z}_0) - z_2 (\ddot{x}_2 + \ddot{x}_1 + \ddot{x}_0)]. \quad (21)$$

Расчеты показали, что корпус прибора поплавкового гироскопа в рамках данной теории нельзя считать абсолютно жестким ни при каких параметрах прибора как при эллиптической, так и линейной вибрации. Если крепление ротора равножесткое, то  $L_{III} = 0$ . Следует заметить, что инерционный момент оказывает большее влияние на погрешность прибора, чем гидродинамический момент, но при некоторых частотах они становятся одного порядка, в то время как для жесткого корпуса гидродинамический момент на 2÷4 порядка меньше инерционного на всех частотах вибрации. Инерционный момент практически не зависит ни от упругости корпуса, ни от гидродинамики системы.

В табл. 5 приводятся результаты дрейфа нуля для ряда частот для поплавкового гироскопа при воздействии виброускорения  $g$ .

Таблица 5

Открытые торцы				
Частота, Гц	I			
	Упругий корпус		Абсолютно жесткий	
	$\langle L_1^y \rangle / H, \text{ } ^\circ/\text{ч}$	$\langle L^y \rangle / H, \text{ } ^\circ/\text{ч}$	$\langle L_1^T \rangle / H, \text{ } ^\circ/\text{ч}$	$\langle L^T \rangle / H, \text{ } ^\circ/\text{ч}$
2,00E+02	6,65E-02	1,30E-02	6,65E-02	9,21E-06
1,00E+03	7,77E+00	-3,64E-02	7,75E+00	2,62E-02
Частота, Гц	II			
	Упругий корпус		Абсолютно жесткий	
	$\langle L_1^y \rangle / H, \text{ } ^\circ/\text{ч}$	$\langle L^y \rangle / H, \text{ } ^\circ/\text{ч}$	$\langle L_1^T \rangle / H, \text{ } ^\circ/\text{ч}$	$\langle L^T \rangle / H, \text{ } ^\circ/\text{ч}$
2,00E+02	4,00E-02	2,38E-05	4,00E-02	-7,12E-10
1,00E+03	-7,93E-01	9,66E-03	-7,94E-01	-5,50E-03
Закрытые торцы				
Частота, Гц	I			
	Упругий корпус		Абсолютно жесткий	
	$\langle L_1^y \rangle / H, \text{ } ^\circ/\text{ч}$	$\langle L^y \rangle / H, \text{ } ^\circ/\text{ч}$	$\langle L_1^T \rangle / H, \text{ } ^\circ/\text{ч}$	$\langle L^T \rangle / H, \text{ } ^\circ/\text{ч}$
2,00E+02	6,65E-02	1,83E-03	6,65E-02	4,32E-07
1,00E+03	7,85E+00	-1,88E-03	7,85E+00	1,27E-03
Частота, Гц	II			
	Упругий корпус		Абсолютно жесткий	
	$\langle L_1^y \rangle / H, \text{ } ^\circ/\text{ч}$	$\langle L^y \rangle / H, \text{ } ^\circ/\text{ч}$	$\langle L_1^T \rangle / H, \text{ } ^\circ/\text{ч}$	$\langle L^T \rangle / H, \text{ } ^\circ/\text{ч}$
2,00E+02	4,00E-02	2,45E-07	4,00E-02	-3,32E-11
1,00E+03	-8,15E-01	4,94E-04	-8,15E-01	-2,69E-04

Здесь  $\langle L_1^y \rangle / H$ ,  $\langle L_1^T \rangle / H$ ,  $\langle L^y \rangle / H$ ,  $\langle L^T \rangle / H$  – дрейфы нуля для инерционного и гидродинамических моментов с упругим корпусом прибора и абсолютно жестким корпусом прибора, где  $H = 2,88 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$  – кинетический момент ротора гиromотора. (I – эллиптическая вибрация, равножесткое крепление ротора в опорах, II – линейная вибрация, неравножесткое крепление ротора в опорах).

В табл. 6 приводятся результаты отклонения нуля для ряда частот для одного из видов рассматриваемых в работе поплавковых маятниковых акселерометров при воздействии виброускорения 25g.

Таблица 6

Открытые торцы				
Частота, Гц	$\Delta m$ равно 5% $m$		$\Delta m = 0$	
	$\langle L^y \rangle / (m_L L)$ ед.g	$\langle L^T \rangle / (m_L L)$ ед.g	$\langle L^y \rangle / (m_L L)$ ед.g	$\langle L^T \rangle / (m_L L)$ ед.g
1,00E+03	-1,07E-05	-5,88E-07	-1,15E-06	0,00E+00
9,00E+03	-5,09E-02	2,29E-09	-5,12E-02	0,00E+00
Закрытые торцы				
Частота, Гц	$\Delta m$ равно 5% $m$		$\Delta m = 0$	
	$\langle L^y \rangle / (m_L L)$ ед.g	$\langle L^T \rangle / (m_L L)$ ед.g	$\langle L^y \rangle / (m_L L)$ ед.g	$\langle L^T \rangle / (m_L L)$ ед.g
1,00E+03	-8,28E-06	-7,99E-08	-3,75E-06	0,00E+00
9,00E+03	-2,50E-05	3,25E-10	-2,55E-05	0,00E+00



Здесь  $\langle L^y \rangle / (m_L L)$ ,  $\langle L^T \rangle / (m_L L)$  – отклонения нуля для соответственно упругого и абсолютно жесткого корпуса прибора, где  $m_L$  – маятниковая масса на плече  $L$ .

В диссертации приведены расчеты для широкого диапазона параметров (различных материалов и толщин оболочки, ширины цилиндрического зазора, вязкости жидкости). Учет типа истечения жидкости в торцы позволяет более точно определить для конкретных приборов область превышения границ допустимой погрешности. Показано, что для поплавкового гироскопа гидродинамический возмущающий момент сравним по величине с инерционным возмущающим моментом.

Результаты моделирования хорошо согласуются с экспериментом С.Ф. Коновалова по исследованию на вибростенде амплитуд колебаний поплавкового цилиндрического подвеса, радиальный зазор которого значительно меньше радиуса поплавка. Результаты сравнения приведены на рис. 5.

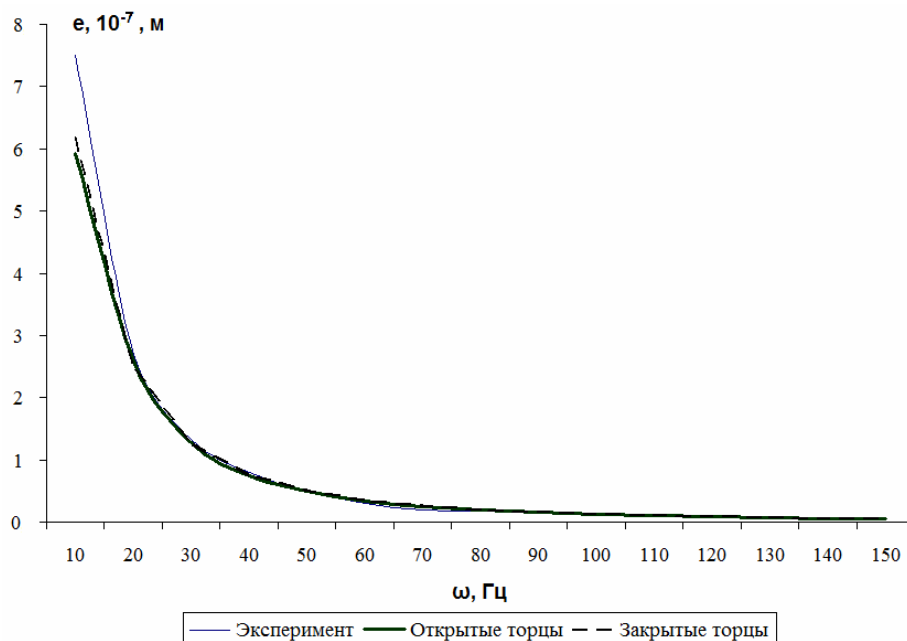


Рис. 5

В шестой главе рассматриваются поплавковые приборы навигации с несимметричным истечением жидкости в торцы под воздействием поступательной и угловой вибраций. Найдена постоянная составляющая гидродинамического возмущающего момента поплавкового гироскопа и поплавкового маятникового акселерометра при несимметричном истечении жидкости в торцы, определяющая погрешность поплавковых приборов навигации.

Предполагается, что торцевая щель слева мала по сравнению с цилиндрической, а торцевая щель справа одного с ней порядка.

Поплавковый гироскоп представляет собой абсолютно жесткий ротор 1 (рис. 6), закрепленный внутри абсолютно жесткого цилиндрического поплавка 2. Поплавок взвешен в вязкой несжимаемой жидкости 3, заполняющей пространство между внешней поверхностью поплавка и внутренней поверхностью корпуса прибора 4, представляющего собой упругую цилиндрическую оболочку с жестким защемлением по торцам, длиной  $l$ , толщиной  $h_0$  и радиусом срединной поверхности  $R$ . Опоры ротора гироскопа обладают упругой податливостью, как и магнитные опоры поплавка 6. Гироскоп крепится к основанию с помощью цанговых закреплений 7.

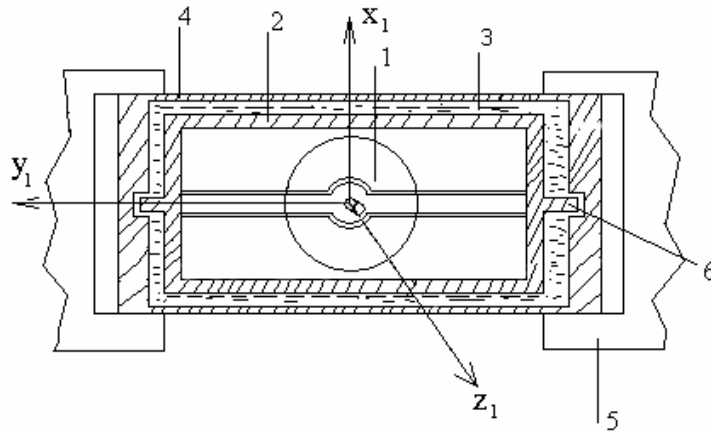


Рис. 6

Математическая модель данной механической системы представляет собой систему, состоящую из уравнений динамики жидкости (2), уравнений динамики оболочки (3), уравнений динамики абсолютно жестких поплавка и ротора гироскопа (15), граничных условий на непроницаемых поверхностях

$$V_r = \frac{\partial u_3}{\partial t}, V_\theta = \frac{\partial u_2}{\partial t}, V_y = -\frac{\partial u_1}{\partial t} \text{ при } r = R_2 + \delta + u_3;$$

$$V_r = \dot{x}_1 \sin(\theta + \varphi) + \dot{z}_1 \cos(\theta + \varphi); \quad (22)$$

$$V_\theta = \dot{x}_1 \cos(\theta + \varphi) - \dot{z}_1 \sin(\theta + \varphi) + (R_2 + e \cos \theta) \dot{\beta}_2, V_y = 0 \text{ при } r = R_2 + e \cos \theta,$$

где  $\beta_2$  – угол поворота поплавка вокруг выходной оси,

условий жесткого защемления (6), а также условий согласования давления и расхода жидкости в правой и левой торцевых щелях.

Проводя процедуру решения, описанную в главе 5, получим выражения для моментов поплавок-гироскопа и поплавок-маятникового акселерометра в виде:

$$\begin{aligned} \langle L_{2y2} \rangle = & E_x E_z (KE_1 \sin(\varphi_{z0} - \varphi_{x0}) + KE_2 \cos(\varphi_{z0} - \varphi_{x0})) + \\ & + E_z r_{1m} (KEr_1 \sin(\varphi_{z0} - \varphi_{r1}) + KEr_2 \cos(\varphi_{z0} - \varphi_{r1})) + \\ & + E_x p_{1m} (KEp_1 \cos(\varphi_{x0} - \varphi_{p1}) + KEp_2 \sin(\varphi_{x0} - \varphi_{p1})) + \end{aligned} \quad (23)$$

$$+ r_{1m} p_{1m} (Krp_1 \cos(\varphi_{r1} - \varphi_{p1}) + Krp_2 \sin(\varphi_{r1} - \varphi_{p1})).$$

Здесь  $KE_1, KE_2, KEr_1, KEr_2, KEp_1, KEp_2, Krp_1, Krp_2$  – известные величины, зависящие от физических свойств и параметров прибора и от частоты  $\omega$ .

Из формулы (21) следует, что поступательные и угловые перемещения для несимметричного истечения жидкости в торцы не разделяются.

В табл. 7 приведены результаты дрейфа нуля гидродинамического момента  $\langle L^y \rangle / H$  (°/ч) для ряда частот для поплавкового гироскопа при воздействии виброускорения  $g$ , при неравножестком креплении ротора в опорах.

Таблица 7

Частота, Гц	I	II	III
2,00E+02	4,52E-07	4,29E-04	4,11E+00
1,00E+03	3,72E-06	1,56E-02	1,30E+01

Здесь I – только поступательная вибрация, II – только угловая вибрация, III – поступательная и угловая вибрации.

В табл. 8 приведены результаты отклонения нуля  $\langle L^y \rangle / (m_L L)$  (ед.g) для ряда частот для поплавкового маятникового акселерометра при воздействии виброускорения 25 g.

Таблица 8

Частота, Гц	I	II	III
$\Delta m$ равно 5% $m$			
1,00E+03	1,24E-07	-4,46E-06	5,90E-01
9,00E+03	-6,74E-08	1,08E-04	6,64E-02
$\Delta m = 0$			
1,00E+03	1,49E-06	-4,46E-06	6,06E-01
9,00E+03	2,38E-06	1,08E-04	1,22E-01

Здесь I – только поступательная вибрация, II – только угловая вибрация, III – поступательная и угловая вибрации.

Из табл. 7, 8 видно, что дрейф (отклонение) нуля для поступательной и угловой вибрации и только угловой выходят за рамки допустимой погрешности прибора. Совокупное значение дрейфа (отклонения) нуля не является простой суммой дрейфов (отклонений) нуля только от поступательной и только от угловой вибраций.

Таким образом, полученные аналитические выражения позволяют на этапе проектирования выявить частоты, на которых значения погрешности выходят за допустимые рамки.

## ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

На основе вышеизложенных результатов можно сделать следующие выводы.

1. В диссертационной работе построена общая математическая модель и предложен общий подход к исследованию классов механических систем, состоящих из соосных цилиндрических оболочек конечной длины, жестко заземленных по торцам, сдавливающих слой вязкой несжимаемой жидкости при воздействии вибрации и гармонического перепада давления на торцах и механических систем, состоящих из упругой замкнутой цилиндрической оболочки, содержащей вязкую жидкость, в которой плавает в состоянии нейтрального равновесия абсолютно жесткое тело, в условиях вибрации. Данный подход позволил сформулировать математические модели кольцевых труб с двумя и одной упругими оболочками, силового цилиндра с полым плунжером, двигателя внутреннего сгорания с водяным охлаждением и упругой рубашкой, поплавковых приборов навигации с упругим корпусом прибора при различных условиях истечения жидкости в торцы (свободное истечение, отсутствие истечения, несимметричное истечение).

2. На основе разработанного подхода предложены и исследованы новые математические модели механических систем. Математическая модель систем упругих, абсолютно жестких и жидких тел представляет собой связанную систему нелинейных уравнений в частных производных Навье–Стокса и неразрывности для описания динамики жидкости, уравнений в частных производных для описания динамики упругих цилиндрических оболочек и обыкновенных дифференциальных уравнений – второго закона Ньютона для описания поступательных перемещений абсолютно жестких элементов рассматриваемых систем и соответствующих граничных условий.

3. Для исследования математической модели сделан переход к безразмерным переменным. Это позволило выделить параметры подобия, в том числе малые параметры задачи. Малые параметры представляют собой относительную толщину слоя жидкости, окруженной упругой цилиндрической оболочкой, относительный прогиб оболочки для кольцевых труб, силового цилиндра и двигателя внутреннего сгорания или относительный эксцентриситет поплавок для поплавковых приборов навигации. При этом колебательное число Рейнольдса  $\delta^2 \omega / \nu$ , характеризующее отношение сил инерции движения жидкости к силам вязкого трения, малым не предполагается.

Метод возмущений применен для исследования математической модели связанной задачи упругогидродинамики для упругой цилиндрической оболочки, взаимодействующей с упругими или

абсолютно жесткими телами через слой вязкой несжимаемой жидкости при гармонической вибрации или гармоническом перепаде давления.

Рассматривается одночленное разложение в ряд по малому параметру  $\psi$  – относительной ширине цилиндрического слоя жидкости, окружаемой упругой цилиндрической оболочкой (как принято в теории смазки) и одночленное разложение в ряд по малому параметру  $\lambda^{(1)}$  ( $\lambda^{(2)}$ ) – относительному прогибу оболочки для кольцевых труб, силового цилиндра и двигателя внутреннего сгорания или двухчленное разложение в ряд по малому параметру  $\lambda$  – относительному эксцентриситету для поплавковых приборов навигации.

Одночленное разложение по малому относительному эксцентриситету приводит к линейной связанной системе уравнений, включающей вышеперечисленные уравнения в частных производных и обыкновенные дифференциальные уравнения. Эта система уравнений может быть решена в предположении установившихся гармонических колебаний либо основания либо давления. При этом исследуется режим вынужденных установившихся колебаний, так как в системе присутствует демпфирование за счет вязкой несжимаемой жидкости, что приводит к быстрому затуханию свободных колебаний и возможности исключить начальные условия с самого начала.

4. Предложенный метод применяется для кольцевой трубы с упругими внутренней и внешней оболочками при воздействии гармонического перепада давления на входе и на выходе из трубы. Модель кольцевой трубы представляется в виде дифференциальных уравнений в частных производных, определяющих динамику жидкости, динамику упругих цилиндрических внутренней и внешней оболочек и соответствующих граничных условий. В результате решения методом Бубнова-Галеркина в двух приближениях определены выражения для прогибов внутренней и внешней оболочек.

Определены амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики внутренней и внешней оболочек. Также определены амплитудно-частотные характеристики кольцевой трубы с упругой внешней, но абсолютно жесткой внутренней оболочкой, и с абсолютно жесткой внешней, но упругой внутренней оболочкой. Показано, что амплитудно-частотные характеристики при двух упругих оболочках не являются линейной комбинацией частных случаев. Кроме того, изменением типоразмеров механической системы можно не только сдвинуть резонансные частоты в необходимый безопасный диапазон частот, но и уменьшить их количество.

Определено, что даже в частных случаях необходимо решать уравнения динамики оболочки в двух приближениях метода Бубнова-Галеркина, так как они определяют прогибы оболочек на сумму и разность

давлений, приложенных на концах, даже если в частном случае положить давление на одном конце равным нулю.

5. Рассматривая в поставленной первоначально модели случай воздействия только поступательной вибрации от внешнего источника, получим модель силового цилиндра с полым плунжером (внутренней оболочкой). Предложенный метод также позволяет найти прогибы внутренней и внешней упругих оболочек и найти их амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики. Важным частным случаем модели силового цилиндра является модель двигателя внутреннего сгорания с водяным охлаждением, получаемая из модели силового цилиндра предельным переходом к абсолютно жесткой внутренней оболочке.

Показано влияние размеров указанной механической системы, свойств жидкости и типа истечения (свободное истечение или отсутствие истечения) жидкости на резонансные частоты и величины амплитудно-частотных характеристик.

6. Важным частным случаем модели силового цилиндра является модель двигателя внутреннего сгорания с водяным охлаждением, получаемая из модели силового цилиндра предельным переходом к абсолютно жесткой внутренней оболочке.

Для двигателя внутреннего сгорания исследовано влияние на резонансные частоты и величины амплитудно-частотных характеристик размеров механической системы, свойств жидкости и типа истечения (свободное истечение или отсутствие истечения) жидкости.

7. Применяя предложенный метод постановки и решения задачи для поплавковых приборов навигации, определяется решение в нулевом приближении по относительному эксцентриситету. Для этого по сравнению с моделью двигателя внутреннего сгорания для поплавковых приборов навигации снимается ограничение на перемещение внутренней абсолютно жесткой оболочки. Найденное решение определяет динамику системы, включающей упругую цилиндрическую оболочку и абсолютно жесткие тела, применительно к поплавковым приборам.

Второй член разложения по малому относительному эксцентриситету определяет вибрационную погрешность поплавковых приборов – возмущающие моменты рассматриваемых сложных механических систем, обусловленные вибрацией, и, как следствие, определяет точность приборов. При этом (на рассмотренном этапе) имеет место задача регулярных возмущений, то есть второй член разложения значительно меньше первого при всех реальных значениях независимых переменных и безразмерных постоянных, входящих в решение.

Найдены гидромеханические реакции для поплавкового маятникового акселерометра при различных условиях истечения жидкости

в торцы, действующие на поплавков, и возмущающие моменты  $L_{нжж}$ , действующие со стороны слоя жидкости и с учетом влияния упругой цилиндрической оболочки, ограничивающей описанный слой жидкости.

Найденные гидромеханические реакции для поплавкового гироскопа при различных условиях истечения жидкости в торцы, действующие на поплавков, и возмущающие моменты разделяются на два вида: возмущающий момент  $L_{III}$  за счет сил инерции и, как следствие, смещения центра масс поплавка из центра масс камеры и возмущающий момент  $L_{нжж}$ , действующий со стороны слоя жидкости и упругой цилиндрической оболочки, ограничивающей описанный слой жидкости.

Отмечено, что при несимметричном истечении жидкости в торцы поступательная и угловая вибрации не разделяются.

8. На основании полученного решения определены постоянные составляющие возмущающих моментов – вибрационные возмущающие моменты для поплавкового гироскопа и поплавкового маятникового акселерометра в случае внешней вибрации. Проведенное исследование показало значительное влияние упругой податливости цилиндрической оболочки – корпуса прибора на точность прибора. Исследование построенной математической модели позволило дополнить модель погрешности поплавковых приборов учетом упругих свойств оболочки – корпуса прибора, инерции движения вязкой несжимаемой жидкости и условий истечения жидкости.

Для поплавкового гироскопа возмущающий момент за счет сил инерции и смещения центра масс ротора относительно абсолютно жестких торцевых дисков (рамки) оказывается практически (в рамках рассматриваемых приближений) независимым ни от динамики жидкости, окружающей упругой цилиндрической оболочкой, ни от упругих свойств оболочки, ни от типа истечения жидкости для рассматриваемого случая внешней вибрации.

Как для поплавкового маятникового акселерометра, так и для поплавкового гироскопа показана значительность влияния упругих свойств оболочки, окружающей слой вязкой несжимаемой жидкости, на возмущающий момент и, как следствие, на погрешность прибора.

Полученная модель позволяет исследовать динамику и точность приборов с различными параметрами толщины и материала упругой цилиндрической оболочки, вязкости и ширины слоя вязкой несжимаемой жидкости, типа истечения жидкости. При этом проведен сравнительный анализ между различными моделями и выявлена зависимость погрешности от описанных параметров.

9. Таким образом, предложенная математическая модель позволяет, исходя из известного частотного диапазона вибраций, выбрать

конструкцию элементов агрегатов и машин или приборов в целом и упругих цилиндрических оболочек в частности, обеспечивающую необходимую износостойкость агрегата или точность прибора. Кроме того, полученное аналитическое решение позволяет оценить вклад различных факторов на работу и погрешности поплавковых приборов на этапе проектирования.

Предложенный в работе метод исследования может применяться при решении задач динамики и других сложных механических систем, включающих упругую цилиндрическую оболочку и взаимодействующие с ней через слой вязкой несжимаемой жидкости абсолютно жесткие тела.

## СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### *I. Монографии*

1. Кондратов, Д.В. Упругогидродинамика машин и приборов на транспорте/ Д.В. Кондратов, Л.И. Могилевич.– М.: РГОТУПС, 2007.– 169 с.

### *II. Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ:*

2. Кондратов, Д.В. Возмущающие моменты в поплавковых гироскопах и акселерометрах с упругим корпусом/ Д.В. Кондратов, Л.И. Могилевич// Авиакосмическое приборостроение.–2003.–№11.–С. 13–19.
3. Кондратов, Д.В. Возмущающие моменты в поплавковом гироскопе с упругим корпусом прибора на вибрирующем основании/ Д.В. Кондратов, Л.И. Могилевич// Известия РАН. Механика твердого тела.–2005.–№3.– С. 11–21.
4. Кондратов, Д.В. Возмущающий момент в поплавковом маятниковом акселерометре с упругим корпусом прибора при несимметричном истечении жидкости в торцы/С.А. Анциферов, Д.В. Кондратов, Л.И. Могилевич// Авиакосмическое приборостроение.–2005.–№11.–С. 8–14.
5. Кондратов, Д.В. Возмущающий момент в поплавковом маятниковом акселерометре при несимметричном истечении жидкости в торцы/ С.А. Анциферов, Д.В. Кондратов, Л.И. Могилевич// Известия РАН. Механика твердого тела.–2006.–№3.–С. 16-29.
6. Кондратов, Д.В. Гидроупругость силового цилиндра с полым плунжером при отсутствии истечения жидкости/ Д.В. Кондратов// Вестник Саратовского государственного аграрного университета.–2007.– №6. –С. 46–50 (принята к печати в 2006 году).
7. Кондратов, Д.В. Гидродинамические силы, действующие на поплавок поплавкового гироскопа с упругим корпусом при несимметричном истечении жидкости в торцы/ Д.В. Кондратов// Авиакосмическое приборостроение.–2007.–№11.–С. 4–11.



8. Кондратов, Д.В. Математическое моделирование процессов взаимодействия двух цилиндрических оболочек со слоем жидкости между ними при свободном торцевом истечении в условия вибрации/ Д.В. Кондратов, Л.И. Могилевич// Вестник Саратовского государственного технического университета.–2007.–№3 (26).– Вып.1.– С. 22–31.
9. Кондратов, Д.В. Математическое моделирование процессов взаимодействия двух цилиндрических оболочек со слоем жидкости между ними при отсутствии торцевого истечения в условиях вибрации/ Д.В. Кондратов, Л.И. Могилевич// Вестник Саратовского государственного технического университета.–2007.–№3(27).– Вып. 2.– С. 15–23.
10. Кондратов, Д.В. Гидроупругость силового цилиндра с полым плунжером при свободном истечении жидкости/ Д.В. Кондратов// Вестник Саратовского государственного аграрного университета.–2008.– №1. –С. 38–43 (принята к печати в 2006 году).
11. Кондратов, Д.В. Вибрационные возмущающие моменты в поплавковом гироскопе с упругим корпусом прибора при несимметричном истечении жидкости в торцы/ Д.В. Кондратов, Л.И. Могилевич, Ю.Н. Кондратова// Авиакосмическое приборостроение.– 2008.–№7.– С. 2-8.
12. Кондратов, Д.В. Математическое моделирование ламинарного движения жидкости в упругой цилиндрической трубе кольцевого профиля со свободным опиранием по торцам/ Д.В. Кондратов, Л.И. Могилевич, Ю.Н. Кондратова// Вестник Саратовского государственного технического университета.–2009.–№1(37).– С. 33-40.
13. Кондратов, Д.В. Возмущающие моменты в поплавковом гироскопе с упругим корпусом прибора на вибрирующем основании при несимметричном торцевом истечении / С.А. Анциферов, Д.В. Кондратов, Л.И. Могилевич// Известия РАН. Механика твердого тела.–2009.–№3.– С. 25-35.
14. Кондратов, Д.В. Исследование амплитудных частотных характеристик колебаний упругих стенок трубы кольцевого профиля при пульсирующем движении вязкой жидкости в условиях жесткого заземления по торцам/ Д.В. Кондратов, Ю.Н. Кондратова, Л.И. Могилевич// Проблемы машиностроения и надежности машин.– 2009.–№3.–С. 15-21.
15. Кондратов, Д.В. Пульсирующее ламинарное течение жидкости по упругой цилиндрической трубе кольцевого сечения / Д.В. Кондратов, Ю.Н. Кондратова, Л.И. Могилевич// Известия РАН. Механика жидкости и газа.–2009.–№4.–С. 59-71.

### *III. Публикации в других изданиях:*

16. Кондратов, Д.В. Влияние торцевого истечения жидкости на поведение поплавкового маятникового акселерометра/ Д.В. Кондратов // Труды постоянно действующего научно-технического семинара СФ ВАУ. Саратов: Изд-во СФ ВАУ– 2001.– С. 50-52.
17. Кондратов, Д.В. Гидродинамические реакции в поплавковом маятниковом акселерометре с упругим корпусом при торцевом истечении жидкости/ Д.В. Кондратов // Математика. Механика: сб. науч. тр. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001.–Вып. 3.– С. 160-163.
18. Кондратов, Д.В. Гидроупругость поплавковых приборов навигации при свободном истечении жидкости/ Д.В. Кондратов // Механика деформируемых сред: межвуз. сб. науч. тр. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002.–Вып. 14.– С. 79-86.
19. Кондратов, Д.В. Возмущающий гидродинамический момент в поплавковом маятниковом акселерометре с упругим корпусом/ Д.В. Кондратов, Л.И. Могилевич, В.С. Попов // Математика. Механика: сб. науч. тр. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та., 2002.–Вып. 4.– С. 191-193.
20. Кондратов, Д.В. Упругогидродинамика поплавкового маятникового акселерометра/ Д.В. Кондратов, Л.И. Могилевич, В.С. Попов// Проблемы и перспективы прецизионной механики и управления в машиностроении: материалы Междунар. конф.– Саратов: СГТУ, 2002.–С.136-137.
21. Кондратов, Д.В., Упругогидродинамика поплавкового маятникового акселерометра на вибрирующем основании/ Д.В. Кондратов, Л.И. Могилевич// Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: материалы IX Междунар. симпозиума.- М.: Оптимпресс, 2003.–С.31-32.
22. Кондратов, Д.В. Упругогидродинамика поплавкового гироскопа на вибрирующем основании/ Д.В. Кондратов, Л.И. Могилевич// Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: материалы X Междунар. симпозиума в 2 т.– М.: Изд-во МАИ, 2004.–Т.1.–С.32-33.
23. Кондратов, Д.В. Гидродинамический возмущающий момент поплавкового маятникового акселерометра при несимметричном истечении жидкости в торцы/ С.А. Анциферов, Д.В. Кондратов, Л.И. Могилевич// Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: материалы X Междунар. симпозиума в 2 т.– М.: Изд-во МАИ, 2004.–Т.1.–С.7-8.
24. Кондратов, Д.В. Упругогидродинамика поплавковых навигационных приборов при свободном торцевом истечении жидкости/ Д.В. Кондратов// Прикладная математика и механика: сб. науч. трудов.– Ульяновск: УлГТУ, 2004.– С.15-29.
25. Кондратов, Д.В. Взаимодействие сдвливаемого слоя вязкой несжимаемой жидкости с упругой трехслойной круглой пластиной /С.А.

- Анциферов, Д.В. Кондратов, Л.И. Могилевич, В.С. Попов// Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: материалы XI Междунар. симпозиума в 2 т.- М.: Изд-во МАИ, 2005.–Т.1.–С.5–7.
26. Кондратов, Д.В. Взаимодействие сдавливаемого слоя вязкой несжимаемой жидкости с упругой трехслойным стержнем /С.А. Анциферов, Д.В. Кондратов, Л.И. Могилевич, В.С. Попов// Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: материалы XI Междунар. симпозиума в 2 т.–М.: Изд-во МАИ, 2005.–Т.1.–С.4–5.
27. Кондратов, Д.В. Динамика взаимодействия оболочки со сдавливаемым слоем жидкости внутри нее при свободном торцевом истечении применительно к двигателям внутреннего сгорания /С.А. Анциферов, Д.В. Кондратов, Л.И. Могилевич, В.С. Попов//Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: материалы XII Междунар. симпозиума в 2 т.– М.: Изд-во МАИ, 2006.– Т.1.–С.29–30.
28. Кондратов, Д.В. Колебания оболочки, содержащей сдавливаемый слой жидкости при несимметричном торцевом истечении применительно к двигателям внутреннего сгорания/ С.А. Анциферов, Д.В. Кондратов, Л.И. Могилевич, В.С. Попов//Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: материалы XII Междунар. симпозиума в 2 т.– М.: Изд-во МАИ, 2006.–Т.1.–С.28–29.
29. Кондратов, Д.В. Динамика упругой рубашки двигателя внутреннего сгорания с водяным охлаждением/ Д.В. Кондратов// Проблемы и перспективы прецизионной механики и управления в машиностроении: материалы Междунар. конф.– Саратов: СГТУ, 2006.–С.263-270.
30. Кондратов, Д.В. Упругогидродинамика поплавкового гироскопа на вибрирующем основании при отсутствии торцевого истечения жидкости// С.А. Анциферов, Д.В. Кондратов, Л.И. Могилевич//Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: материалы XIII Междунар. симпозиума в 2 т.– М.: Изд-во МАИ, 2007.– Т.1.–С.27–29.
31. Кондратов, Д.В. Динамика двух упругих оболочек взаимодействующих через слой жидкости при свободном торцевом истечении/Д.В. Кондратов//Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: материалы XIII Междунар. симпозиума в 2 т.– М.: Изд-во МАИ, 2007.–Т.1.–С.143-144.
32. Кондратов, Д.В. Динамическая задача гидроупругости поплавкового гироскопа с упругим геометрически нерегулярным корпусом поплавка при внутренней вибрации/ Д.В. Кондратов, Л.И. Могилевич, В.С. Попов//Динамические и технологические проблемы механики

- конструкций и сплошных сред: материалы XIII Междунар. симпозиума в 2 т.– М.: Изд-во МАИ, 2007.–Т.1.– С.196-197.
33. Кондратов, Д.В. Гидроупругость тонкостенных конструкций в машинах и приборах в условиях вибрации/ Д.В. Кондратов, Л.И. Могилевич, А.А. Попова// Материалы Второй Всерос. науч. конф. по волновой динамике машин и конструкций. Нижний Новгород: ЗАО Интек-НН, 2007.–С.50.
34. Кондратов, Д.В. Гидроупругость тонкостенных конструкций в условиях вибрации в приборо- и машиностроении/ Д.В.Кондратов// Молодые ученые – науке и производству: материалы конф. молодых ученых СГТУ.– Саратов: СГТУ, 2007.– С.91-93.
35. Кондратов, Д.В. Гидроупругость поплавоквого гироскопа с упругим корпусом прибора при несимметричном торцевом истечении/ Д.В.Кондратов// Проблемы и перспективы прецизионной механики и управления в машиностроении: материалы Междунар. конф.– Саратов: СГТУ, 2007.–С.165-169.
36. Кондратов, Д.В. Гидроупругость жидкостного ракетного двигателя при пульсирующем движении охлаждающей жидкости/ Д.В. Кондратов, Л.И. Могилевич// Проблемы и перспективы прецизионной механики и управления в машиностроении: материалы Междунар. конф.- Саратов: СГТУ, 2007.–С.239-244.
37. Кондратов, Д.В. Уругогиродинамика кольцевой трубы при ламинарном пульсирующем течении жидкости/ Д.В. Кондратов, Л.И. Могилевич // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: материалы XIV Междунар. симпозиума имени А.Г. Горшкова в 2 т. – М.: ИД МЕДПРАКТИКА-М, 2008.–Т.1.– С.123.
38. Кондратов, Д.В. Динамика упругой рубашки двигателя внутреннего сгорания с водяным охлаждением при свободном торцевом истечении охлаждающей жидкости/Д.В. Кондратов// Совершенствование методов гидравлических расчетов водопропускных и очистных сооружений: межвуз. науч. сб. – Саратов: СГТУ, 2008.–С. 83-90.
39. Кондратов, Д.В. Динамика двух упругих оболочек взаимодействующих через слой жидкости при свободном опирании по торцам/ Ю.Н. Кондратова, Д.В. Кондратов, Л.И. Могилевич // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: материалы XV Междунар. симпозиума имени А.Г.Горшкова в 2 т.– М.: ООО Типография «ПАРАДИЗ», 2009.–Т.1.– С.90-91.