

На правах рукописи

Нелаева Екатерина Игоревна

**РАЗВИТИЕ БИКВАТЕРНИОННОЙ ТЕОРИИ КИНЕМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ОБРАТНОЙ
ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ РОБОТОВ-МАНИПУЛЯТОРОВ**

Специальность 05.13.01 - Системный анализ, управление и обработка
информации (в технической отрасли)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Саратов 2016

Работа выполнена
в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки
Институт проблем точной механики и управления
Российской академии наук, г. Саратов

Научный руководитель: **Челноков Юрий Николаевич**,
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Асланов Владимир Степанович**,
доктор технических наук, профессор,
Самарский национальный исследовательский
университет имени академика С.П. Королева,
заведующий кафедрой теоретической механики

Депутатова Екатерина Александровна,
кандидат технических наук,
филиал ФГУП «НПЦАП им. академика
Н.А.Пилюгина»
Производственное объединение
«Корпус», г. Саратов,
ведущий инженер-программист

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
образования «Самарский государственный
технический университет»

Защита состоится 14 февраля 2017 г. в 15.00 часов на заседании
диссертационного совета Д 212.242.04 при ФГБОУ ВО «Саратовский
государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.» по адресу:
410054, Саратов, ул. Политехническая, 77, ауд. 319/1.

С диссертацией можно ознакомиться на сайте www.sstu.ru и в научно-
технической библиотеке ФГБОУ ВО «Саратовский государственный
технический университет имени Гагарина Ю.А.»

Автореферат разослан « » _____ 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Алешкин Валерий Викторович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Кинематические задачи управления играют важную роль в теории управления движением твердого тела. Эти задачи во многих случаях имеют аналитические решения, которые часто используются при построении программных и стабилизирующих траекторий и управлений движением твердого тела, или движущегося объекта, рассматриваемого как твердое тело. Использование аналитических решений кинематических задач управления в сочетании с методом решения обратных задач динамики позволяет в ряде случаев построить эффективные законы управления движением твердого тела, учитывающие его динамику. Задачи управления в кинематической постановке рассматриваются в теории дифференциальных игр, бесплатформенных инерциальных навигационных системах, в механике роботов-манипуляторов, при решении задач наведения, анимации (оживления) пространственных образов на экранах ЭВМ.

В кватернионной постановке кинематические задачи управления вращательным движением твердого тела впервые рассматривали Бранец В.Н. и Шмыглевский И.П., а затем Челноков Ю.Н., Плотников П.К., Молоденков А.В., Стрелкова Н.А. и другие авторы. В последние годы кинематические задачи управления движением свободного твердого тела стали рассматриваться в бикватернионной постановке. Здесь нужно отметить работы Стрелковой Н.А., Маланина В.В., Han D., Wei Q., Lia Z.X., Челнокова Ю.Н. В целом, бикватернионная теория кинематического управления – достаточно молодая область исследований, и требуется ее дальнейшее развитие. В диссертационной работе данная теория развивается с использованием параболических бикватернионов Клиффорда.

Построенная бикватернионная теория кинематического управления движением свободного твердого тела применяется в диссертации для решения обратной задачи кинематики роботов-манипуляторов. Отметим, что выходное звено робота-манипулятора с шестью степенями свободы, построенного по разомкнутой схеме, может двигаться в пространстве так же, как свободное твердое тело. Обратная задача кинематики используется не только в робототехнике, но и в трёхмерной компьютерной анимации, разработке компьютерных игр и моделировании движений молекул. Решение обратной задачи кинематики сводится к решению системы нелинейных трансцендентных уравнений, которая в общем случае не решается аналитически. При численном решении возникают сложности, связанные с плохой сходимостью и неоднозначностью решения. Большинство манипуляторов разрабатывается таким образом, чтобы обратная задача кинематики решалась аналитически, что может быть не оптимальным с функциональной точки зрения.

Решением обратной задачи кинематики занимались многие авторы, начиная с 1970-х годов. Первыми были Yang A.T. и Freudenstein R., Uicker J.J., Jr., Denavit J., Hartenberg R.S., Pieper D.L., Kohli D. и Soni A.H. Основные известные методы решения обратной задачи кинематики: геометрический подход;

алгебраический подход со сведением к полиному; группа методов, основанных на применении матрицы Якоби; группа методов, основанных на использовании алгоритма Ньютона; метод последовательно покоординатного спуска; метод последовательного преобразования Монте-Карло; методы с использованием кватернионного и бикватернионного аппаратов (Yang A.T., Freudenstein R., Глазков В.П.); методы с применением искусственного интеллекта и нейронных сетей; приближенный итерационный алгоритм FABRIK. Все известные методы решения обратной задачи кинематики роботов-манипуляторов имеют свои достоинства и недостатки, поэтому поиск новых эффективных методов ее решения продолжает оставаться актуальным.

В диссертации развивается предложенный Челноковым Ю.Н. новый метод решения обратных задач кинематики роботов-манипуляторов, основанный на применении бикватернионной теории кинематического управления движением свободного твердого тела. Достоинства разрабатываемого метода: универсальность и возможность применения, в том числе, для кинематически избыточных роботов-манипуляторов; единственность решения (если оно существует) для выбранного закона кинематического управления и заданного начального положения манипулятора; высокая точность решения; высокое быстродействие; неитерационность. Разрабатываемый метод позволяет также эффективно решать задачу оптимального перевода выходного звена манипулятора из любого начального положения в требуемое конечное положение (то есть, задачу разложения кинематически оптимального перемещения выходного звена манипулятора по его отдельным степеням свободы).

Цель работы: развитие бикватернионной теории кинематического управления движением свободного твердого тела, методов решения прямых задач кинематики роботов-манипуляторов с использованием матриц дуальных направляющих косинусов, а также метода и алгоритмов решения обратной задачи кинематики роботов-манипуляторов с использованием бикватернионной теории кинематического управления на примере стэнфордского манипулятора.

Для достижения указанной цели поставлены и решены следующие **научно-технические задачи:**

1. Получить оптимальный программный бикватернионный кинематический закон управления движением свободного твердого тела, минимизирующий затраты на управление, и получить оптимальный программный закон движения тела;

2. Поставить и аналитически решить в бикватернионом виде задачу оптимальной нелинейной стабилизации произвольного программного движения свободного твердого тела;

3. Развить методы решения прямых и обратных задач кинематики роботов-манипуляторов с использованием матриц дуальных направляющих

косинусов и бикватернионов Клиффорда на примере стэнфордского манипулятора;

4. Построить алгоритмы решения обратной задачи кинематики роботов-манипуляторов с помощью бикватернионной теории кинематического управления;

5. Исследовать с помощью математического моделирования особенности решения обратной задачи кинематики роботов-манипуляторов с использованием четырех построенных законов и алгоритмов бикватернионного кинематического управления, выявить свойства и закономерности численного решения обратной задачи кинематики.

Научная новизна работы заключается в следующем:

1. Получен в нелинейной постановке оптимальный программный бикватернионный кинематический закон управления движением свободного твердого тела, минимизирующий затраты на управление; найден оптимальный бикватернионный закон движения тела под действием этого управления.

2. Аналитически решена кинематическая задача оптимальной нелинейной стабилизации произвольного программного движения свободного твердого тела. Получены оптимальный в смысле минимизации затрат на управление и среднеквадратичных отклонений фазовых координат бикватернионный кинематический закон управления и соотношения, определяющие изменение дуальных параметров Эйлера в процессе управляемого движения тела.

3. Разработана на примере стэнфордского манипулятора методология решения прямых и обратных задач кинематики роботов-манипуляторов с использованием матриц дуальных направляющих косинусов, бикватернионов Клиффорда и бикватернионной теории кинематического управления.

4. Построены алгоритмы решения обратной задачи кинематики роботов-манипуляторов с помощью бикватернионной теории кинематического управления для четырех предложенных законов управления.

5. Разработана программа численного решения прямой и обратной задач кинематики стэнфордского манипулятора с помощью бикватернионной теории кинематического управления.

6. Построены примеры численного решения обратной задачи кинематики стэнфордского манипулятора с использованием бикватернионной теории кинематического управления, иллюстрирующие возможности развиваемого метода. Выявлены закономерности и свойства численного решения.

Научная и практическая ценность.

1. Развита бикватернионная теория кинематического управления движением свободного твердого тела. Найдены в строгой нелинейной постановке аналитические решения двух задач построения оптимальных программных и стабилизирующих управлений движением свободного твердого тела.

2. Разработана новая эффективная методология решения прямых и обратных задач кинематики роботов-манипуляторов с использованием дуальных матриц направляющих косинусов, бикватернионов Клиффорда и бикватер-

нионной теории кинематического управления. Предложены новые алгоритмы решения этих задач, разработана программа численного решения прямой и обратной задач кинематики стэнфордского манипулятора, реализующая вычисления с использованием матриц дуальных направляющих косинусов и параболических бикватернионов Клиффорда.

На защиту выносятся:

1. Аналитические бикватернионные решения нелинейных кинематических задач оптимального программного и стабилизирующего управлений движением свободного твердого тела.

2. Оптимальный программный бикватернионный закон управления, минимизирующий затраты на кинематическое управление.

3. Стабилизирующий бикватернионный закон управления, оптимальный в смысле минимизации затрат на кинематическое управление и минимизации среднеквадратичных отклонений фазовых переменных.

4. Алгоритмы формирования двух стабилизирующих бикватернионных законов управления, построенных по принципу обратной связи, а также алгоритмы формирования полных бикватернионных управлений, включающих оптимальные программное и стабилизирующее управления.

5. Решения прямой задачи кинематики стэнфордского робота-манипулятора в дуальных матрицах направляющих косинусов и бикватернионах Клиффорда. Кинематические уравнения стэнфордского манипулятора.

6. Алгоритмы решения обратной задачи кинематики роботов-манипуляторов с использованием бикватернионной теории кинематического управления для построенных законов управления движением выходного звена робота-манипулятора.

7. Результаты численного решения обратной задачи кинематики на примере стэнфордского манипулятора, свойства и закономерности решения.

8. Программа на языке Java, позволяющая решать прямую задачу кинематики стэнфордского робота-манипулятора с использованием матриц дуальных направляющих косинусов и бикватернионов Клиффорда и обратную задачу кинематики с использованием бикватернионной теории кинематического управления для четырех построенных законов управления.

Достоверность результатов обеспечивается корректностью математической постановки задач и строгостью применяемых моделей и методов. Проверка решения обратной задачи кинематики осуществляется путем решения прямой задачи кинематики.

Апробация работы и публикации. Основные результаты диссертационной работы докладывались на XX Международной научной конференции «Системный анализ, управление и навигация» (Евпатория, 2015 г.); V Международной научной конференции молодых ученых «Presenting Academic Achievements to the World» (Саратов, 2013 г.), Всероссийской научной конференции «Проблемы критических ситуаций в точной механике и управлении» (Саратов, 2013 г.), а также на научных конференциях

механико-математического факультета ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского» (2011–2015 гг.) и на научных семинарах лаборатории «Механика, навигация и управление движением» ИПТМУ РАН (2013–2016 гг.). По результатам исследований опубликовано десять работ, в том числе пять научных статей в журналах, рекомендованных ВАК РФ для соискателей учёной степени кандидата наук.

Личный вклад автора. Научные результаты, вошедшие в публикации [1–10] и диссертационную работу, получены лично автором диссертации.

Научному руководителю принадлежат исходные бикватернионные кинематические уравнения движения свободного твердого тела, бикватернионные уравнения возмущенного движения свободного твердого тела, идея о возможности использования теории бикватернионного кинематического управления движением свободного твердого тела для решения обратных задач кинематики роботов-манипуляторов, а также два моделируемых бикватернионных закона управления движением и постановка задач исследования.

Использование результатов. Результаты, полученные в диссертационной работе, были использованы при выполнении лабораторией «Механика, навигация и управление движением» ИПТМУ РАН научно-исследовательских работ по теме «Исследование проблем механики, навигации и управления движением с использованием кватернионных и бикватернионных моделей и методов пространства состояний» (2013–2016 гг.).

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и приложения. Объем диссертации составляет 176 страниц, включая 29 рисунков, 16 таблиц и листинг программного кода. Список литературы содержит 112 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дан обзор работ по теме диссертации, обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулированы цель и задачи исследования.

В первой главе приведено описание геометрии и кинематики роботов-манипуляторов с использованием дуальных матриц направляющих косинусов, параболических бикватернионов Клиффорда и бикватернионных матриц на примере стэнфордского манипулятора, выведены кинематические уравнения движения стэнфордского манипулятора.

Стэнфордский манипулятор представляет собой манипулятор с шестью степенями свободы: пятью вращательными и одной поступательной. Введем следующие системы координат: $x_0y_0z_0$ – связана с основанием манипулятора (абсолютная система координат), $x_iy_iz_i$ – связана с i -м звеном манипулятора, $x_6y_6z_6$ – связана с выходным звеном манипулятора. В качестве обобщенных координат манипулятора выступают углы φ_i поворота i -го звена относительно $(i - 1)$ -го и координата d_3 , определяющая поступательное перемещение 3-го звена относительно 2-го. Схема манипулятора и вводимые системы

координат представлены на рисунке 1. На рисунке $\Phi_i = \theta_i + \varphi_i$, где θ_i - характеристика i -го сочленения, постоянная для данного типа робота.

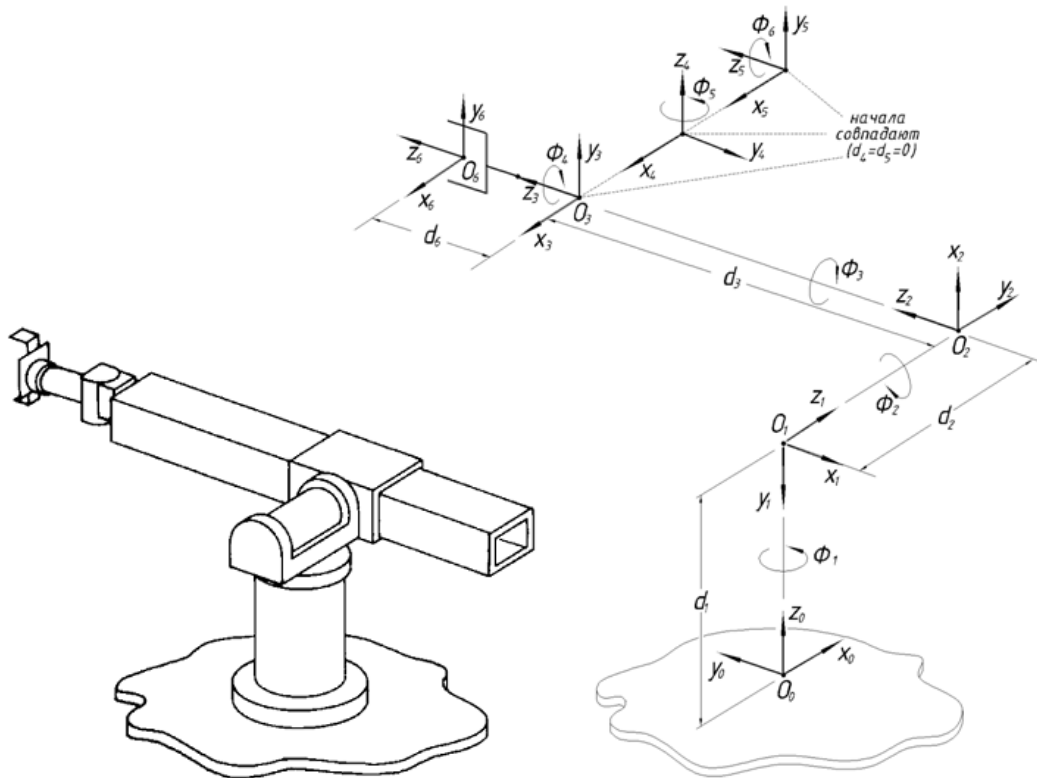


Рисунок 1

Прямая задача кинематики роботов-манипуляторов состоит в определении положения и ориентации выходного звена (схвата) манипулятора относительно абсолютной системы координат по известному вектору обобщенных координат и заданным геометрическим параметрам звеньев. Для решения задачи будем использовать бикватернионы конечных перемещений, матрицы дуальных направляющих косинусов и бикватернионные матрицы.

Конечное перемещение выходного звена манипулятора складывается из относительных конечных перемещений звеньев. Каждое из этих перемещений описывается несколькими способами: матрицами дуальных направляющих косинусов, бикватернионами конечных перемещений и бикватернионными матрицами двух типов. Схема конечных перемещений звеньев стэнфордского манипулятора имеет вид:

$$x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1} \xrightarrow{C_i, \Lambda_i, M_i(\Lambda_i), N_i(\Lambda_i)} x_i y_i z_i, x_0 y_0 z_0 \xrightarrow{C, \Lambda, M(\Lambda), N(\Lambda)} x_6 y_6 z_6, i = \overline{1, 6}$$

где C_i , Λ_i , $M_i(\Lambda_i)$ и $N_i(\Lambda_i)$ – соответственно матрица дуальных направляющих косинусов, бикватернион и бикватернионные матрицы конечного перемещения i -го звена манипулятора относительно $(i-1)$ -го; C , Λ , $M(\Lambda)$ и $N(\Lambda)$ – матрица дуальных направляющих косинусов, бикватернион и бикватернионные матрицы конечного перемещения выходного звена манипулятора относительно основания.

В соответствии со схемой конечных перемещений и формулами сложения конечных перемещений уравнения для нахождения матрицы \mathbf{C} , бикватерниона Λ и бикватернионных матриц $\mathbf{M}(\Lambda)$ и $\mathbf{N}(\Lambda)$ получены в следующем виде:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_6 \mathbf{C}_5 \mathbf{C}_4 \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_1, \quad (1)$$

$$\Lambda = \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_3 \circ \Lambda_4 \circ \Lambda_5 \circ \Lambda_6, \quad (2)$$

$$\mathbf{M}(\Lambda) = \mathbf{M}(\Lambda_6) \mathbf{M}(\Lambda_5) \mathbf{M}(\Lambda_4) \mathbf{M}(\Lambda_3) \mathbf{M}(\Lambda_2) \mathbf{M}(\Lambda_1), \quad (3)$$

$$\mathbf{N}(\Lambda) = \mathbf{N}(\Lambda_1) \mathbf{N}(\Lambda_2) \mathbf{N}(\Lambda_3) \mathbf{N}(\Lambda_4) \mathbf{N}(\Lambda_5) \mathbf{N}(\Lambda_6). \quad (4)$$

Здесь и далее \circ - символ бикватернионного умножения.

Матрица дуальных направляющих косинусов, бикватернион и бикватернионные матрицы конечного перемещения i -го звена манипулятора относительно $(i-1)$ -го находятся по формулам:

$$\mathbf{C}_i = \begin{pmatrix} \cos e_i & \sin e_i & 0 \\ -\cos \alpha_i \sin e_i & \cos \alpha_i \cos e_i & \sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i \sin e_i & -\sin \alpha_i \cos e_i & \cos \alpha_i \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$\Lambda_i = \cos a_i \cos b_i + \sin a_i \cos b_i \mathbf{i}_1 + \sin a_i \sin b_i \mathbf{i}_2 + \cos a_i \sin b_i \mathbf{i}_3, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\Lambda_i) &= \\ &= \begin{pmatrix} \cos a_i \cos b_i & -\sin a_i \cos b_i & -\sin a_i \sin b_i & -\cos a_i \sin b_i \\ \sin a_i \cos b_i & \cos a_i \cos b_i & -\cos a_i \sin b_i & \sin a_i \sin b_i \\ \sin a_i \sin b_i & \cos a_i \sin b_i & \cos a_i \cos b_i & -\sin a_i \cos b_i \\ \cos a_i \sin b_i & -\sin a_i \sin b_i & \sin a_i \cos b_i & \cos a_i \cos b_i \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\Lambda_i) &= \\ &= \begin{pmatrix} \cos a_i \cos b_i & -\sin a_i \cos b_i & -\sin a_i \sin b_i & -\cos a_i \sin b_i \\ \sin a_i \cos b_i & \cos a_i \cos b_i & \cos a_i \sin b_i & -\sin a_i \sin b_i \\ \sin a_i \sin b_i & -\cos a_i \sin b_i & \cos a_i \cos b_i & \sin a_i \cos b_i \\ \cos a_i \sin b_i & \sin a_i \sin b_i & -\sin a_i \cos b_i & \cos a_i \cos b_i \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $a_i = \frac{\alpha_i}{2}$, $b_i = \frac{\theta_i + \varphi_i}{2} + s \frac{d_i}{2}$, $e_i = \cos((\theta_i + \varphi_i) + s d_i)$; α_i , θ_i , d_i (кроме d_3) – постоянные геометрические параметры звеньев; \mathbf{i}_1 , \mathbf{i}_2 , \mathbf{i}_3 – векторные мнимые единицы Гамильтона; s - символ (комплексность) Клиффорда, $s^2 = 0$.

Формулы (1)-(4) при подстановке в них соотношений (5)-(8) и заданных геометрических параметров звеньев манипулятора образуют полученные четыре варианта алгоритма решения прямой задачи кинематики стэнфордского манипулятора.

Под кинематическими уравнениями движения манипулятора будем понимать кинематические уравнения движения выходного звена манипулятора. Они получены из построенных векторных выражений для линейной и угловой скоростей движения выходного звена манипулятора путем проектирования их на оси системы координат, связанной с выходным звеном манипулятора, и имеют вид:

$$(\dot{\varphi}_1 \quad \dot{\varphi}_2 \quad \dot{d}_3 \quad \dot{\varphi}_4 \quad \dot{\varphi}_5 \quad \dot{\varphi}_6)^T = \mathbf{A}^{-1}(\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3)^T, \quad (9)$$

где верхняя точка – символ дифференцирования по времени; ω_k, v_k ($k = \overline{1,3}$) – компоненты векторов угловой $\boldsymbol{\omega}$ и линейной \mathbf{v} скоростей выходного звена манипулятора в системе координат $x_6y_6z_6$; T – символ транспонирования матрицы, квадратная шестимерная матрица \mathbf{A} является сложной нелинейной функцией обобщенных координат манипулятора и геометрических параметров его звеньев: $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\alpha_i, \theta_i, d_j, \varphi_j, d_3)$, где $i = \overline{1,6}, j = 1,2,4,5,6$.

Во второй главе построены алгоритмы решения обратной задачи кинематики роботов-манипуляторов с использованием бикватернионной теории кинематического управления на примере стэнфордского манипулятора.

Обратная задача кинематики роботов-манипуляторов заключается в определении обобщенных координат манипулятора по известному угловому и линейному местоположению его схвата. Применение бикватернионной теории кинематического управления движением свободного твердого тела позволяет свести решение обратной задачи кинематики роботов-манипуляторов к решению задачи управления движением выходного звена манипулятора. За программное положение выходного звена манипулятора принимается то положение, для которого необходимо решить обратную задачу кинематики. Начальное положение выходного звена задается произвольным набором значений обобщенных координат из их рабочих диапазонов.

Предлагаемый метод решения обратной задачи кинематики заключается в интегрировании дифференциальных кинематических уравнений движения робота-манипулятора, представляющих собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Содержащиеся в этих уравнениях векторы абсолютных линейной и угловой скоростей схвата робота-манипулятора рассматриваются как управления. Они формируются по принципу обратной связи в виде некоторых функций обобщенных координат манипулятора таким образом, чтобы обеспечивать асимптотически устойчивый перевод выходного звена из любого заданного начального положения в требуемое конечное положение. В результате решения задачи Коши для кинематических уравнений манипулятора обобщенные координаты манипулятора принимают значения, отвечающие требуемому положению схвата робота-манипулятора, этот набор обобщенных координат и является одним из решений обратной задачи кинематики.

Введем в рассмотрение следующие системы координат: $x_0y_0z_0$ – основная система координат, $x_6y_6z_6$ – система координат, жестко связанная с твердым телом, $x_{pr}y_{pr}z_{pr}$ – программная система координат. Взаимное положение систем координат зададим нормированными бикватернионами конечных перемещений: \mathbf{N} и \mathbf{L} – бикватернион программного и текущего местоположения твердого тела, \mathbf{M} (или \mathbf{M}^*) – бикватернион ошибки местоположения тела, определенный своими компонентами в основной системе координат $x_0y_0z_0$ (или в системе координат $x_6y_6z_6$).

Под задачей управления движением манипулятора будем понимать задачу приведения связанной с выходным звеном манипулятора системы координат $x_6 y_6 z_6$ к программной системе координат $x_{pr} y_{pr} z_{pr}$. Рассматриваем кинематическую постановку задачи управления: полагаем, что управление движением осуществляется за счет сообщения выходному звену мгновенного винта скоростей \mathbf{U} .

Для решения обратной задачи кинематики во второй главе использованы два закона кинематического управления в нормированных и ненормированных бикватернионах, полученные Челноковым Ю.Н. Закон управления в нормированных бикватернионах имеет вид:

$$\mathbf{U}_{x_6 y_6 z_6} = \boldsymbol{\omega}_{x_6 y_6 z_6} + s\mathbf{v}_{x_6 y_6 z_6} = -(2K_{oc}^*/M_0^*)\mathbf{M}_{sc}^*, \quad (10)$$

$$\mathbf{M}^* = M_0^* + \mathbf{M}_{sc}^* = \bar{\mathbf{N}} \circ \boldsymbol{\Lambda}(t). \quad (11)$$

Здесь $\mathbf{U}_{x_6 y_6 z_6}$ – отображение кинематического винта \mathbf{U} выходного звена манипулятора на связанную с ним систему координат; $\boldsymbol{\omega}_{x_6 y_6 z_6}$ и $\mathbf{v}_{x_6 y_6 z_6}$ – отображения векторов угловой и линейной скоростей выходного звена манипулятора на связанную с ним систему координат; M_0^* и \mathbf{M}_{sc}^* – скалярная и винтовая части собственного бикватерниона ошибки положения выходного звена манипулятора \mathbf{M}^* ; t – время; верхняя черта означает сопряженный бикватернион; K_{oc}^* – постоянный дуальный коэффициент усиления обратной связи. Бикватернион $\boldsymbol{\Lambda}$ находится через текущие значения обобщенных координат манипулятора по формулам (2) и (6).

Из бикватернионных формул (10) и (11) получены скалярные законы управления (законы формирования проекций линейной и угловой скоростей выходного звена манипулятора на связанные с ним координатные оси), непосредственно использованные для решения обратной задачи кинематики:

$$\omega_j = -2 \frac{km^j}{m^0}; \quad v_j = \frac{-2km^0 m_0^j - 2k_0 m^0 m^j + 2km_0^0 m^j}{(m^0)^2}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (12)$$

где m^j и m_0^j ($j = \overline{0,3}$) – компоненты главной и моментной частей бикватерниона \mathbf{M}^* соответственно.

Закон управления в ненормированных бикватернионах имеет вид:

$$\mathbf{U}_{x_6 y_6 z_6} = \boldsymbol{\omega}_{x_6 y_6 z_6} + s\mathbf{v}_{x_6 y_6 z_6} = K_{oc}^* \mathbf{T}^{-1} \text{screw}(\bar{\boldsymbol{\Lambda}} \circ \mathbf{N}), \quad (13)$$

где *screw* – винтовая часть бикватерниона, стоящего в скобках; \mathbf{T} – тензор ненормированного бикватерниона положения выходного звена манипулятора, удовлетворяющий дифференциальному уравнению

$$2 \frac{d\mathbf{T}}{dt} = K_{oc}^* [\text{scal}(\bar{\boldsymbol{\Lambda}} \circ \mathbf{N}) - \mathbf{T}], \quad \mathbf{T}(t_0) = 1, \quad (14)$$

где *scal* – скалярная часть бикватерниона, стоящего в круглых скобках.

Из бикватернионных формул (13), (14) получены следующие скалярные законы управления:

$$\omega_j = \frac{k}{\tau} r^j, \quad v_j = \frac{k}{\tau} r_0^j - \frac{k\tau_0 - k_0\tau}{\tau^2} r^j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (15)$$

где r^j и r_0^j – компоненты бикватерниона $\mathbf{R} = \bar{\Lambda} \circ \mathbf{N}$; τ и τ_0 – соответственно главная и моментная части тензора \mathbf{T} .

Предложенный алгоритм решения обратной задачи кинематики для стэнфордского манипулятора заключается в численном интегрировании системы дифференциальных уравнений (9), дополненных соотношениями (12) или (14), (15) для разных законов управления и формулами (2), (6). Отметим, что полученные законы управления (12) и (14), (15) применимы для решения обратной задачи кинематики с помощью предлагаемого метода для любого робота-манипулятора с разомкнутой кинематической схемой.

В третьей главе приведены результаты численного решения обратной задачи кинематики стэнфордского манипулятора с использованием бикватернионной теории кинематического управления для двух законов стабилизирующего управления (12) и (14), (15) в нормированных и ненормированных бикватернионах.

Программное (требуемое конечное) положение выходного звена манипулятора, для которого решалась обратная задача кинематики, было задано следующим набором обобщенных координат: $\varphi_1 = 20^\circ$, $\varphi_2 = 40^\circ$, $d_3 = 0,3 \text{ м}$, $\varphi_4 = 145^\circ$, $\varphi_5 = -60^\circ$, $\varphi_6 = 135^\circ$ (по этим значениям координат вычислялся бикватернион требуемого конечного положения выходного звена). Начальное положение манипулятора было задано следующим набором обобщенных координат: $\varphi_1 = -30^\circ$, $\varphi_2 = 15^\circ$, $d_3 = 0,1 \text{ м}$, $\varphi_4 = 36^\circ$, $\varphi_5 = -90^\circ$, $\varphi_6 = 45^\circ$. Остальные параметры решения задачи были выбраны следующим образом: шаг интегрирования $h = 0.01 \text{ с}$, коэффициент усиления обратной связи $K_{oc}^* = 1$, требуемая точность решения 10^{-6} .

В конце моделируемого управляемого движения манипулятора (в конце численного решения задачи) бикватернион текущего положения выходного звена совпал с требуемой точностью с его программным положением, при этом получены следующие значения обобщенных координат, совпадающие для обоих законов управления: $\varphi_1 = 20^\circ$, $\varphi_2 = 40^\circ$, $d_3 = 0,3 \text{ м}$, $\varphi_4 = 145^\circ$, $\varphi_5 = -60^\circ$, $\varphi_6 = 135^\circ$. Компоненты бикватерниона ошибки местоположения выходного звена в ходе численного решения приняли следующие значения: $m_i = 0$, $i = \overline{1,3}$, $m_j^0 = 0$, $j = \overline{0,3}$, $m_0 = -1$ для закона управления в нормированных бикватернионах, $m_0 = 1$ для закона управления в ненормированных бикватернионах. Компоненты управления приняли следующие значения: $\omega_i = 0$, $v_i = 0$, $i = \overline{1,3}$. Таким образом, можно сделать вывод, что, в результате решения задачи, управления прекратили свою работу (стали равными нулю), а ошибка местоположения выходного звена манипулятора исчезла.

На рисунках 2-4 приведены графики изменения компонент бикватерниона ошибки местоположения (m_i , m_i^0), компонент управления (ω_k , v_k) и графики обобщенных (фазовых) координат (φ_j , d_3) в процессе управляемого движения для закона управления в ненормированных бикватернионах.

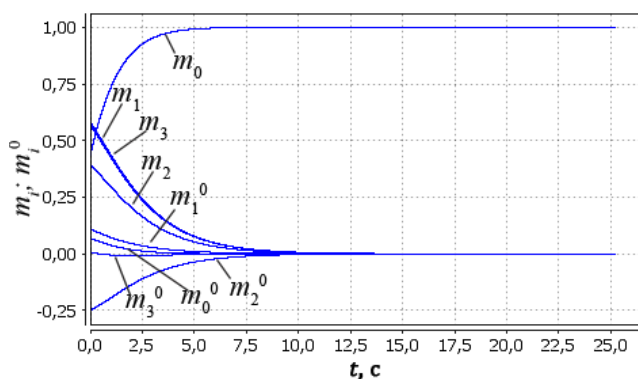


Рисунок 2

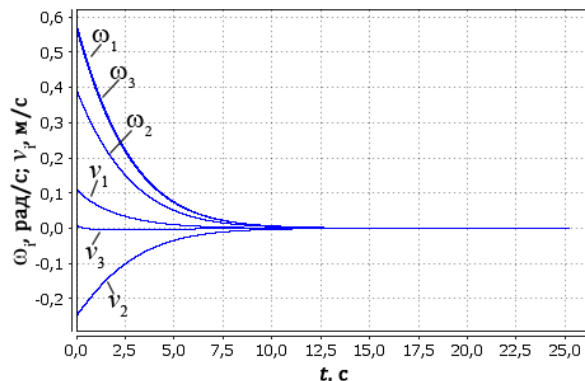


Рисунок 3

Получено численное решение обратной задачи кинематики с использованием двух законов управления для различных значений коэффициента усиления обратной связи K_{oc}^* . Численное решение показало, что сначала при увеличении главной части коэффициента усиления обратной связи время решения обратной задачи кинематики заметно снижается. Однако дальнейшее увеличение уже не приводит к уменьшению времени решения. Отсюда можно сделать вывод, что при решении обратной задачи кинематики главную часть коэффициента усиления обратной связи не следует брать слишком большой во избежание появления сложных переходных процессов. Увеличение моментной части коэффициента усиления обратной связи не уменьшает времени решения задачи. Следовательно, при решении обратной задачи кинематики лучше использовать вещественный коэффициент усиления обратной связи.

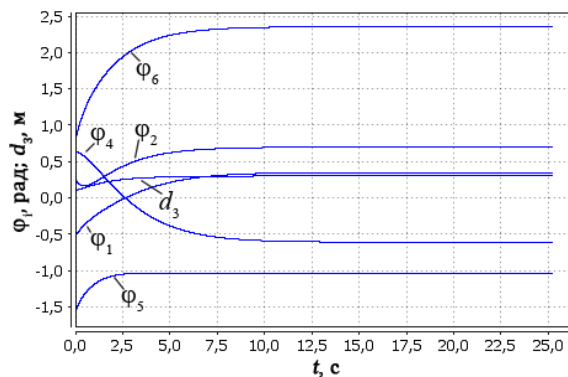


Рисунок 4

В четвертой главе приведены бикватернионные аналитические решения в нелинейной постановке кинематических задач оптимального программного и стабилизирующего управлений движением свободного твердого тела. Получены бикватернионные программный и стабилизирующий оптимальные законы управления и бикватернионные законы движения свободного твердого тела.

Движение свободного твердого тела под действием кинематического управления описывается известным бикватернионным дифференциальным уравнением, полученным Челноковым Ю.Н.:

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \mathbf{U}, \mathbf{U} = U_1 \mathbf{i}_1 + U_2 \mathbf{i}_2 + U_3 \mathbf{i}_3. \quad (16)$$

Здесь $\Lambda = \lambda + s\lambda^0 = (\lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3) + s(\lambda_0^0 + \lambda_1^0 \mathbf{i}_1 + \lambda_2^0 \mathbf{i}_2 + \lambda_3^0 \mathbf{i}_3)$ – бикватернион текущего местоположения твердого тела (фазовая переменная); \mathbf{U} – отображение кинематического винта тела на связанную с

твердым телом систему координат (управление); $U_i = \omega_i + sv_i$ – дуальные скалярные управления.

Рассмотрена в бикватернионной кинематической постановке задача построения оптимального в смысле минимизации затрат на управление программным перемещением свободного твердого тела. Полагается, что управление движением осуществляется за счет сообщения твердому телу мгновенного винта скоростей \mathbf{U} . Эта задача является обобщением задачи оптимального кинематического программного разворота твердого тела, которая рассматривалась в кватернионной постановке Молоденковым А.В.

В качестве математической модели движения свободного твердого тела (при рассмотрении проекций U_i кинематического винта в качестве управлений) выступают его кинематические уравнения (16), эквивалентные в скалярной записи восьми нелинейным скалярным вещественным дифференциальным уравнениям. Бикватернион Λ – нормированный. Функция $\Lambda(t)$ – непрерывна, $\mathbf{U}(t)$ – кусочно-непрерывна. На модули векторов скорости наложено ограничение:

$$|\boldsymbol{\omega}_{x_6y_6z_6}(t)| \leq \omega_0, \quad |\mathbf{v}_{x_6y_6z_6}(t)| \leq v_0, \quad \omega_0, v_0 = const. \quad (17)$$

Заданы начальное и требуемое конечное положения свободного твердого тела (18) и функционал минимизации (19):

$$\Lambda(0) = \Lambda_0, \quad \Lambda(T) = \mathbf{N}, \quad (18)$$

$$J = \int_0^T (U_1^2 + U_2^2 + U_3^2) dt. \quad (19)$$

Требуется определить оптимальное управление \mathbf{U} системой (16) при ограничении на управление (17) и граничных условиях (18), доставляющее минимум функционалу минимизации (19). Время переходного процесса T фиксировано.

С помощью принципа перенесения Котельникова-Штуде получены бикватернионный закон формирования оптимального программного управления (20) и бикватернионный закон программного движения свободного твердого тела (21):

$$\mathbf{U} = \frac{2 \arccos(\text{scal}(\mathbf{N} \circ \bar{\Lambda}_0))}{T \sin(\arccos(\text{scal}(\mathbf{N} \circ \bar{\Lambda}_0)))} \text{screw}(\bar{\Lambda}_0 \circ \mathbf{N}), \quad (20)$$

$$\Lambda(t) = \Lambda_0 (\cos(|c_v|t) - \text{ctg}(|c_v|T) \sin(|c_v|t)) + \mathbf{N} \frac{\sin(|c_v|t)}{\sin(|c_v|T)}, \quad (21)$$

$$c_v = \frac{1}{T} \arccos(\text{scal}(\mathbf{N} \circ \Lambda_0)).$$

При этом для задаваемого времени T должно выполняться следующее условие (в противном случае задача превратится в задачу быстрогодействия):

$$T > T_{min} = \frac{2 \arccos(\text{scal}(\mathbf{n} \circ \bar{\lambda}_0))}{\omega_0}.$$

Кроме того, допустимые ограничения на угловую и линейную скорости связаны соотношением:

$$\frac{v_0}{\omega_0} = - \frac{\text{scal}(\mathbf{n}_0 \circ \bar{\lambda}_0 + \mathbf{n}_0 \circ \bar{\lambda}_{00})}{\arccos(\text{scal}(\mathbf{n}_0 \circ \bar{\lambda}_0)) \sqrt{1 - (\text{scal}(\mathbf{n}_0 \circ \bar{\lambda}_0))^2}}.$$

Оптимальной программной траекторией свободного твердого тела в рассматриваемом случае управления является винтовое перемещение с постоянными угловой и линейной скоростями. Направление и величина этих скоростей определяются начальным и требуемым конечным положениями твердого тела, а также заданным временем T переходного процесса.

В четвертой главе также получено в двух вариантах аналитическое бикватернионное решение задачи построения оптимального кинематического стабилизирующего управления движением свободного твердого тела. В качестве управления в этой задаче рассматривается кинематический винт свободного твердого тела, при сообщении которого твердому телу оно переходит асимптотически устойчивым образом из любого, заранее не заданного начального положения на любую выбранную программную траекторию и в дальнейшем совершает асимптотически устойчивое движение по этой траектории. При этом должен выполняться некоторый критерий качества переходного процесса. В качестве двух форм математической модели движения выступают бикватернионные дифференциальные уравнения возмущенного движения свободного твердого тела, предложенные Челноковым Ю.Н. и имеющие вид:

$$2\dot{\mathbf{M}} = \Lambda \circ \delta\mathbf{U}_{x_6y_6z_6} \circ \bar{\mathbf{N}}(t) = \delta\mathbf{U}_{x_0y_0z_0} \circ \mathbf{M}, \quad 2\dot{\mathbf{M}}^* = \mathbf{M}^* \circ \Delta\mathbf{U}_{x_6y_6z_6}. \quad (22)$$

Здесь \mathbf{M} и \mathbf{M}^* – бикватернионы ошибки местоположения, определенные своими компонентами в опорной и связанной системах координат; $\delta\mathbf{U}_{x_0y_0z_0}$ и $\Delta\mathbf{U}_{x_6y_6z_6}$ – бикватернионные стабилизирующие управления движением свободного твердого тела, определенные своими дуальными компонентами $U_i = \omega_i + sv_i$ в опорной и связанной системах координат соответственно.

При построении первого и второго уравнений (22) использованы разные способы введения ошибки по положению свободного твердого тела и формирования управления. Каждое из бикватернионных уравнений (22) эквивалентно восьми нелинейным скалярным вещественным дифференциальным уравнениям.

Рассмотрены функционалы минимизации:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{4} \int_0^\infty \left(\alpha_1 |\mathbf{M}_v|^2 + \alpha_2 |\delta\mathbf{U}_{x_0y_0z_0}|^2 \right) dt, \\ J &= \frac{1}{4} \int_0^\infty \left(\alpha_1 |\mathbf{M}_v^*|^2 + \alpha_2 |\Delta\mathbf{U}_{x_6y_6z_6}|^2 \right) dt, \end{aligned} \quad (23)$$

где \mathbf{M}_v , \mathbf{M}_v^* – винтовые части бикватернионов \mathbf{M} и \mathbf{M}^* (фазовых переменных); α_1 , α_2 – положительные весовые коэффициенты. Каждый из функционалов характеризует интегральную величину затрат на кинематическое управление и среднеквадратичных отклонений параметров движения свободного твердого тела от их программных значений, взятых в определенной пропорции, определяемой величинами весовых коэффициентов.

Задача заключается в построении стабилизирующих управлений $\delta \mathbf{U}_{x_0 y_0 z_0}$ и $\Delta \mathbf{U}_{x_6 y_6 z_6}$, обеспечивающих асимптотическую устойчивость невозмущенного движения $\mathbf{M} = \mathbf{M}^* = 1$ и доставляющих минимум функционалам (23).

Оптимальные законы стабилизирующего управления получены двумя способами: 1) с помощью принципа перенесения Котельникова-Штуде, примененного к известному (Челноков Ю.Н., Бирюков В.Г.) кватернионному решению кинематической задачи оптимальной нелинейной стабилизации вращательного движения твердого тела, 2) выведены явным образом с помощью принципа максимума Понтрягина. Полученные оптимальные законы имеют вид:

$$\delta \mathbf{U}_{x_0 y_0 z_0} = -\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \mathbf{M}_v, \quad \Delta \mathbf{U}_{x_6 y_6 z_6} = -\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \mathbf{M}_v^*. \quad (24)$$

Также получены оптимальные законы изменения дуальных параметров Эйлера M_j , описывающих движение свободного твердого тела, имеющие вид:

$$M_0(t) = \frac{1-c_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} t\right)}{1+c_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} t\right)}, \quad M_0^*(t) = \frac{1-c_0^* \exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} t\right)}{1+c_0^* \exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} t\right)}, \quad c_0 = \frac{1-M_0(0)}{1+M_0(0)}, \quad c_0^* = \frac{1-M_0^*(0)}{1+M_0^*(0)},$$

$$|M_k(t)| = |M_k(0)| \exp\left[-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \int_0^t M_0(\tau) d\tau\right], \quad k = 1, 2, 3,$$

$$|M_k^*(t)| = |M_k^*(0)| \exp\left[-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \int_0^t M_0^*(\tau) d\tau\right], \quad k = 1, 2, 3.$$

Оптимальное движение свободного твердого тела в текущий момент времени представляет собой мгновенное винтовое движение вокруг оси, имеющей в опорной (основной) системе координат направление, противоположное направлению винта $\mathbf{M}_v(t)$, а в связанной с телом системе координат – винта $\mathbf{M}_v^*(t)$.

В пятой главе приведены результаты численного решения обратной задачи кинематики стэнфордского манипулятора с использованием двух построенных в четвертой главе оптимальных законов управления, а также результаты моделирования движения стэнфордского манипулятора под действием полного кинематического управления, складывающегося из суммы построенных программного и стабилизирующего управлений.

Получено численное решение обратной задачи кинематики стэнфордского манипулятора с использованием программного оптимального закона управления (20) для различных значений заданного времени решения задачи T . Численное моделирование показало, что при увеличении заданного времени решения задачи модули главной и моментной частей управления уменьшаются. Это согласуется с теорией, так как, согласно формуле (20), управление \mathbf{U} обратно пропорционально заданному времени решения задачи T .

Получено численное решение обратной задачи кинематики с использованием второго оптимального стабилизирующего закона управления (24) для различных отношений весовых коэффициентов α_1/α_2 . Показано, что чем больше коэффициент α_1 , отвечающий за минимизацию среднеквадратичных отклонений параметров движения манипулятора от их программных значений, тем больше модули главной и моментной частей управления и меньше время решения задачи; и наоборот, чем больше коэффициент α_2 , отвечающий за минимизацию затрат на управление, тем меньше модули главной и моментной частей управления и больше время, за которое достигается требуемая точность решения.

В этой главе также рассмотрено в кинематической постановке управляемое движение выходного звена стэнфордского манипулятора с использованием полного управления, определяемого по формуле $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{pr} + \delta\mathbf{U}$. В качестве программного управления \mathbf{U}^{pr} использован закон управления (20), оптимальный в смысле минимизации затрат на управление, а в качестве стабилизирующего управления $\delta\mathbf{U}$ - второй закон управления (24), оптимальный в смысле минимизации среднеквадратических отклонений фазовых координат от их программных значений и затрат на управление.

Из построенных в диссертации графиков для управлений и фазовых координат установлено, что выходное звено манипулятора сначала под действием стабилизирующего и программного управлений выходит на программную траекторию, а затем продолжает движение по этой траектории под действием программного управления до выхода в требуемое конечное положение выходного звена манипулятора.

Более полные результаты численного моделирования, а также их анализ и выводы можно найти в диссертации.

В заключении сформулированы результаты и выводы по диссертации.

Основные результаты и выводы

1. Развита на примере стэнфордского манипулятора методология решения прямых задач кинематики роботов-манипуляторов с использованием: 1) матриц дуальных направляющих косинусов, 2) параболических бикватернионов Клиффорда, 3) бикватернионных матриц.

2. Построены кинематические уравнения движения стэнфордского манипулятора с использованием матриц дуальных направляющих косинусов.

3. Получен в нелинейной постановке оптимальный программный бикватернионный кинематический закон управления движением свободного твердого тела, минимизирующий затраты на управление; построен в явном виде оптимальный программный бикватернионный закон движения тела.

4. Поставлена и аналитически решена кинематическая задача оптимальной нелинейной стабилизации произвольного программного движения свободного твердого тела. Получены оптимальный в смысле минимизации затрат на управление и среднеквадратичных отклонений фазовых координат от их программных значений бикватернионный и кватернионные кинематиче-

ские законы управления и соотношения, описывающие изменение дуальных параметров Эйлера в процессе оптимального управляемого движения тела.

5. Построены алгоритмы численного решения обратной задачи кинематики роботов-манипуляторов с использованием бикватернионной теории кинематического управления и примеры численного решения обратной задачи кинематики стэнфордского манипулятора, иллюстрирующие возможности развиваемого метода. Выявлены закономерности и свойства численного решения.

6. Разработана программа на языке Java для численного решения прямой и обратной задач кинематики стэнфордского манипулятора с помощью бикватернионной теории кинематического управления для четырех построенных законов управления, реализующая вычисления с использованием матриц дуальных направляющих косинусов и параболических бикватернионов Клиффорда.

Публикации в центральных изданиях, включенных в перечень ВАК РФ

1. Ломовцева (Нелаева) Е. И. Дуальные матричные и бикватернионные методы решения прямой и обратной задач кинематики роботов-манипуляторов на примере стэнфордского манипулятора. I / Е. И. Ломовцева, Ю. Н. Челноков // Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т. 13. – Вып. 4. – С. 82-89.

2. Ломовцева (Нелаева) Е. И. Дуальные матричные и бикватернионные методы решения прямой и обратной задач кинематики роботов-манипуляторов на примере стэнфордского манипулятора. II / Е. И. Ломовцева, Ю. Н. Челноков // Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2014. – Т. 14. – Вып. 1. – С. 88-95.

3. Нелаева Е. И. Решение прямых и обратных задач кинематики роботов-манипуляторов с использованием дуальных матриц и бикватернионов на примере стэнфордского манипулятора. Ч. 1 / Е. И. Нелаева, Ю. Н. Челноков // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2015. – Т. 16. – №6. – С. 373-380.

4. Нелаева Е. И. Решение прямых и обратных задач кинематики роботов-манипуляторов с использованием дуальных матриц и бикватернионов на примере стэнфордского манипулятора. Ч. 2 / Е. И. Нелаева, Ю. Н. Челноков // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2015. – Т. 16. – №7. – С. 456-463.

5. Нелаева Е.И. Бикватернионное решение кинематической задачи оптимальной нелинейной стабилизации произвольного программного движения свободного твердого тела / Ю.Н. Челноков, Е.И. Нелаева // Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – Т. 16. – Вып. 2. – С. 198-207.

Публикации в других изданиях

6. Ломовцева (Нелаева) Е.И. Применение бикватернионов в кинематике стэнфордского робота-манипулятора / Е. И. Ломовцева, Ю. Н. Челноков // Математика. Механика: сб. науч. тр. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2012. – Вып. 14. – С. 123-126.

7. Ломовцева (Нелаева) Е.И. Бикватернионные методы решения прямой и обратной задач кинематики роботов-манипуляторов на примере стэнфордского манипулятора с использованием бикватернионной теории кинематического управления / Е. И. Ломовцева, Ю. Н. Челноков // Проблемы критических ситуаций в точной механике и управлении: материалы Всерос. науч. конф. с междунар. участием. – Саратов: ООО Издательский Центр «Наука», 2013. – С. 270-274.

8. Ломовцева (Нелаева) Е.И. Решение обратной задачи кинематики стэнфордского манипулятора с применением бикватернионной теории кинематического управления / Е. И. Ломовцева, Ю. Н. Челноков // Математика. Механика: сб. науч. тр. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2014. – С. 110-114.

9. Ломовцева (Нелаева) Е.И. Using biquaternion theory of kinematics control for solving inverse kinematics problem of manipulators by the example of Stanford robot arm / Е. И. Ломовцева // Presenting Academic Achievements to the World : материалы V Междунар. науч. конф. молодых ученых. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2014. – Вып.5. – С.124-130.

10. Нелаева Е.И. Аналитическое бикватернионное решение кинематической задачи оптимальной нелинейной стабилизации произвольного программного движения свободного твердого тела / Ю. Н. Челноков, Е.И. Нелаева // Системный анализ, управление и навигация: материалы XX Междунар. науч. конф. – М.: Изд-во МАИ, 2015. – С. 133-135.