ОБ УПОРЯДОЧЕННЫХ ПОЛУГРУППАХ ОТНОШЕНИЙ С УНАРНОЙ ОПЕРАЦИЕЙ ИДЕНТИВИКАЦИИ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Д.А. Бредихин, А.В. Попович
Кафедра Математики и моделирования

В работе находится базис тождеств многообразия, порожденного классом полугрупп бинарных отношений с дополнительной операцией идентификации неподвижной точки.

Актуальность темы. Множество бинарных отношений Φ, замкнутое относительно некоторой совокупности Ω операций над ними образует алгебру (Φ, Ω), называемую *алгеброй отношений*. Всякая такая алгебра может быть рассмотрена как упорядоченная $(\Phi, \Omega, \subset)$ отношением теоретико-множественного включения $\subset$. Современный этап развития теории алгебр отношений был заложен в работах А. Тарского [1,2]. Одной из важнейших операций алгебр отношений Тарского является операция умножения отношений $\circ$. Достаточно отметить, что рассмотрение именно этой операции побудило Пирса ввести в логику понятие квантора существования. Алгебры отношений вида $(\Phi, \circ)$ и $(\Phi, \circ, \subset)$ образуют соответственно полугруппу и упорядоченную полугруппу бинарных отношений. Общеизвестно, что всякая полугруппа изоморфно представима полугруппами бинарных отношений. Однако, не все важные свойства бинарных отношений могут быть выражены с помощью операции умножения. Это приводит к необходимости рассмотрения алгебр отношений, в сигнатуру которых наряду с операцией умножения входят и другие операции над отношениями. Указанному направлению принадлежат работы многочисленных авторов (см. обзор [3]).

Мы сосредоточим свое внимание на операции произведения отношений $\circ$ и унарной операции ∇, определяемой следующим образом. Для всякого бинарного отношения ρ положим

$$\nabla(\rho) = \{(x, x) : (\exists y)\,(y, y) \in \rho\}.$$

Заметим, что $\nabla(\rho)$ совпадает с тождественным отношением Δ, если отношение ρ содержит неподвижную точку, и $\nabla(\rho)$ есть пустое отношение $\varnothing$ в противном случае. По этим соображениям, операция ∇ может быть рассмотрена как операция идентификации неподвижной точки.

При рассмотрении алгебр отношений одной из центральных задач является задача изучения их свойств, выраженных с помощью тождеств, что приводит к необходимости рассмотрения многообразий, порожденных соответствующими классами. В свою очередь, одной из центральных задач теории многообразий алгебр является задача нахождения их базисов тождеств. Именно этим вопросам и посвящена настоящая работа.

ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Обозначим через $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subset\}$) класс алгебр (упорядоченных алгебр), изоморфных алгебрам (упорядоченным алгебрам) отношения с операциями из Ω. Пусть $V\{\Omega\}$ ($V\{\Omega, \subset\}$) - многообразие, порожденные классом $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subset\}$.

Базис тождеств многообразия $V\{\circ, \nabla\}$ был найден в работе [4]. Следующая теорема дает решение соответствующей проблемы для многообразия упорядоченных алгебр $V\{\circ, \nabla, \subset\}$.

Теорема 1. Упорядоченная алгебра $(A, \cdot, {}^*, \leq)$ типа $(2,1)$ тогда и только тогда принадлежит многообразию $V\{\circ, \nabla, \subset\}$, когда она удовлетворяет следующим тождествам:

$(xy)z = x(yz)$ (1), $(x^*)^2 = x^*$ (2), $xy^* = y^*x$ (3), $(xy)^* = (yx)^*$ (4), $(xy^*)^* = x^*y^*$ (5), $x^* \leq (x^n)^*$ для любого натурального числа n (6), $xy^* \leq x$ (7).

Из сформулированной теоремы и следствия 2 работы [5] непосредственно вытекает следующее следствие.

Следствие. Алгебра $(A, \cdot, \vee, {}^*)$ типа $(2,2,1)$ тогда и только тогда принадлежит многообразию $R\{\circ, \cup, \nabla\}$, когда $(A, \vee)$ - полурешетка, выполняются тождества (1) –(6) и тождества: $x + xy^* = x$ (8), $(x+y)^* = x^* + y^*$ (9), $(x+y)z = xy + xz$ (10), $(x+y)z = xz + yz$ (11).

Теорема 2. Многообразия $Var\{\circ, \nabla\}$ и $Var\{\circ, \nabla, \subset\}$ не являются конечно базируемые.

Проблема 1. Нахождение базиса квазитождеств для квазимногообразия, порожденного классом $R\{\circ, \nabla\}$ и $R\{\circ, \nabla, \subset\}$.

Проблема 2. Найдите систему элементарных аксиом для класса $R\{\circ, \nabla\}$ и $R\{\circ, \nabla, \subset\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tarski A. On the calculus of relations// J. Symbolic Logic. 1941. V. 6, P. 73 - 89.
2. Tarski A. Some methodological results concerning the calculus of relations// J. Symbolic Logic. 1953. V.18, P. 188 -189.
3. Schein B.M. Relation algebras and function semigroups // Semigroup Forum. 1970. V.1. P. 1-62.
4. Бредихин Д.А.Об алгебрах отношений с операцией индентификации неподвижной точки// Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным волпросам. Саратов, изд-во СГУ, 2010. Вып. 6, С. 90 – 98.
5. Бредихин Д.А. Эквациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями. // Изв. вузов. Матем. 1993. №3, С. 23-30.