

Методы вычисления показателей Ляпунова и способы повышения точности вычислений.

Важной задачей в анализе нелинейных динамических распределённых систем является определение старшего показателя Ляпунова, а также полного спектра показателей Ляпунова. Показатели Ляпунова являются количественной мерой чувствительности к значениям начальных условий. Известно несколько методов расчета показателей Ляпунова.

1. Расчёт старшего показателя по выборке из единственной координаты.

Алгоритм, носящий имя Вольфа [1], рассчитывает старший показатель Ляпунова по выборке из единственной координаты, и используется, когда неизвестны уравнения эволюции системы, и нельзя измерить все её фазовые координаты. Этот алгоритм даёт неплохие результаты, но требует очень большие выборки, что проблематично для реальных данных.

2. Алгоритм Бенеттина [2].

Алгоритм Бенеттина также используется для вычисления старшего показателя Ляпунова. Обобщённый алгоритм позволяет вычислять полный спектр Ляпуновских показателей. Недостатком алгоритма является то, что он применим лишь в тех случаях, когда известны уравнения эволюции системы, и есть возможность измерить все её фазовые координаты, что не всегда представляется возможным.

3. Расчет полного спектра Ляпунова с использованием нейронных сетей.

1. Вычисление на основании выборки подходящей временной задержки.
2. Вычисление размерности пространства вложения.
3. Псевдофазовая реконструкция траектории методом временных задержек.
4. Конструирование аппроксимирующей нейронной сети.
5. Обучение нейронной сети вычислять очередной вектор последовательности.
6. Расчет спектра при помощи обобщенного алгоритма Бенеттина в обученной сети.

Использование и оптимизация нейронных сетей является одним из направлений по улучшению производительности и точности алгоритмов расчёта показателей Ляпунова. Кроме того, есть возможность обучения нейронной сети на выборках, что позволяет использовать выборки малой длины или зашумлённые данные. Это даёт значительные преимущества по сравнению с классическими методами.

Одним из способов повышения точности расчёта показателей является использование различных методов ортогонализации. Мной были исследованы классический метод Грамма-Шмидта и модифицированный метод Грамма-Шмидта. Вычисления показали, что при увеличении количества итераций между ортогонализациями, модифицированный метод теряет информацию медленнее, чем классический. Достигается это за счёт того, что в модифицированный метод удаляет составляющую каждого координатного направления отдельно, в отличие от классического метода, который делает это, отнимая скалярное произведение векторов.

Литература

1. Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A. Determining Lyapunov exponents from a time series // *Physica*. 1985. V. D16. P. 285-317
2. Benettin G., Galgani L., Strelcyn J.M. Kolmogorov entropy and numerical experiments // *Phys. Rev.* 1976. V. A14. P. 2338-2345.